Занятие 4

Логика предикатов первого порядка (ЛП) Синтаксис языка первого порядка сигнатуры $\sigma = \langle Cnst,\ Fn,\ Pr\rangle$ обсуждался на предыдущем занятии.

Семантика. Выбираем множество $M \neq \emptyset$ (носитель) и интерпретацию I сигнатуры σ в M:

$$c \in Cnst \ \mapsto\ \overline{c} \in M, \quad f^n \in Fn \ \mapsto\ \overline{f}\colon M^n \to M, \quad P^n \in Pr \ \mapsto\ \overline{P} \subseteq M^n.$$

(Предикат $\overline{P} : M^n \to \{0, 1\}$ отождествлен с его областью истинности $\overline{P} \subseteq M^n$.)

Каждая *замкнутая* (т.е. без свободных переменных) формула становится обозначением для некоторого высказывания про конкретные (заданные интерпретацией) элементы, операции и отношения на множестве M. Оно оказывается истинным или ложным. Тем самым определяется истинность/ложность формулы в данной интерпретации (обозначение: $I \models \varphi$).

Пример. $\varphi = \forall x_0 \exists x_1 (P^2_3(x_0, x_1) \wedge P^1_0(x_1))$ (удобнее $\forall x \exists y (P(x, y) \wedge Q(y))$).

> $M := N$, $\overline{P} := \{\langle x, y\rangle \mid x < y\}$, $\overline{Q} := \{x \mid x$ простое число$\}$. Тогда φ выражает факт бесконечности множества простых чисел, поэтому $I \models \varphi$.
>
> Изменим интерпретацию $\overline{P} := \{\langle x, y\rangle \mid x > y\}$. Тогда φ выражает ложное высказывание об отсутствии наименьшего простого числа, поэтому $I \not\models \varphi$.

Истинность/ложность незамкнутых формул $\varphi(\bar{x})$ в интерпретации I зависит от выбора значений свободных переменных $\bar{x}$. Чтобы фиксировать этот выбор, к интерпретации добавляют оценку свободных переменных $\theta : Var \to M$. Тогда $I, \theta \models \varphi(\bar{x}) \Leftrightarrow I \models \varphi(\theta(\bar{x}))$. (Все корректно? Подумать, как исправить.)

I. Выполнимость и общезначимость формул ЛП. Замкнутая формула называется выполнимой, если существует интерпретация, в которой она истинна. Общезначимость означает истинность во всех интерпретациях.

1. Исследовать на выполнимость и общезначимость:

$$\begin{array}{l}
\exists x\, P(x,x) \\
\forall x(P(x) \vee Q(x)) \to \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \\
\forall x(P(x) \vee Q(x)) \to \forall x P(x) \vee \exists x Q(x) \\
\exists x \forall y \exists z P(x,y,z) \to \forall x \exists y P(x,y,y) \\
\exists y \forall x P(x,y,y) \to \forall x \exists y \forall z P(x,y,z)
\end{array}$$

II. Эквивалентность формул в ЛП. Основные эквивалентности:

- Все табличные эквивалентности логики высказываний.
- Вынесение кванторов:

$$Qx\, A(x)\, op\, B \equiv Qx(\, A(x)\, op\, B\,), \qquad Q \in \{\forall, \exists\},\ op \in \{\wedge, \vee\}.$$

$$\neg \exists x A(x) \equiv \forall x \neg A(x), \qquad \neg \forall x A(x) \equiv \exists x \neg A(x).$$

- Переименование кванторов:
  $Qx\, A(x) \equiv Qy\, A(y)$ (y — новая переменная).
- Сокращение кванторов:

$$\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x (A(x) \wedge B(x)), \quad \exists x A(x) \vee \exists x B(x) \equiv \exists x (A(x) \vee B(x)).$$

- Фиктивный квантор: $\forall x A \equiv A, \quad \exists x A \equiv A$.

2. В каждом из четырех примеров вынести кванторы наружу:
   $Q_1 x\, A(x) \to Q_2 x\, B(x)$, где $Q_1, Q_2 \in \{\forall, \exists\}$.
3. Сформулировать общий метод вынесения кванторов.
4. Среди следующих формул найти все пары равносильных формул:

$$\begin{array}{lll}
1)\ \forall x \forall y (P(x) \to Q(y)) & 2)\ \forall x \exists y (P(x) \to Q(y)) & 3)\ \exists y \forall x (P(x) \to Q(y)) \\
4)\ \forall y \exists x (P(x) \to Q(y)) & 5)\ \exists x \forall y (P(x) \to Q(y)) & 6)\ \exists x \exists y (P(x) \to Q(y))
\end{array}$$

5. Добавление. В реальной математике мы часто выходим за рамки языка ЛП (1-го порядка) в языки 2-го и больших порядков. Пример — перевод $I \models \forall\bar{x}\exists y Q(\bar{x}, y)$ в язык второго порядка с кванторами по функциям: $I \models \exists f \forall\bar{x} Q(\bar{x}, f(\bar{x}))$ (введение скулемовских функций). Пусть надо доказать, что

$$\lim_{x\to+\infty} 1/x = 0, \quad \text{т.е.} \quad \mathbf{R}^+ \models \forall\varepsilon\exists a \underbrace{\forall x(x > a \to (1/x) < \varepsilon)}_{Q(\varepsilon,a)}.$$

Вместо этого обычно ищут такую функцию $f(\varepsilon)$, для которой верно $\forall x(x > f(\varepsilon) \to (1/x) < \varepsilon)$, например, $f(\varepsilon) = 1/\varepsilon$, т.е. доказывают

$$\mathbf{R}^+ \models \exists f \forall\varepsilon\forall x(x > f(\varepsilon) \to (1/x) < \varepsilon).$$

Это вполне корректный и работоспособный метод доказательства истинности формул ЛП в данной интерпретации.

Домашнее задание

6. Доделать предыдущее домашнее задание (про невыразимость).

7. Доделать задачу 1.

8. Доказать, что следующая формула выполнима только в бесконечных интерпретациях:
$\forall x\exists y Q(x, y) \wedge \forall x\forall y\forall z(\neg Q(x, x) \wedge (Q(x, y) \to (Q(y, z) \to Q(x, z))))$.

9. Доказать, что следующая формула истинна в каждой интерпретации с трехэлементным носителем:
$\forall x\forall y\forall z(R(x, x) \wedge (R(x, z) \to R(x, y) \vee R(y, z))) \to \exists x\forall y R(x, y)$.

10. Уметь доказывать основные эквивалентности. Почему формул вынесения кванторов 4, а сокращения кванторов — только 2 ?

11. Доделать задачу 4.

12. Вынести кванторы наружу (привести к предваренной нормальной форме):
$$\neg\forall x\forall y P(x, y) \vee \forall x\exists y Q(x, y).$$
$$\forall x\neg\exists y P(x, y) \wedge \exists x\forall y Q(x, y),$$
$$\forall x\exists y P(x, y) \to \forall x\exists y Q(x, y).$$

13. С помощью введения скулемовских функций $z(x)$ и $u(x, y)$ установить истинность следующей формулы в стандартной интерпретации на натуральном ряду. (Символы "$<$", "$>$" интерпретируются отношениями "меньше" и "больше".)

$$\forall x \exists z \forall y \exists u ((y > z \to y > u) \wedge (u < z) \wedge \neg (u < x)).$$

Почему у скулемовских функций именно такие аргументы?