Занятие 1

($\Sigma_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ — формальное выражение или число? А $\Sigma_{n=1}^{\infty} 1/n$?)

Формальный язык состоит из формальных выражений (слов), называемых *формулами*. Правила написания формул называется *синтаксисом* языка. А описание допустимых способов приписывать им значения называется *семантикой* языка.

Язык ЛВ (логики высказываний). $PVar = \{p_0, p_1, \ldots\}$ (пропозициональные переменные);
Формулы. $F ::= p_i \mid (\neg F) \mid (F \wedge F) \mid (F \vee F) \mid (F \to F) \mid (F \leftrightarrow F)$.
(Соглашения о приоритете связок позволяют опускать часть скобок.)

Иногда в язык добавляют константы $\top$ (истина), $\bot$ (ложь).
Семантика (классическая). Функция $\alpha\colon PVar \to Prop$ называетсся интерпретацией, или оценкой проп. переменных. Для классической логики: $Prop = \{0, 1\}$, функция α — истинностная оценка, она продолжается на все формулы по таблицам истинности. (Возможны и более "богатые" оценки с другим $Prop$, но они неотличимы от простейших ввиду бедности языка.)

I. Выполнимость и общезначимость формул (для ЛВ).

1. Исследовать на выполнимость и общезначимость:

$$\begin{array}{ll} \neg p \wedge p & (p \to q) \vee (q \to p) \\ (p \to q) \to p & p \to (q \to p) \\ ((p \to q) \to p) \to p & \end{array}$$

II. Эквивалентность формул языка ЛВ. Основные эквивалентности:

- $\wedge$, $\vee$ — ассоциативны, симметричны, идемпотентны ($A \vee A \equiv A$) и дистрибутивны относительно друг друга.
- $A \to B \equiv \neg A \vee B$, $\quad A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$.
- $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$, $\quad \neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$.
- $A \wedge (A \vee B) \equiv A$, $\quad A \vee (A \wedge B) \equiv A$.
- $A \vee \neg A \equiv \top$, $\quad A \wedge \neg A \equiv \bot$,

2. Упростить:

   1) $(\neg p \wedge q) \vee p$ 3) $(q \to p) \wedge r \to p$
   2) $(p \to q) \wedge (p \to r)$ 4) $((p \to q) \wedge (\neg q \to p)) \vee (r \to p)$

3. Привести к ДНФ и КНФ следующие формулы:

   1) $p \vee q \to r \vee s$
   2) $p \wedge (q \vee r \to s)$
   3) $((p \to q) \to r) \to p$

III. Функциональная полнота — каждую булеву функцию можно задать формулой ЛВ.

4. Составить формулу от трёх переменных, истинную в том, и только в том случае, когда ровно две входящих в неё переменные истинны.

5. Постройте формулу A, для которой данные формулы оказываются тавтологиями. Сколько неэквивалентных решений имеет задача?

   1) $(A \wedge q \to \neg p) \to ((p \to \neg q) \to A)$
   2) $(r \to A) \leftrightarrow (r \to p \wedge q)$, $(A \to r) \leftrightarrow (\neg(p \vee q) \to r)$

Домашнее задание

6. Определите, является ли каждая из следующих формул тавтологией, тождественно ложной формулой или ни тем, ни другим. Являются ли эти формулы выполнимыми?

   1) $p \leftrightarrow (\neg p \vee \neg p)$ 3) $((q \to p) \to q) \to q$
   2) $(p \to q) \wedge r \to p$ 4) $\neg p \to p \wedge q$

7. Доделать задачи 2 и 3. Сформулировать алгоритмы приведения к ДНФ и КНФ с помощью эквивалентностей. Как из ДНФ с помощью эквивалентностей сделать СДНФ?

8. Приведите к КНФ следующие формулы:

   1) $(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge r) \vee (\neg q \wedge r)$
   2) $((p \to q) \to p) \leftrightarrow p$
   3) $((r \to q) \to p) \to q$

9. Постройте формулу A от переменных p, q и r, для которой

   1) $p \wedge A \equiv p \wedge q, \ \ p \vee A \equiv p \vee r$
   2) $p \to A \equiv q \to (\neg p \vee r), \ \ (r \to q) \to p \equiv \neg p \to \neg A$

10. Пусть формула $A = A(x_1, \ldots, x_n)$ от проп. переменных $x_1, \ldots, x_n$ не содержит других связок, кроме $\neg, \wedge, \vee$. Двойственная к ней формула A^* получается из нее (параллельной) заменой всех $\wedge$ на $\vee$ и всех $\vee$ на $\wedge$. Доказать, что $A^*(x_1, \ldots, x_n) \equiv \neg A(\neg x_1, \ldots, \neg x_n)$.

11. Доказать принцип двойственности: если $A \equiv B$ и формулы A, B не содержат других связок, кроме $\neg, \wedge, \vee$, то $A^* \equiv B^*$.

12. Множество формул Γ называется *выполнимым*, если существует единая истинностная оценка проп. переменных (их счетное множество), которая обращает все формулы из Γ в истину. Доказать принцип компактности ("локальную теорему") для ЛВ: бесконечное множество формул Γ выполнимо тогда и только тогда, когда каждое его конечное подмножество выполнимо.