Занятие 5

Логическое и дедуктивное следования в логике предикатов. Для упрощения определений будем предполагать, что индивидные переменные (Var) разделены на два непересекающихся списка: $a, b, c, \ldots$ (свободные переменные, параметры) и $x, y, z, \ldots$ (связанные переменные). При этом в определении синтаксиса языков первого порядка термы строятся только с использованием свободных переменных, а пункт про кванторы модифицируется так:

если φ – формула, свободная переменная a не находится в области действия квантора по x, то $(\forall x\, \varphi[x/a])$ и $(\exists x\, \varphi[x/a])$ также являются формулами.

(Выражение $[x/a]$ означает синтаксическую подстановку, т.е. замену буквы a на букву x; она действует на формулу φ, после чего добавляется кванторная приставка.)

Пусть Γ – множество *замкнутых* формул, а F – *замкнутая* формула языка первого порядка.

Определение. Формула F *логически следует* из множества Γ (обозначение $\Gamma \models F$), если для каждой интерпретации, обращающей все формулы из Γ в истину, формула F также оказывается истинной.

Определение. Формула F *дедуктивно следует* или *выводима* из множества Γ (обозначение $\Gamma \vdash F$) если у нее существует *формальный вывод* (определение см. ниже) из гипотез Γ.

Теорема о корректности и полноте исчисления предикатов утверждает эквивалентность этих понятий: $(\Gamma \models F) \quad \Leftrightarrow \quad (\Gamma \vdash F)$.

Теорема о дедукции для исчисления предикатов справедлива, когда все формулы из Γ, A замкнуты: $(\Gamma,\, A \vdash B) \quad \Rightarrow \quad (\Gamma \vdash A \to B)$.

Определение формального вывода в исчислении предикатов.
Аксиомы исчисления предикатов:

- Все схемы аксиом исчисления высказываний.
- Формулы видов $\forall x\, A(x) \to A(t)$ и $A(t) \to \exists x\, A(x)$, где t – терм.

Вывод в исчислении предикатов — конечная последовательность формул, каждая из которых либо является аксиомой, либо получается из предшествующих формул по правилу *modus ponens* (MP) или одному из *правил Бернайса*:

$$\frac{A \to B(a)}{A \to \forall x B(x)} \quad (\text{B1}) \qquad \frac{B(a) \to A}{\exists x B(x) \to A} \quad (\text{B2}),$$

где a не входит в A. В случае *вывода из гипотез* множество гипотез добавляется к аксиомам, а переменная a в правилах Бернайса также не должна встречаться в гипотезах. (Для замкнутых гипотез последнее требование выполняется автоматически.)

1. Построить вывод формулы $\forall x\, P(x) \to \forall y\, P(y)$.

$$\begin{array}{ll} \forall x\, P(x) \to P(a) & \text{(аксиома)} \\ \forall x\, P(x) \to \forall y\, P(y) & (\text{B1}) \end{array}$$

2. Построить вывод формулы $\exists y\, Q(y)$ из гипотез $\forall y(P(y) \to Q(y))$, $\exists z\, P(z)$.

   1) $\forall y(P(y) \to Q(y))$ (гипотеза)

   2) $\exists z\, P(z)$ (гипотеза)

   3) $\forall y(P(y) \to Q(y)) \to (P(a) \to Q(a))$ (аксиома)

   4) $P(a) \to Q(a)$ (из 1) и 3) по правилу MP)

   5) $Q(a) \to \exists y\, Q(y)$ (аксиома)

   6) $(Q(a) \to \exists y\, Q(y)) \to (P(a) \to (Q(a) \to \exists y\, Q(y)))$ (аксиома)

   7) $P(a) \to (Q(a) \to \exists y\, Q(y))$ (из 5) и 6) по правилу MP)

   8) $(P(a) \to (Q(a) \to \exists y\, Q(y))) \to ((P(a) \to Q(a)) \to (P(a) \to \exists y\, Q(y)))$ (аксиома)

   9) $((P(a) \to Q(a)) \to (P(a) \to \exists y\, Q(y))$ (из 7) и 8) по правилу MP)

   10) $P(a) \to \exists y\, Q(y)$ (из 4) и 9) по правилу MP)

   11) $\exists z\, P(z) \to \exists y\, Q(y)$ (из 10) по правилу (B2))

   12) $\exists y\, Q(y)$ (получено из 2) и 11) по правилу MP)

   Правило вывода допустимо, если из факта выводимости его посылок следует выводимость заключения.

Установить ту же выводимость, используя допустимые правила вывода, проще:

$\forall y(P(y) \to Q(y)) \vdash P(a) \to Q(a)$ (допустимо: акс.+ MP)
$P(a) \to Q(a),\ Q(a) \to \exists y\, Q(y) \vdash P(a) \to \exists y\, Q(y)$ (допустимо, ЛВ)
$\forall y(P(y) \to Q(y)) \vdash P(a) \to \exists y\, Q(y)$ (сечение, аксиома)
$\forall y(P(y) \to Q(y)) \vdash \exists z\, P(z) \to \exists y\, Q(y)$ (B2)
$\forall y(P(y) \to Q(y)),\ \exists z\, P(z) \vdash \exists y\, Q(y)$ (MP)

3. Доказать допустимость следующих правил вывода:

   а) "*правило введения* $\forall$": $\dfrac{\Gamma \vdash A(c)}{\Gamma \vdash \forall x\, A(x)}$, где Γ — произвольное множество замкнутых формул, c — константа, не входящая в формулы из Γ, или свободная переменная;

   б) "*правило удаления* $\forall$": $\dfrac{\Gamma \vdash \forall x\, A(x)}{\Gamma \vdash A(t)}$, где Γ — произвольное множество замкнутых формул, t — произвольный терм;

   в) "*правило введения* $\exists$": $\dfrac{\Gamma \vdash A(t)}{\Gamma \vdash \exists x\, A(x)}$, где Γ — произвольное множество замкнутых формул, t — произвольный терм;

   г) "*правило удаления* $\exists$": $\dfrac{\Gamma,\ A(c) \vdash B}{\Gamma,\ \exists x\, A(x) \vdash B}$, где Γ — произвольное множество замкнутых формул, B — замкнутая формула, c — константа, не входящая в формулы из Γ и формулу B.

Докажем допустимость правила а). Пусть $\ldots, A(c)$ — вывод формулы $A(c)$ из Γ. Очевидно, что если в этом выводе константу c заменить на свободную переменную, то снова получится вывод из Γ. Будем считать, что так и сделано, т.е. что c — свободная переменная. Пусть B — какая-нибудь фиксированная замкнутая аксиома исчисления предикатов. Продолжим данный вывод из Γ формулы $A(c)$ следующим образом:

$\ldots$

i) $A(c)$

i+1) B (аксиома)

i+2) $A(c) \to (B \to A(c))$ (аксиома)

i+3) $B \to A(c)$ (из i) и i+2) по правилу MP)

i+4) $B \to \forall v\, A(x)$ (из i+3) по правилу (B1))

i+5) $\forall x\, A(x)$ (из i+1) и i+4) по правилу MP).
Получили вывод из Γ формулы $\forall x\, A(x)$, что и требовалось.

Допустимость б) и в) легко следует из соответствующих аксиом.

Докажем допустимость правила г). Для простоты разберем случай, когда формула $A(c)$ — замкнутая. Пусть $\Gamma,\ A(c) \vdash B$. По теореме о дедукции $\Gamma \vdash A(c) \to B$. Если в выводе формулы $A(c) \to B$ из Γ константу c заменить на свободную переменную a, то получится вывод из Γ формулы $A(a) \to B$. Применяя правило (B2), получим вывод из Γ формулы $\exists x\, A(x) \to B$. Продолжим этот вывод до вывода из $\Gamma, \exists x\, A(x)$ формулы B:
...

i) $\exists x\, A(x) \to B$

i+1) $\exists x\, A(x)$ (гипотеза)

i+2) B (из i) и i+1) по правилу MP).

4. С помощью допустимых правил вывода доказать выводимость следующих формул:
$$\forall x \neg P(x) \to \neg \exists x\, P(x),$$
$$\neg \exists x\, P(x) \to \forall x \neg P(x).$$

Докажем первую из них. В силу теоремы о дедукции достаточно доказать, что
$$\forall x \neg P(x) \vdash \neg \exists x\, P(x).$$

Для этого достаточно установить, что из множества $\{\forall x \neg P(x),\ \exists x\, P(x)\}$ можно вывести противоречие. В самом деле,

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta, C \vdash A \\ \Delta, C \vdash \neg A \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta \vdash C \to A \\ \Delta \vdash C \to \neg A \end{array} \right. \Rightarrow \Delta \vdash \neg C.$$

В силу правила удаления $\exists$, противоречивость указанного множества будет следовать из противоречивости множества

$$\Gamma = \{\forall x \neg P(x),\ P(c)\},$$

где c — произвольная константа.

Установим противоречивость Γ. Очевидно, что $\Gamma \vdash P(c)$, а в силу правила удаления $\forall$ имеем $\Gamma \vdash \neg P(c)$. Так что действительно множество Γ противоречиво. Задача решена.

Теперь установим вторую выводимость. В силу теоремы о дедукции достаточно доказать, что

$$\neg\exists x\, P(x) \vdash \forall x \neg P(x).$$

В силу правила введения $\forall$ достаточно доказать, что

$$\neg\exists x\, P(x) \vdash \neg P(c),$$

где c — произвольная константа. Все опять сводится к доказательству противоречивости множества

$$\Gamma = \{\neg\exists x\, P(x),\ P(c)\}.$$

Очевидно, что $\Gamma \vdash \neg\exists x\, P(x)$, а в силу правила введения $\exists$ имеем $\Gamma \vdash \exists x\, P(x)$. Так что действительно множество Γ противоречиво. Задача решена.

Принцип компактности для логики предикатов. *Множество замкнутых формул (теория) выполнимо тогда и только тогда, когда каждое его конечное подмножество выполнимо.*
(Он справедлив также и для теорий с равенством и легко следует из теоремы о полноте.)

5. Доказать принцип компактности.

6. Пусть T — теория первого порядка в языке с равенством, K — класс всех ее нормальных моделей (т.е. равенство интерпретируется стандартно).

   - Найти систему аксиом, нормальные модели которой — в точности все бесконечные модели из K.
   - Доказать, что если в классе K имеются модели сколь угодно большой конечной мощности, то в K имеется бесконечная модель.

Домашнее задание

7. Построить вывод формулы $\exists x P(x) \to \exists y P(y)$.

8. Построить вывод формулы $\forall x\, Q(x)$ из множества гипотез $\Gamma = \{\forall y (P(y) \to Q(y)),\, \forall z\, P(z)\}$.

9. С помощью допустимых правил вывода доказать выводимость следующих формул:
$$\neg\forall x P(x) \to \exists x\, \neg P(x),$$
$$\exists x\, \neg P(x) \to \neg\forall x P(x).$$

10. Написать систему аксиом в языке теории групп, нормальные модели которой суть

    - все группы порядка 6,
    - все бесконечные группы.

11. Доказать, что не существует системы аксиом в языке теории групп, нормальными моделями которой были бы в точности все конечные группы.