Глава 1

Теория алгоритмов

1.1 Модели вычислимости

1.1.1 Машины Тьюринга

Основные определения

Одноленточная машина Тьюринга работает с неограниченной в обе стороны лентой, разбитой на ячейки:

...					...

В каждой ячейке записана 1 буква *рабочего (ленточного) алфавита* Σ. Предполагается, что в Σ есть специальный символ "пробел"(например, "$\smile$") для обозначения пустых ячеек. Имеется читающе-пишущая головка, которая может обрабатывать содержимое ячейки и перемещаться вдоль ленты. Управляет этим процессом *управляющее устройство* (УУ), которое может находиться в одном из конечного множества состояний Q. УУ исполняет программу, состоящую из команд вида

Команда:	Действие:
$qa \to q'a'$	в состоянии $q \in Q$ обозревая ячейку с буквой $a \in \Sigma$ заменяет букву на $a' \in \Sigma$ и меняет состояние на $q' \in Q$
$qa \to q'a'R$	то же, но сдвигает головку на одну клетку направо
$qa \to q'a'L$	то же, но сдвигает головку на одну клетку налево

В программе содержится ровно по одной команде с каждой возможной левой частью (qa), порядок несущественен. В каждый момент времени исполняется ровно одна команда с подходящей левой частью. В множестве всех состояний Q выделено начальное состояние q_0 (с которого УУ начинает работу) и заключительное – в котором работа УУ прекращается.

Соглашения:

1. При написании программ явно выписывать только "нетривиальные"команды – отличные от $qa \to qa$.

2. Натуральные числа представляются на ленте в унарной записи – число n записывается как $\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ раз}}$.

3. В начале работы головка расположена непосредственно слева от входных данных. После завершения работы результатом является то слово на ленте (последовательность букв между соседними "$\smile$"), на которое указывает головка.

Задача 1. Написать программы для машины Тьюринга:
(а) заменяющую во входном слове из 0 и 1 все буквы 0 на 1 и наоборот; (б) перемещающую 0 через блок единиц $(011\ldots1 \rightsquigarrow 11\ldots10)$;
(в) удвоение блока из 1 ;
(г) обращения слова из 0 и 1 (пишет на выходе буквы слова в обратном порядке).
(д) сортировка нулей и единиц в двоичном слове

Ответ 1. (а)

$$
\begin{array}{llll}
q_0\smile & \to & q_1\smile & R \\
q_1 0 & \to & q_1 1 & R \\
q_1 1 & \to & q_1 0 & R \\
q_1\smile & \to & q_2\smile & L
\end{array}
$$

Состояние q_2 объявляется заключительным.
(в) Указание: использовать дополнительную букву – двойник 1

Задача 2. Написать программы для машины Тьюринга, вычисляющие следующие функции натурального аргумента:
(а) $x + 1$;
(б) $x + y$;
(в)

$$
f(x) = \begin{cases} x - 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{(д) } |x - y|
$$

(е) $2x + 1$;
(ж) $2x$;
(з) $[x/2]$
(е) xy

1.2 Разрешимые и перечислимые множества

Основные определения

Множество $A \subseteq N$ называется ***разрешимым*** (рекурсивным), если его характеристическая функция

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

вычислима.

Множество $A \subseteq N$ называется ***полуразрешимым***, если его полухарактеристическая функция

$$\pi_A(x) \simeq \begin{cases} 1, & x \in A \\ \text{не определено}, & x \notin A \end{cases}$$

вычислима.

Множество $A \subseteq N$ называется ***перечислимым*** (рекурсивно перечислимым), если $A = \emptyset$ или существует вычислимая последовательность f (т.е. вычислимая тотальная функция $f : N \longrightarrow N$), для которой $A = \{f(0), f(1), \ldots\}$. Такое представление множества называется его вычислимым пересчетом.

Определения естественно переносятся на случай $A \subseteq N^k$. При решении задач предполагается использование тезиса Черча.

Задача 1. Проверить разрешимость множеств:
(а) всех четных чисел;
(б) всех простых чисел;
(в) данного конечного множества;
(г) множества всех решений $(x, y) \in N^2$ уравнения $x^2 - y^2 > 5$.
(д) множества всех обратимых $m \times n-$матриц с коэффициентами из N.
Задача 2. Проверить полуразрешимость множеств:
(а) каждого разрешимого множества;
(б) всех пар простых чисел – близнецов;
(в) множества всех чисел, представимых в виде суммы квадратов попарно различных нечетных чисел;
(г) множества тех $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in N^5$, для которых уравнение $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 = 0$ имеет решение в целых числах.
Задача 3. (*) Пользуясь определением перечислимого множества проверить перечислимость множеств из задачи (2).
Задача 4. Доказать исходя из определений: (а) если $A, B \subseteq N$ разрешимы, то $A \cup B, A \cap B, \overline{A}$ также разрешимы.
(б) если $A, B \subseteq N$ полуразрешимы, то $A \cup B, A \cap B$ также полуразрешимы.
(б) если $A, B \subseteq N$ перечислимы, то $A \cup B, A \cap B$ также перечислимы.

Задача 5. (Вариант теоремы Поста) Доказать, что множество $A \subseteq N$ разрешимо тогда и только тогда, когда A и его дополнение $\overline{A}$ полуразрешимы.
Задача 6. Доказать, что для каждого полуразрешимого множества A существует программа, которая работает вечно, время от времени посылая в выходной поток натуральные числа $a \in A$ таким образом, что каждый элемент A когда-нибудь в нем появится.

Задача 7. Доказать, что класс всех полуразрешимых подмножеств N совпадает совпадает с классом всех перечислимых подмножеств N.

Ответ 7. Указание: один из способов доказать перечислимость каждого бесконечного полуразрешимого множества – использовать задачу (6); другой способ содержится в задаче (8).

Задача 8. Доказать, что
(a) проекция перечислимого множества $R \in N^2$ на первую координату является перечислимым множеством.
(б) Каждое полуразрешимое множество может быть получено как проекция некоторого разрешимого множества.
(c) Получить в качестве следствия из (a),(б), что каждое полуразрешимое множество перечислимо.

Ответ 8. Указание: (б) - заметить разрешимость множества

$$\{(x,t) \mid \text{алгоритм вычисления} \pi_A(x) \text{кончает работу за } t \text{ шагов}\}$$

Задача 9. Пусть $f : N \longrightarrow N$ (частичная) вычислимая функция, $\in N$. Доказать:
(a) если перечислимо, то $f()$, $f^{-1}()$ также перечислимы; (б) если разрешимо, а f тотальна, то $f^{-1}()$ также разрешимо;

Задача 10. Говорят, что множество $A \subset N^k$ m-сводится к множеству $B \subset N^l$ (обозначается $A \leq_m B$), если существует тотальная вычислимая функция $f : N^k \longrightarrow N^l$ такая, что $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$. Доказать, что
(a) отношение $\leq_m$ рефлексивно и транзитивно;
(б) если $A \leq_m B$ и B разрешимо (перечислимо), то A тоже разрешимо (перечислимо).

Задача 11. Доказать, что каждое бесконечное перечислимое множество обладает вычислимым пересчетом без повторений.

Задача 12. (a) Доказать, что множество $A \subseteq N$ обладает монотонным вычислимым пересчетом $A = \{f(0), f(1), \ldots\}$, $f(x) \leq f(x+1)$, $i = 0, 1, \ldots$ тогда и только тогда, когда оно разрешимо.
(б) Доказать, что для бесконечных множеств условие монотонности в (a) можно заменить на более слабое: $f(x) \geq g(x), x \in N$ для некоторой неубывающей неограниченной вычислимой функции g.

Задача 13. (Теорема о графике) Доказать, что функция $f : N \longrightarrow N$ вычислима тогда и только тогда, когда ее график $\{(x,y) \mid y = f(x), x \in D(f)\}$ перечислим.

Задача 14. (a) Доказать, что у тотальной вычислимой функции $f : N \longrightarrow N$ график $\{(x,y) \mid y = f(x), x \in D(f)\}$ разрешим. (б) Построить пример нетотальной вычислимой функции $f : N \longrightarrow N$ с разрешимым графиком.

Задача 15. (Теорема об униформизации) Доказать, что каждое перечислимое подмножество $A \subseteq N^2$ содержит в себе график некоторой вычислимой функциии $f : N \longrightarrow N$, определенной во всех точках проекции множества A на первую координату.

1.3 Нумерации

Основные определения

В этом разделе рассматривается семейство нумераций φ_i^m класса всех вычислимых функции в типе данных N, удовлетворяющее условиям 1. – 3. Конструкция таких нумераций извлекается из подходящего вычислимого пересчета всех программ в выбранной модели вычисления.

$\varphi_0^1(x)$	$\varphi_1^1(x)$	$\ldots$	$\varphi_i^1(x)$	$\ldots$
$\varphi_0^2(x,y)$	$\varphi_1^2(x,y)$	$\ldots$	$\varphi_i^2(x,y)$	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
$\varphi_0^m(x_1,\ldots,x_m)$	$\varphi_1^m(x_1,\ldots,x_m)$	$\ldots$	$\varphi_i^m(x_1,\ldots,x_m)$	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

1. В строке номер $m = 1, 2, \ldots$ содержатся все вычислимые функции $f : N^m \longrightarrow N$ и только они.

2. При фиксированном m *универсальная* функция
$$u^m(i, x_1, \ldots, x_m) \simeq \varphi_i^m(x_1, \ldots, x_m)$$
вычислима.

3. Выполняется утверждение обобщенной теоремы о параметризации (s-m-n-теоремы): для каждых $m, n \geq 1$ существует тотальная вычислимая функция $s : N^{m+1} \longrightarrow N$ такая, что
$$\varphi_k^{m+n}(x_1, \ldots x_m, y_1, \ldots, y_n) \simeq \varphi^n_{s(k,x_1,\ldots x_m)}(y_1, \ldots, y_n)$$
при всех $k, x_1, \ldots x_m, y_1, \ldots, y_n \in N$.

1.3.1 Позитивные факты

Задача 1. Доказать, что существует тотальная вычислимая функция $h : N^2 \longrightarrow N$ такая, что $\varphi^1_{h(i,j)}(x) \simeq \varphi_i^1(x) + \varphi_j^1(x)$.

Ответ 1. Указание: установить вычислимость $f(i, j, x) \simeq \varphi_i^1(x) + \varphi_j^1(x)$; положить $h(i, j) = s(k, i, j)$, где k – номер f.

Задача 2. Доказать, что существует тотальная вычислимая функция $h : N^2 \longrightarrow N$ такая, что $\varphi^1_{h(i,j)}(x) \simeq \varphi_i^1(\varphi_j^1(x))$.

Задача 3. Доказать, что существует тотальная вычислимая функция $h : N^3 \longrightarrow N$ такая, что
$$\varphi^1_{h(i,j,k)}(x) \simeq \varphi_k^1(x) ? \varphi_i^1(x) : \varphi_j^1(x) \qquad \text{(условная операция в C).}$$

Задача 4. Доказать, что существует тотальная вычислимая функция $h : N^2 \longrightarrow N$ такая, что
$$\varphi^1_{h(i,j)}(x) \simeq \; \{$$
$$while(\varphi_i^1(x) > 0) \;\; x = \varphi_j^1(x);$$
$$return\ x;$$
$$\}$$

Задача 5. (Свойство главности нумерации $\varphi^1_i, i = 1, 2, \ldots$) Пусть у нумерации $\psi_0(x), \psi_1(x), \ldots$ некоторого семейства вычислимых функций универсальная функция $v(i, x) \simeq \psi_i(x)$ вычислима (такие нумерации называются вычислимыми). Доказать, что существует тотальная вычислимая функция h такая, что $\psi_i(x) \simeq \varphi^1_{h(i)}(x)$.
Задача 6. Пусть $g : N \longrightarrow N$ фиксированная вычислимая функция, ζ – нигде не определенная функция, $A \subseteq N$ - перечислимое множество. Доказать, что существует тотальная вычислимая функция h такая, что

$$\varphi^1_{h(i)} = \begin{cases} g, & i \in A, \\ \zeta, & i \notin A. \end{cases}$$

Ответ 6. Указание: установить вычислимость функции

$$f(i, x) \simeq \begin{cases} g(x), & i \in A, \\ \text{не определено}, & i \notin A; \end{cases}$$

положить $h(i) = s(k, i)$, где k – номер f.
Задача 7. Доказать, что каждое перечислимое множество $A \subseteq N$ m-сводится (см. задачу (10) из предыдущего раздела) к множествам
(а) $\{i \mid \varphi^1_i(i) \text{ определено}\}$;
(б) $\{i \mid \varphi^1_i(5) = 25\}$;
(в) $\{i \mid \varphi^1_i(i) = 99\}$;
(г) $\{i \mid \varphi^1_i \text{ тотальна}\}$.
(д) Доказать, что каждое коперечислимое множество m-сводится к
$\{i \mid \varphi^1_i \text{ нигде не определена}\}$.
Ответ 7. Указание: воспользоваться задачей (6).

1.3.2 Негативные результаты

Задача 8. (а) Доказать, что функция $f(x) \simeq \varphi^1_x(x) + 1$ вычислима, но не имеет вычислимых тотальных продолжений.
(б) Доказать, что множество $K = \{x \mid \varphi^1_x(x) \text{ определена}\}$ перечислимо, но не разрешимо.
(в) Доказать, что множество $STOP = \{(i, x) \mid \varphi^1_i(x) \text{ определена}\}$ перечислимо, но не разрешимо.
Ответ 8. Указание: (а) попытаться найти значение $g(k)$, где g - кандидат в вычислимое тотальное продолжение, а k – его номер;
(б) исходя из предположения о разрешимости K предложить алгоритм вычисления функции f из (а).
Задача 9. (а) Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} 100, & \varphi^1_x(x) = 59, \\ 59, & \text{иначе}, \end{cases}$$

не вычислима.
(б) Доказать, что множество $\{x \mid \varphi^1_x(x) = 59\}$ перечислимо, но не разрешимо.

Ответ 9. Указание:(а) предположить, что f вычислима, и попытаться найти значение $f(k)$, где k – номер f.
Задача 10. Пусть фиксирована машина Тьюринга (или М.Н.Р. или другое вычислительное устройство) для вычисления универсальной функции $u^1(i,x)$ и $T(i,x)$ – время (число шагов) ее работы на входе i,x.
(а) Проверить, что (1) функция T вычислима; (2) ($T(i,x)$ определено) $\Leftrightarrow$ ($\varphi_i(x)$ определено) ; (3) $\{(i,x,t) \mid T(i,x) \leq t\}$ разрешимо.
(б) Пусть $h : N \longrightarrow N$ тотальная вычислимая функция. Доказать, что тотальная функция

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_x^1(x) + 1, & \text{если } T(i,x) \leq h(x), \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

вычислима, но не вычислима за время h, т.е. $\forall i \exists x (f = \varphi_i \rightarrow T(i,x) > h(x))$.
(в) Построить тотальную вычислимую функцию со значениями 0,1 , которая также не вычислима за время h в смысле задания (б).
Задача 11. (Теорема Райса) Пусть $\mathcal{P}$ -семейство одноместных вычислимых функций, $\mathcal{P} \neq \emptyset$ и существует одноместная вычислимая функция $f \notin \mathcal{P}$. Доказать, что его индексное множество $\{i \mid \varphi_i^1 \in \mathcal{P}\}$ неразрешимо.
Ответ 11. Указание: воспользоваться задачей (6); в качестве A взять произвольное неразрешимое перечислимое множество.
Задача 12. Доказать неразрешимость множеств:
(а) $\{i \mid \varphi_i^1$ тотальна$\}$;
(б) $\{i \mid \varphi_i^1$ нигде не определена$\}$;
(в) $\{i \mid \varphi_i^1(5) = 25\}$;
(г) $\{i \mid \varphi_i^1(5)$ определено$\}$;
(д) $\{i \mid \varphi_i^1$ монотонна$\}$;
(е) $\{i \mid \varphi_i^1$ тотальна$\}$;
Ответ 12. Указание: воспользоваться задачей (11).
Задача 13. Доказать неперечислимость множеств:
(а) $\{i \mid \varphi_i^1(5)$ не определено$\}$;
(б) $\{i \mid \varphi_i^1(5)$ не определено или $\neq 25\}$;
(в) $\{i \mid \varphi_i^1$ не принимает значений $> 25\}$;
(г) $\{i \mid \neg\exists x(\varphi_i^1(x) = x)\}$;
Ответ 13. Указание: воспользоваться задачей (11) и теоремой Поста.
Задача 14. Доказать неразрешимость множеств:
(а) $\{(i,j) \mid \varphi_i^1$ есть продолжение $\varphi_j^1\}$;
(б) $\{(i,j) \mid D(\varphi_i^1) \cup D(\varphi_j^1) = N\}$;
(в) $\{(i,j) \mid D(\varphi_i^1) \cap D(\varphi_j^1) = \emptyset\}$;
(г) $\{(i,j) \mid \varphi_i^1, \varphi_j^1$ тотальны и $\forall x(\varphi_i^1(x) = 2\varphi_j^1(x))\}$;
Ответ 14. Указание: подобрать неразрешимое можество $A \subseteq N$, которое m-сводится к рассматриваемому.