В. А. Любецкий, В. Г. Кановей

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

АБСОЛЮТНО НЕРАЗРЕШИМЫЕ КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ ВУЗОВ

2-е издание

Рекомендовано Учебно-методическим отделом высшего образования в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по естественнонаучным направлениям

Книга доступна в электронной библиотеке biblio-online.ru, а также в мобильном приложении «Юрайт.Библиотека»

Москва ▪ Юрайт ▪ 2019

УДК 510.22(075.8)
ББК 22.12я73
Л93

***Авторы*:**

Любецкий Василий Александрович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической логики и теории алгоритмов Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова; заведующий лабораторией Института проблем передачи информации имени А. А. Харкевича РАН, главный научный сотрудник;

Кановей Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института проблем передачи информации имени А. А. Харкевича РАН.

Любецкий, В. А.

Л93 Теория множеств: абсолютно неразрешимые классические проблемы : учебное пособие для вузов / В. А. Любецкий, В. Г. Кановей. — 2-е изд. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 357 с. — (Высшее образование). — Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-534-10390-8

Пособие посвящено изложению основ современной теории множеств: аксиоматики, конструктивности по Гёделю, форсинга по Коэну. На этой основе изложены главные результаты, связанные с классическими проблемами дискриптивной теории множеств.

Соответствует актуальным требованиям Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования и профессиональным требованиям.

Для студентов-математиков, аспирантов, преподавателей, научных работников.

УДК 510.22(075.8)
ББК 22.12я73

ISBN 978-5-534-10390-8

Оглавление

Предисловие ко 2-му изданию

В качестве такого предисловия авторам показалось уместным поместить вводную лекцию одного из них (ВАЛ) в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова для студентов 1-го курса.

1. Математика — система умственных представлений, конструкций и процессов, которые мы называем здесь понятиями. Одни понятия могут быть разъяснены через другие, но ясно, что какие-то из них первичны и свойственны нашему сознанию до любых формулировок и определений (по крайней мере, математических). Эти первичные понятия внутренне присущи, имманентны психике. Два из них — понятие биекции и умственный процесс прибавления «единицы» (наращивания уже созданной цепи следующим типовым звеном).

Биекция понятна с самого раннего возраста и неявно присутствует в многочисленных бытовых ситуациях. Например, в правильном гардеробе имеется *биекция* между всеми сданными пальто и всеми выданными номерками, чтобы работник выдавал пальто по номерку без конфликта. Приведем менее бытовые примеры.

А. Найти целые числа (это суть 0, ± 1, …, $\pm n$, …), удовлетворяющие уравнению $x \cdot y = 2(x + y)$. Совсем просто перейти к нахождению натуральных чисел $n = 1, 2, 3, \ldots$, удовлетворяющих уравнению. Это значит: найти все прямоугольники, у которых площадь равна периметру. В таком прямоугольнике «единичный» отрезок, измеряющий длину, уложится на сторонах $2(x + y)$ раз, а «единичный» квадрат с «единичной» стороной, измеряющий площадь, уложится в теле прямоугольника $x \cdot y$ раз. Рассмотрим полосу из квадратов, прилегающих к сторонам. Отрезки и квадраты биективны, кроме как на углах. Для их биекции нужно еще 4 квадрата, и таковые могут занять место лишь только внутри полосы. Это можно сделать ровно двумя способами, откуда получим ровно два решения (4, 4) и (3, 6). Нетривиальная часть состоит в осознании этой биекции. В задачке не нужно пересчитывать отрезки или квадраты, т. е. числа по существу не нужны.

В. Пусть отрезок $[0, 1]$ равен объединению его подмножеств X_α, т. е. $[0, 1] = \bigcup_{\alpha \in Y} X_\alpha$. Может ли быть, что все X_α небиективны с отрезком? Легко заметить, что X_α можно считать попарно непересекающимися; это более наглядно, хотя не влияет на решение. Тогда пишут $[0, 1] = \bigsqcup_{\alpha \in Y} X(\alpha)$, где знак $\bigsqcup$ означает такое (дизъюнктное) объединение. Для одного слагаемого равенство очевидно невозможно. Если слагаемых столько, что α пробегает все точки отрезка (т. е. множество индексов Y биективно с отрезком), то равенство верно при естественном выборе слагаемых. Если Y конечно или счетно, то равенство невозможно. Докажем это для двух слагаемых, аналогично для большего числа слагаемых. Пусть $[0, 1] = X_1 \bigsqcup X_2$. Совсем просто показать, что $[0, 1]$ биективен с квадратом $[0, 1]^2$ (с единичной стороной). Эта биекция переносит X_1 и X_2 в квадрат (полученные множества обозначим теми же буквами), т. е. $[0, 1]^2 = X_1 \bigsqcup X_2$. Приведем нетривиальное рассуждение (до этого было тривиально): на каждом перпендикуляре, имеется хотя бы одна точка из X_1 или это не так (и тогда имеется перпендикуляр, на котором находятся точки только из X_2). Далее опять тривиально. В первом случае в X_1 содержится подмножество биективное с $[0, 1]$ (с каждого перпендикуляра берем по точке) и само X_1 биективно с частью $[0, 1]$, тогда X_1 и $[0, 1]$ биективны[1]. Аналогично для X_2. Решения обеих задач наглядны, геометричны и это родовое свойство теории множеств. В равной мере для теории множеств типичны эффективные вычисления (почти как алгоритмические, компьютерные вычисления с числами или вычисления в теории меры).

2. Прибавление/добавление «единицы» — внутренне присущее психике, имманентное понятие. На чем кончается такой процесс? Представим себе, что после натуральных чисел $0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$ располагается еще число ω_0, и с него, как с 0, считаем дальше $\omega_0 + 1$, $\omega_0 + 2, \ldots, \omega_0 + n, \ldots$, за этими числами располагается еще число $\omega_0 \cdot 2$, и, как с 0, считаем дальше $\omega_0 \cdot 2 + 1, \omega_0 \cdot 2 + 2, \ldots$ и так далее, никогда не останавливаясь. (Запись $\omega_0 \cdot 2$ читается: сумма ω_0 два раза.) Все так получающиеся числа называют *ординалами*, а их совокупность — *ординальным рядом On* (по аналогии с натуральным рядом). Кто-то заметит, что в *On*, кроме добавления 1, используется еще переход к пределу по *строго возрастающей цепочке меньших ординалов*. Например, $\omega_0 = \lim_{n<\omega_0} n$. В *On* много строго возрастающих цепочек, но нет ни одной строго убывающей. Последнее не совсем просто доказывается, но имеет важное следствие: совокупность *On* вполне упорядочена. Действительно, пусть $\varnothing \neq X \subseteq On$ (здесь говорится: подмножество X непустое). Тогда $\exists x \in X \forall y \in X (x \leq y)$; сначала докажем чуть меньше: $\exists x \in X \forall y \in X \neg(y < x)$ (покажите на примерах разницу этих утверждений). Возьмем любое $x_1 \in X$, оно искомое или

[1] Биекция между X и частью Z в Y, $Z \subseteq Y$, называется *инъекцией* X в Y. Докажите: если существуют инъекции X в Y и Y в X, то X и Y биективны. Доказательство несколько длинное, но чисто техническое.

нет, во втором случае существует $x_2 < x_1$ и т. д. Образуется убывающая цепочка в X, она же в On, что невозможно. В пособии[1] доказано

$$\forall \alpha, \beta \in On\ (\alpha = \beta \vee \alpha < \beta \vee \beta < \alpha),$$

где знак $\vee$ означает «или», т. е. порядок линейный, что сразу влечет линейность и вполне упорядоченность On. Интересно, что понятие ординала α (как *множества*) можно определить короткой формулой:

$$\forall y \in x (y \subseteq \alpha),\ \ \forall y \in \alpha \forall z \in y (z \subseteq \alpha),$$

где первая запятая означает «и» (часто пишут знак $\wedge$). Тогда *натуральный ряд* получает естественное определение как множество — первый счетный ординал, обозначаемый ω_0. Отсюда сразу следует, что каждый его элемент («натуральное число») $\alpha \in \omega_0$, $\alpha \neq \varnothing$ имеет непосредственно предшествующий ординал, обозначаемый $\alpha - 1$ (докажите). Ординал $\varnothing$ играет роль нуля.

Короткой формулой трудно записать нетривиальное понятие, а длинную формулу трудно фактически выписать и понять, поэтому длинные формулы, по сути, — абстрактные объекты, можно считать, что они натуральные числа. Что мы знаем о натуральном числе 10^{1000}, превосходящем характеристики Вселенной, — только некоторые умственные идеи (например, что оно делится на 10).

Любая строго возрастающая последовательность рациональных чисел, сходящаяся к 1, биективна с сохранением порядка с ординалом ω_0. Биекцию, которая сохраняет какое-то отношение(ия), называют *изоморфизмом*. Между 1-м и 2-м членами этой последовательности вставим аналогичную последовательность, сходящуюся ко 2-му члену. Полученная последовательность изоморфна $\omega_0 \cdot 2$. Легко заметить, что любой счетный (как множество) ординал изоморфен некоторой последовательности строго возрастающих рациональных чисел в отрезке [0, 1], и наоборот.

Это приводит к замечательному способу индивидуального описания важных множеств. Пусть дано любое счетное множество R горизонтальных рациональных отрезков (т. е. с рациональными концами) в квадрате $[0, 1]^2$. Такое множество называется *решетом* и легко задается вещественным числом (как?). По решету R определяются два множества $C(R)$ и $A(R)$: $x \in C(R) \Leftrightarrow$ «перпендикуляр в точке x, пересеченный с R, вполне упорядочен, т. е. является ординалом» и $x \in A(R) \Leftrightarrow$ «перпендикуляр в точке x, пересеченный с R, не вполне упорядочен, т. е. не является ординалом». Так определенные множества обладают замечательными свойствами.

---

[1] *Любецкий В. А.* Элементарная математика с точки зрения высшей. Основные понятия : учебное пособие для вузов. 3-е изд. Москва : Издательство Юрайт, 2019. С. 349.

Итак, множество X можно задать формулой вида $X = \{x \mid \varphi(x, y_1, ..., y_n)\}$, где $\varphi(x)$ — свойство того, что обозначено x, т. е. $\varphi(x)$ — формула, включающая знак x, а y_1, ..., y_n — какие-то вспомогательные множества («параметры»). Без параметров так задаются немногие интересные множества, а формула с параметрами требует объяснения смысла параметров — без этого само X остается необъясненным. Альтернативный вариант — задание X решетом R.

3. Множества можно организовать таким образом, что каждое новое множество состоит из множеств, появившихся на свет/рожденных «раньше». Это делается процессом, очень похожим на описание ординального ряда On. А именно, зададим последовательность множеств: сначала это пустое множество (аналог нуля, обозначим $\hat{L}_0 = \{\varnothing\}$); если процесс дошел до ординала α, то образуем множество $\hat{L}_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \hat{L}_\beta$ — объединение всех ранее образованных множеств $\hat{L}_\beta$ на всех шагах $\beta < \alpha$ и к нему добавим все множества вида $\{x \in \hat{L}_\alpha \mid \varphi(x, y_1, ..., y_n)\}$, где $y_1, ..., y_n \in \hat{L}_\alpha$ (т. е. y_1, ..., y_n ранее образованы) и φ — любая формула, в которой все кванторы ограничены[1] к $\hat{L}_\alpha$, т. е. ограничены опять-таки к ранее образованным множествам (которые родились до момента/шага α). Обозначим $L_\alpha = \hat{L}_\alpha \cup \{\{x \mid \varphi(x, y_1, ..., y_n)\} \mid \varphi; y_1, ..., y_n \in \hat{L}_\alpha\}$. Очень естественный процесс, похожий на математическую индукцию, которая идет по части ординалов, только до ω_0. В результате получим совокупность $L = \bigcup\limits_\alpha L_\alpha$ — мир всех формульных множеств (или, говорят, *гёделевский универсум*). Идея Гильберта состояла в том, что никаких множеств, кроме формульно-задаваемых (формульно-определяемых), не бывает. Гёдель осуществил эту идею, только добавив ординалы, которые не-формульные множества. Гильбертом руководила идея, что множества нужны для наглядности, а фактически работа идет только с формулами. На современном языке это означает — работать в универсуме L.

Вещественные числа, которые принадлежат L, называются *конструктивными* (по Гёделю), их множество *обозначают* $\boldsymbol{L}^+$. Нетрудно доказать, что $\boldsymbol{L}^+ \subseteq L_{\omega_1}$, где ω_1 — *первый несчетный* ординал (также как ω_0 — *первый счетный* ординал). Отсюда очевидно, что $\boldsymbol{L}^+$ биективно с ω_1. Ровно в этом состоит знаменитая гипотеза континуума Г. Кантора, первая в знаменитом списке из 23 фундаментальных проблем Гильберта (если $\boldsymbol{L}^+$ — это все вещественные числа).

4. Принципиально другая операция состоит в образовании множества $\mathcal{P}(X)$ всех подмножеств множества X. А именно, $\mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subseteq X)\}$. Эта операция порождает нечто загадочное: множество $\mathcal{P}(X)$ образовано, но ничего неизвестно о его элементах (кроме тривиального свойства $Y \subseteq X$).

[1] Это значит, что кванторы имеют вид $\exists x \in \hat{L}_\alpha$ или $\forall x \in \hat{L}_\alpha$.

5. Идея Коэна — совокупность L можно раздуть вширь (не трогая ординальный ряд — позвоночник в мире множеств), добавив к L много подмножеств любого множества, и в частности очень простого — натурального ряда ω_0. Это будут подмножества, о которых ничего не известно, *случайные* подмножества (они определены в пункте 8). Их можно добавить сколько угодно, так что подмножества ω_0 или, что то же самое, вещественные числа будут биективны с каким угодно ординалом (с тривиальными оговорками).

6. Таким образом, во второй половине XX в. на новом уровне возникла ситуация, которая обсуждалась еще Аристотелем: имеется разница между $\exists x$ и $\forall x$. Действительно, естественно понимать $\exists x$ как $\exists x \in L$, так как L состоит из формульно-определимых множеств, и понимать $\forall x$ как $\forall x \in V$, где V — совокупность всех множеств, включая случайные, т. е. для всех x, какие ни есть. Такое V называется *универсумом* (множеств). Но этому благому делу мешает связь кванторов $\exists x$ и $\forall x$, докажите: $[\exists x \varphi(x)] \Leftrightarrow [\neg\forall x \neg\varphi(x)]$. Это вытекает из связи: $(\neg\neg\varphi) \Leftrightarrow \varphi$ (*). Проблема эквивалентности (*) уходит в вопрос, каков смысл связок. Все связки, кроме $\neg\varphi$, понятны на общекультурном (например, русском) языке и соответственно означают: «$\exists x$ = предъявить x», «$\forall x$ = для всякого x», «$\vee$ = или», «$\wedge$ = и». Но что означает «НЕ»? Обычное, из школьной математики понимание $\neg\varphi$ такое: «допустим φ и придем к противоречию». Ясно, что тут возникают трудности.

7. Слово «неразрешимая» имеет много смыслов.

А. Каждая теория в анализе, алгебре, геометрии и т. д. имеет некоторый набор знаков и формул, которые позволяют записать все ее суждения, как истинные, так и ложные. Такой набор знаков и формул называют (математическим) *языком*. Сформулируйте языки для привычных Вам теорий, начиная со школьной планиметрии. Можно ли построить алгоритм (компьютерную программу), который(ая) по входу φ — суждению в таком языке, выдает 1 или 0 в зависимости от истинности φ в этой теории. Это — вопрос об *алгоритмической разрешимости/неразрешимости*. В нем «истинность» можно уточнять по-разному. Например, можно сформулировать аксиомы и правила вывода (= правила, которые порождают/образуют новые суждения из уже ранее полученных). Вместе язык, аксиомы и правила вывода называют (в математическом смысле) *теорией*. Все суждения, порождаемые в данной теории T, называют *выводимыми* в T. Выводимость похожа на математическую индукцию или на определения On и L. Можно спросить об алгоритме, который выдает 1 или 0 в зависимости, от выводимости формулы φ в теории T (φ и T подаются на вход алгоритма). Если ответ 1, то всегда имеется тривиальный алгоритм, который находит сам вывод для φ: нужно просто перебирать все выводы, пока не дойдем до вывода, который оканчивается на φ. Конечно, вопрос о существовании/не-существовании алгоритма можно отнести и ко многим важным отдельным вопросам. Например, 10-я проблема Гильберта из упомянутого списка проблем спрашивает, существует ли алгоритм, который определяет, имеет ли решение произвольное алгебраическое диофантово уравнение. Большое значение имеют все более быстрые алгоритмы умножения натуральных чисел.

B. Можно не спрашивать об алгоритме, как в подпункте А, а просто искать суждение φ, для которого φ и $\neg\varphi$ не выводимы в данной теории T (само собой, что одно из них истинно). Такие суждения называют *неразрешимыми* относительно T, они известны в обычной арифметике и во всех обычных теориях. Например, для планиметрии без аксиомы о параллельных это — суждение, утверждающее существование параллельной прямой. Для арифметики или планиметрии нет ничего удивительного в неразрешимых суждениях, так как очевидно имеется мир вне этих теорий, который не описывается ими. Например, для арифметики и планиметрии таким миром являются вещественные числа.

Напротив, в естественных теориях вещественных или комплексных чисел для любого суждения φ выводимо φ или $\neg\varphi$, т. е. истинное суждение можно отличить от ложного с помощью конкретного алгоритма (слишком сложного для компьютера). Такие теории называют *разрешимыми*. К ним относится и теория p-адических чисел. В этих теориях нельзя записать утверждение о своей непротиворечивости.

Обнаружена теория, относительно которой известны неразрешимые суждения и на ней кончается весь математический мир. Это — теория множеств ZFC. Удивление перед этой ситуацией усиливается тем, что среди этих неразрешимых относительно ZFC суждений присутствуют очень простые и естественные суждения о вещественных числах или о простых множествах вещественных чисел, которые возникли, например, в математическом анализе или в чисто прикладных областях. Такие неразрешимые суждения иногда называют *абсолютно неразрешимыми*. Эти суждения не аналогичны суждению «теория ZFC непротиворечива», которое также неразрешимо относительно ZFC (здесь его можно записать). Кто-то может подумать, что абсолютно неразрешимые суждения возникают в связи с изъянами в самой теории ZFC, но это не так. Они остаются неразрешимыми в любой ее естественной переформулировке. Конечно, вопрос, есть ли мир вне ZFC, не является простым. При его обсуждении можно исходить из того, что доказуемым должно быть все, что естественнонаучно верно, а иные суждения излишни и не должны быть выводимыми.

8. Пусть речь идет о пространствах вещественных чисел $\mathbb{R}$ или $\mathbb{R}^n$. Кольцом множеств в них называется наименьшее множество, которое включает открытые и замкнутые множества и зам-

кнуто относительно операций счетного объединения и счетного пересечения. Множество, входящие в такое кольцо, называют *борелевским*. Особенность борелевских множеств в том, что для них отсутствуют естественные абсолютно неразрешимые суждения. Каждое борелевское множество однозначно кодируется вещественным числом (как?). Борелевское множество B с кодом r записывают B_r.

Легко видеть, что подмножества в ω_0 и вещественные числа $\mathbb{R}$ изоморфны. Обещанное определение: число x из $\mathbb{R}$ называется *случайным* (по Соловею), если неверно, что $x \in B_r$, где $r \in \boldsymbol{L}^+$ и B_r меры нуль. Смысл определения: случайное число x не может быть локализовано никаким формульно-определимым (и в этом смысле «простым») множеством B_r. Невольно возникает ассоциация с физикой.

9. Если счетные объединения и счетные пересечения заменить несчетными, то возникает принципиально другая ситуация. Примером в этом смысле несчетной операции является обычное проектирование из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, где $m < n$, и, в частности, проектирование из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}$. А-*множеством* называется проекция борелевского множества, а СА-*множеством* называется дополнение до всего $\mathbb{R}^m$ любого А-множества. A_2-*множеством* называется проекция СА-множества, а CA_2-*множеством* — его дополнение. Все множества, образованные последовательным применением операций проектирования и дополнения, называются *проективными*. A_2- и CA_2-множества и следующие за ними проективные множества — как раз те, для которых некоторые естественные общематематические вопросы абсолютно неразрешимы. Заметим: борелевское множество — то и только то, которое одновременно А- и СА-множество (попробуйте доказать).

Задачи. 1. Пусть $[0, 1] = \bigcup\limits_{\alpha \in Y} X_\alpha$. Может ли быть, что все X_α небиективны с отрезком? Докажите для случая конечного (≥ 3) или счетного числа слагаемых.

2. Укажите биекцию между $[0, 1]$ и $[0, 1]^2$; между $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^2$.

3. Докажите: если существуют инъекции X в Y и Y в X, то X и Y биективны.

4. Покажите на примерах разницу между утверждениями $\exists x \in X \forall y \in X (x \leq y)$ и $\exists x \in X \forall y \in X \neg (y < x)$.

5. Докажите: любой счетный (как множество) ординал изоморфен некоторой последовательности строго возрастающих рациональных чисел в отрезке $[0, 1]$, и наоборот.

6. Определите кодировку решета вещественным числом.

7. Укажите решета R, для которых $A(R)$ равно отрезку $[0, 1]$ или полуинтервалу $[0, 1)$.

8. Для какого наименьшего α выполняется $\omega_0 \in L_\alpha$?

9. Докажите: $\boldsymbol{L}^+ \subseteq L_{\omega_1}$, где ω_1 — первый несчетный ординал.

10. Является ли множество иррациональных чисел борелевским? Приведите другие примеры борелевских множеств, кроме откры-

тых, замкнутых и рациональных чисел. Приведите примеры открытых и замкнутых множеств в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^n$.

11. Определите кодировку борелевских множеств вещественными числами.

12. Укажите биекцию между $\mathcal{P}(\omega_0)$ и вещественными числами $\mathbb{R}$.

13. Представьте проекцию множества B как объединение множеств, не используя результат проектирования.

14. Полезно определить в теории множеств *структуры* (множества с операциями и отношениями): $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \subseteq \mathbb{H} \subseteq \mathbb{O}$, где слева направо: натуральные, целые, рациональные, вещественные и комплексные числа, кватернионы (некоммутативное кольцо с делением, т. е. тело) и числа Кэли (некоммутативное и неассоциативное кольцо с однозначным делением, альтернативная алгебра); в этом стройном ряду, где место p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$? Загляните в книгу[1].

Проблемы: приведите пример А-множества, которое не борелевское; СА-множества, которое не А-множество и не борелевское. И аналогично: укажите проективное множество следующего уровня, не принадлежащее всем предыдущим уровням, тем самым, будет показано, что все уровни непустые. Интуитивно сложность множества с возрастанием уровня увеличивается. Как разумно определить сложность проективного множества?

Проблемы: понятие локализации — одно из центральных в математике. Пусть K — кольцо и p — простой идеал в булевой алгебре $B(K)$ центральных идемпотентов самого K. Обозначим $X(K)$ множество всех таких p. *Локализацией* называется фактор-кольцо $K_p = K/(p \cdot K)$, локализация K_p обычно существенно проще исходного кольца K (приведите примеры). Определим сюръекцию $[k]_p : K \to K_p$, $[k]_p$ — класс эквивалентности элемента $k \in K$ по модулю $p \cdot K$. *Сюръекцией* называется отображение f любого множества X «на» любое множество Y, т. е. $\forall y \in Y \exists x \in X (y = f(x))$. Отметим, что для каждого $k \in K$ имеется функция $k(p) = [k]_p : B(K) \to \bigsqcup\limits_{p \in X(K)} K_p$ с аргументом $p \in X(K)$, которая обладает важными свойствами и называется *сечением*. Так что кольцо K представляется пространством $C(K)$ непрерывных функций на множестве $X(K)$. А именно, $k \mapsto k(p) \in C(K)$.

Для каких формул $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ в естественном языке колец выполняются импликация[2] $(K \models \varphi(k_1, \ldots, k_n)) \Rightarrow (\{K_p\} \models \varphi([k_1]_p, \ldots, [k_n]_p))$ или обратная импликация. Более содержательный вопрос связан с другим замечательным понятием. Класс колец $\mathcal{K}^*$ называется *модельным компаньоном* для класса колец $\mathcal{K}$, если $\forall K \in \mathcal{K} \exists R \in \mathcal{K}^* \ (K \subseteq R)$

[1] *Кириллов А. А.* Что такое число? М. : Издательство МЦНМО, 2019.

[2] Ее правая часть говорит: $\forall p \in X(K) \ (K_p \models \varphi([k_1]_p, \ldots, [k_n]_p)$. Знак $\models$ означает: в K_p истинно (выполняется) φ.

и $\forall R \in \mathcal{K}^* \; \exists K \in \mathcal{K} \; (R \subseteq K)$, и $\forall K, R \in \mathcal{K}^* (K \subseteq R \Rightarrow K \prec R)$. Здесь $\prec$ означает: всякая система алгебраических уравнений с коэффициентами из K, разрешимая в R, разрешима в K (приведите примеры). Пусть все K_p — модели какой-то теории T с модельным компаньоном T^*. Говорят: «кольцо K с T-локализациями». Пусть $\mathcal{K}$ — класс колец с T-локализациями, а $\mathcal{K}^*$ — класс колец с T^*-локализациями. При каких условиях на T и $\mathcal{K}$ класс $\mathcal{K}^*$ аксиоматизируем и/или $\mathcal{K}^*$ — модельный компаньон для $\mathcal{K}$?

В результате изучения этой книги школьник, студент, аспирант, научный сотрудник и просто интересующийся математикой или философией науки должен:

знать

- фундаментальные понятия и современные достижения математики в основополагающей области — современной теории множеств;
- ее фундаментальные основы, то, на что опирается математика, как и, возможно, представления о нашем мышлении, лежащем в основе математики;
- связь теории множеств и основ математики, что часто остается скрытым при самом глубоком изучении отдельных математических предметов, замкнутых в себе;

уметь

- доказывать современные результаты в теории множеств;
- задуматься о загадке абсолютно неразрешимых проблем в математике (не путать их с алгоритмически неразрешимыми или неразрешимыми в заданных рамках отдельных теорий);
- искать новые формулировки абсолютно неразрешимых проблем в математике;

владеть

- общематематическим языком теории множеств, одновременно строгими и наглядными представлениями, характерными для теории множеств;
- навыками решения задач в теории множеств, которые подготовят для самостоятельной научной работы в этой области;
- представлением о классических понятиях и теоремах в теории множеств.

Авторы благодарят редактора П. А. Макарова, много сделавшего для улучшения текста книги.

Предисловие к 1-му изданию

В математике XX в. произошли три принципиальных открытия, которые, по-видимому, не получили широкой известности среди математиков и философов. Эти открытия являются основным предметом изложения в нашей книге.

1. Оказалось возможным разумное определение случайного вещественного числа, а именно: число называется *случайным*, если не существует множества вещественных чисел (обычной лебеговой) меры нуль, содержащего x, $x \in B$. При этом нужно фиксировать, каким множествам B разрешено участвовать в этом определении; если, например, всем одноэлементным множествам, то все числа будут неслучайными тривиальным образом. Можно определить это семейство так, что множество **Ran** всех случайных вещественных чисел имеет разумные ожидаемые свойства, и в частности, его дополнение имеет меру нуль, но некоторые числа, конечно, останутся неслучайными (рациональные и другие). Это определение основано на том, что некоторые множества проще описать, чем индивидуальные числа, даже входящие в эти множества. Скажем, интервалы с рациональными концами, очевидно, проще описываются, чем некоторые входящие в них числа.

2. Оказалось, что существуют простые и естественные вопросы о вещественных числах, которые *не имеют ответа абсолютным образом*, т.е. не относительно каких-то заранее разрешенных средств рассуждения, построения и пр., а относительно всех наперед мыслимых способов рассуждения. Эта ситуация радикально отличается от широко известной теперь алгоритмической или арифметической неразрешимости некоторых вопросов. Сюда включается и открытие того, что *уже описаны все мыслимые способы рассуждения*. Это кажется настолько удивительным, что хочется добавить: это так, по крайней мере, на сегодняшний день.

3. Оказалась верной старая идея Гильберта, что мир всех множеств может состоять из множеств, *каждое из которых имеет индивидуальное описание своим свойством*, т. е. формулой на некотором раз и навсегда фиксированном простом языке с конечным числом знаков (языке, связанном с именами Цермело, Френкеля и др.). Иными словами, всякое множество имеет вид $\{x : \varphi(x)\}$, где φ — формула в этом языке. Эту идею необходимо подправить (Гёдель): расширить язык бесконечным числом совершенно однотипных символов (ординалов). Обозначим $\boldsymbol{L}^+$ все так определяемые веще-

ственные числа (каждое число — также множество). Возникают два критически важных непересекающихся множества вещественных чисел, $\boldsymbol{L}^+$ и $\mathbf{Ran}$. В каком-то отдаленном смысле их можно сравнить с множествами алгебраических и трансцендентных чисел.

Современную теорию множеств трудно изложить иначе, чем в нескольких книгах, каждая из которых посвящена одному из ее наиболее актуальных разделов. Желательно, чтобы эти книги можно было читать независимо друг от друга и при этом от читателя не требовалось никакой специальной подготовки, по крайней мере в части понимания основного материала этих книг.

Следуя этому плану, мы опубликовали первую книгу нашей серии «Начала дескриптивной динамики» [18], посвященную одному из важных разделов современной теории множеств — дескриптивной теории множеств; затем — вторую книгу, «Борелевские и проективные множества» [19], посвященную дескриптивной теории множеств в более широком плане, чем в работе [18]; и настоящую книгу, излагающую теорию борелевских и проективных множеств, основной раздел дескриптивной теории множеств. Из этих трех книг, вероятно, первой стоит читать эту книгу, а затем — на выбор работу [18] или [19].

Данная книга в целом посвящена более трудным аспектам дескриптивной теории множеств, а именно, классическим проблемам этой теории, восходящим к работам классиков математики 1920-х — 1950-х гг. Однако анализ этих проблем потребует от нас выхода в современную аксиоматическую теорию множеств, т. е. за рамки классической дескриптивной теории множеств — с точки зрения как объектов и понятий, так и используемой техники. Поэтому нашу книгу можно использовать и в роли введения в современную аксиоматическую теорию множеств, конструктивность по Гёделю и метод форсинга (вынуждения) по Коэну.

Уместно сказать несколько общих слов о современной теории множеств. Эта область математики давно утратила тот несколько необычный, отчасти философский, характер, который она имела в годы жизни Кантора. Начиная с 1910-х гг. она стала обычным по задачам, методам и результатам разделом математики, не очень похожим в целом на математическую логику, в состав которой теорию множеств включают скорее по традиции.

Теория множеств изучает обычные свойства обычных математических объектов, которые в ней называются *множествами*. Проблемы, возникающие при рассмотрении произвольных абстрактно заданных совокупностей, например совокупности всех множеств или всех мощностей[1], остаются за пределами современной теории

[1] К этим проблемам относится, например, известный парадокс Рассела, связанный с совокупностью $\{x : x \notin x\}$. Парадокс состоит в том, что, обозначив $X = \{x : x \notin x\}$, мы немедленно получаем $X \in X \Leftrightarrow X \notin X$, т. е. объект X внутренне противоречив. Однако такого типа совокупность X не встречается среди обычных математических объектов.

множеств и, может быть, относятся скорее к философским проблемам математики.

Для исключения этих проблем современная теория множеств использует аксиоматический метод, состоящий в том, что все утверждения выводятся из аксиом теории множеств Цермело — Френкеля, обозначаемой **ZFC**, к которым относится и аксиома выбора. Впрочем, не известно способа точно изложить наши внутренние представления иначе, чем с помощью аксиоматического метода.

Аксиомы этой теории (о них см. далее) исключают объекты, подобные упомянутому в связи с парадоксом Рассела. Поэтому парадоксы теории множеств, которые когда-то рассматривались как чуть ли не центральная проблема в теории множеств, исключены аксиоматикой **ZFC**.

Их сменил парадокс принципиально нового типа: некоторые очень естественные математические утверждения оказались *в принципе не истинными и не ложными*, т. е. *абсолютно неразрешимыми*. Существование таких утверждений было предсказано Н. Н. Лузиным и доказано в работах К. Гёделя, П. С. Новикова, П. Коэна. Например, таково утверждение об измеримости по Лебегу некоторого простого и явно описанного множества вещественных чисел.

С другой стороны, теория множеств обладает рядом черт, исключительно выделяющих ее среди других разделов математики.

Во-первых, вся работающая в естествознании математика и практически вся математика записывается формулами языка теории множеств, языка **ZFC**. Он кажется очень простым: в нем ровно одно исходное отношение $x \in y$, «множество x принадлежит множеству y». Даже отношение равенства выражается через это отношение: множества равны, если они содержат одни и те же элементы. Языки элементарной арифметики или, скажем, элементарной планиметрии выглядят гораздо сложнее.

Во-вторых, не кажется, чтобы аксиоматика **ZFC** отличалась какой-то особой сложностью по сравнению с аксиоматиками элементарной геометрии или арифметики. И в то же время не вызывает сомнения, что, используя аксиомы **ZFC**, можно доказать любое истинное математическое утверждение так, как ведут доказательства в элементарной геометрии. По крайней мере, неясно, в чем заключалась бы особенная сложность языка и аксиоматики теории множеств.

Занимавшиеся теорией множеств отмечали удивительное сочетание в ней геометричности (наглядности) и чисто логических (формальных) рассуждений, граничащих с вычислениями. Например, как пишет академик А. Н. Крылов[1], Э. Борель и А. Лебег, говоря

---

[1] *Крылов А. Н.* Записки об ученых трудах действительных членов РАН. М. : АН СССР, 1930.

о Н. Н. Лузине и его трудах по теории множеств, характеризовали его как «великого геометра».

В-третьих, теория множеств обладает эффективностью, несмотря на всю ее абстрактность. Одно из проявлений этой эффективности состоит в том, что ядро в совокупности всех множеств — борелевские и проективные множества — строятся и изучаются в рамках единой теории рекурсивности и обладают общими чертами эффективных объектов.

Конструктивность по Гёделю и ее современные обобщения в рамках теории больших кардиналов, а также разнообразные трансфинитные рекурсивные схемы также обладают эффективностью. Если из числа логических аксиом удалить аксиому исключенного третьего $(\neg\neg\varphi) \Rightarrow \varphi$, то полученная теория множеств $\mathbf{ZFC}^-$ обладает удивительным свойством: если доказано $\forall x_1, \ldots, x_n \, \exists y \; \varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$ то можно индивидуально описать (термом языка **ZFC**) функцию $y = f(x_i, \ldots, x_n)$, для которой доказать $\forall x_1, \ldots, x_n \; \varphi(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))$. И это для любой формулы φ.

Отметим недавние работы в рамках теоретико-множественного нестандартного анализа [20, 111, 113], в которых найдены и исследованы задачи, во многом параллельные тем, которыми занимается дескриптивная теория множеств. Общий обзор состояния этого перспективного направления см. в статьях [17] и [114].

Теперь о содержании данной книги.

В гл. 1 вводятся основные понятия теории множеств и основные операции над множествами. Глава 2 начинается с обзора аксиом теории множеств **ZFC** Цермело — Френкеля, а затем рассматриваются такие понятия теории множеств, как мощность, ординал, кардинал, аксиома выбора. Вводная часть нашей книги, посвященная скорее классической теории множеств, заканчивается в гл. 3 обзором некоторых более специальных элементов и понятий, связанных с теоретико-множественным универсумом, в частности иерархией фон Неймана, $\in$-моделями, абсолютностью, более слабыми, чем **ZFC**, теориями множеств и их моделями, нефундированными моделями.

Читатель, так или иначе знакомый с содержанием первых трех глав (введением в современную классическую теорию множеств) по другим источникам и вводным курсам, может пропустить их при первом чтении, возвращаясь по мере надобности для уточнения обозначений или при поиске ссылок.

Следующая гл. 4 содержит введение в дескриптивную теорию множеств. Для удобства читателя дается обзор основных понятий этого раздела теории множеств и тех результатов нашей предыдущей книги [19], которые необходимы для понимания последующего изложения. Эта линия продолжается в двух следующих главах, в которых излагаются базовая теория первого проективного уровня (гл. 5) и вопросы, связанные со свойствами регулярности, борелевской кодировкой и абсолютностью (гл. 6).

Уже в первые годы развития дескриптивной теории множеств было отмечено, что практически все значительные теоремы в этой области связаны с *первым проективным уровнем*, т. е. с классами $\mathbf{\Sigma}^1_1$, $\mathbf{\Pi}^1_1$ и $\mathbf{\Delta}^1_1$ (A-множествами, CA-множествами, борелевскими множествами соответственно), и именно для первого проективного уровня работают классические методы дескриптивной теории множеств.

На втором проективном уровне теоремы, полученные для первого уровня, большей частью не выполняются, а те немногие результаты, которые удалось получить, обычно выглядят по-другому.

Более того, для множеств второго проективного уровня возникают проблемы, которые в принципе не имеют решения. Например, проблемы измеримости этих множеств и наличия у них свойства Бэра. Об этих проблемах говорится в главе 7. Их своеобразное «решение» было получено много лет спустя после того, как они были сформулированы Н. Н. Лузиным в 1920-х гг. А именно: было доказано, что проблема измеримости множеств второго проективного уровня и другие подобные проблемы *абсолютно неразрешимы*, т. е. на поставленные Лузиным вопросы нельзя ответить «да» или «нет» (в рамках обычной аксиоматики теории множеств[1]).

В частности, неразрешимыми оказались следующие наиболее интересные классические гипотезы о свойствах регулярности для конкретных проективных классов множеств:

$$\mathrm{PK}(\mathbf{\Pi}^1_1),\ \mathrm{LM}(\mathbf{\Sigma}^1_2),\ \mathrm{BP}(\mathbf{\Sigma}^1_2),\ \mathrm{LM}(\mathbf{\Delta}^1_2),\ \mathrm{BP}(\mathbf{\Delta}^1_2), \tag{*}$$

где заглавные буквы обозначают рассматриваемое свойство регулярности (т. е. свойство совершенного ядра PK, измеримости по Лебегу LM, свойство Бэра BP), а в скобках стоит проективный класс, так что, например, $\mathrm{LM}(\mathbf{\Sigma}^1_2)$ — это гипотеза «все множества проективного класса $\mathbf{\Sigma}^1_2$ измеримы по Лебегу». «Регулярность» со-

[1] Здесь важно, что в рамках такой аксиоматики, например аксиоматики теории множеств Цермело — Френкеля **ZFC**, формулируются и доказываются все «содержательные» математические результаты (а следовательно, и результаты естественных наук, выразимые на языке математики). Таким образом, нет такой аксиомы, которая могла бы помочь в решении вопросов Лузина и при этом не изменила бы обычную «содержательную» математику, а являлась ее естественной частью.

Конечно, тут мы подходим к грани философской дискуссии: что есть «содержательная» математика. «Практический» ответ: это есть математика, которая излагается в рамках аксиоматики **ZFC**. Правда, в эту аксиоматику не включены приемы работы с особо большими множествами (типа «множества» всех абелевых групп и т. п.; чтобы подчеркнуть отличие от обычных, «маленьких» множеств, эти особо большие множества еще называют *классами*). Но если расширить **ZFC** средствами, которые некоторым разумно достаточным образом обеспечивают работу и с классами, то и вопросы Лузина останутся неразрешимыми. То же самое остается верным, если расширить **ZFC** возможностью работать с «классами» классов и т. д. Так что неразрешимость вопросов Лузина не связана с тем, сколь большие множества разрешается использовать. Она возникает на уровне уже одних только вещественных чисел.

стоит в том, что соответствующее свойство выполняется для всех множеств из класса.

Доказательство этих теорем об абсолютной неразрешимости потребовало обращения к структуре всего теоретико-множественного универсума (в противоположность работе с множествами в польских пространствах, характерной для классической дескриптивной теории множеств) и также разработки таких важнейших теоретико-множественных методов, как конструктивность и форсинг. Изложение этого материала приводится в гл. 8 и 9 книги.

Подчеркнем важную особенность современной дескриптивной теории множеств: построения и доказательства в ней, в их наиболее общей и естественной форме, не замыкаются на чисто топологическую структуру множеств в польских пространствах, а напротив, апеллируют к структуре теоретико-множественного универсума в целом.

Роль ординалов, или, что то же самое, порядковых чисел (которые не составляют никакого польского пространства) была отмечена уже на раннем этапе развития дескриптивной теории множеств в связи с самыми разными свойствами множеств. Но эта роль общих методов многократно возрастает с переходом к более современным разделам дескриптивной теории множеств, как и роль общих теоретико-множественных методов, которые, кстати, и создавались, в значительной мере, для поиска средств решения классических проблем о множествах вещественных чисел.

Этим заканчивается первая часть книги: введены (гл. 1—6) основные понятия теории множеств, которые нужны для формулировки и понимания главных проблем; сформулированы (гл. 7) сами проблемы и связанные с ними результаты; изложена в общих чертах (гл. 8 и 9) методика, которая используется для доказательства результатов о независимости.

Вторая часть книги содержит сами эти доказательства.

Главы 10—12 посвящены исследованию взаимосвязей между гипотезами из списка (*), которые схематически изображены на диаграмме, показанной на рис. 1 в параграфе 7.2. Для этого с каждой из пяти гипотез ассоциируется определенная *резольвента* — лузинский термин, обозначающий такую (эквивалентную) переформулировку исходного предложения, которая имеет существенно более простую теоретико-множественную природу.

Следствие 10.2.2 содержит все пять эквивалентностей с резольвентами, а их более «эффективные» варианты даются в теореме 10.2.1. Доказательства эквивалентностей в одну сторону приводится в гл. 10 на основе теории конструктивности, а в другую сторону — в гл. 11 на основе метода вынуждения (форсинга). Одним из результатов этого исследования становится вывод нетривиальных импликаций

$$\mathrm{PK}(\boldsymbol{\Pi}^1_1) \Rightarrow \mathrm{LM}(\boldsymbol{\Sigma}^1_2) \text{ и } \mathrm{PK}(\boldsymbol{\Pi}^1_1) \Rightarrow \mathrm{BP}(\boldsymbol{\Sigma}^1_2),$$

так что измеримость и свойство Бэра для класса $\mathbf{\Sigma}^1_2$ являются следствиями свойства совершенного ядра для класса $\prod^1_1$.

Далее в гл. 12 проблемы измеримости и свойства Бэра связываются со свойствами финального доминирования, т. е. с отношением $\leq^*$ частичного предпорядка на множестве $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ всех бесконечных последовательностей натуральных чисел, при котором $x \leq^* y$, если $x(n) \leq y(n)$ для всех, кроме конечного числа, номеров n. Это позволяет вывести весьма нетривиальную импликацию

$$\mathrm{LM}(\mathbf{\Sigma}^1_2) \Rightarrow \mathrm{BP}(\mathbf{\Sigma}^1_2),$$

связывающую гипотезы измеримости и свойства Бэра.

Следующая гл. 13 излагает фундаментальную теорему Соловея о том, что даже сверх проективных классов, фигурирующих в гипотезах из списка (*), положительные решения всех трех проблем регулярности сразу для всех проективных множеств (и даже для некоторого еще более широкого класса множеств) не противоречат аксиомам **ZFC**.

Эта глава содержит еще один замечательный результат: даже если предположить, что «нерегулярные» проективные множества существуют, например существует несчетное проективное множество без совершенного ядра (или неизмеримое, или не имеющее свойства Бэра), то отсюда не следует существование *явно определяемого* «нерегулярного» проективного множества, т. е. какого-то конкретного, недвусмысленно определенного контрпримера!

Различию между определимыми и «произвольными» (например, возникающими с помощью аксиомы выбора) множествами придавалось большое значение на ранних этапах развития теории множеств — см. об этом исторические и библиографические замечания в конце гл. 2.

Посредством построения подходящих моделей теории множеств в гл. 14 доказывается, что между гипотезами списка (*) нет никаких связей, кроме упомянутых выше трех импликаций и следующих двух тривиально верных отношений:

$$\mathrm{LM}(\mathbf{\Sigma}^1_2) \Rightarrow \mathrm{LM}(\mathbf{\Delta}^1_2) \text{ и } \mathrm{BP}(\mathbf{\Sigma}^1_2) \Rightarrow \mathrm{BP}(\mathbf{\Delta}^1_2).$$

Таким образом, ни одну из этих пяти импликаций нельзя обратить. В частности, необратима импликация $\mathrm{LM}(\mathbf{\Sigma}^1_2) \Rightarrow \mathrm{BP}(\mathbf{\Sigma}^1_2)$ — и это показывает, что известная симметрия между мерой и категорией, превалирующая во многих элементарных утверждениях, превращается в асимметрию в более сложных вопросах.

Исследования, изложенные в гл. 10—14, в целом закрыли проблемы главных свойств регулярности до второго уровня проективной иерархии включительно. Результаты, известные для третьего и четвертого проективных уровней, пока далеки от столь же полной картины, но среди прочего они также выявляют асимметрию между мерой и категорией — теперь уже в таком ключевом вопросе, как непротиворечивость.

Оказывается, что непротиворечивость гипотезы $\mathrm{BP}(\boldsymbol{\Sigma}^1_3)$ можно установить на базе непротиворечивости аксиом **ZFC**, в то время как гипотеза $\mathrm{LM}(\boldsymbol{\Sigma}^1_3)$ уже требует существования строго недостижимого кардинала.

Эти результаты очень сложны, и их невозможно изложить в настоящей книге вместе с доказательствами в силу естественных ограничений на размер и стиль, но мы предлагаем их подробный обзор в гл. 18.

В заключительных главах книги мы обращаемся к еще одной группе проблем классической дескриптивной теории множеств, отчасти связанных с проблемами свойств регулярности точечных множеств, в особенности с проблемой совершенного ядра, но непосредственно относящихся к общему вопросу о соотношении мощности $\aleph_1$ и мощности континуума $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ и к вопросу об эффективном представлении $\aleph_1$ в континууме. Это проблемы Н. Н. Лузина о последовательностях конституант, т. е. борелевских множеств, на которые каноническим образом разлагаются множества первого проективного уровня, и вообще проблемы несчетных последовательностей борелевских множеств, удовлетворяющих некоторым дополнительным требованиям типа их общей малости (например, все множества данной последовательности не более чем счетны), их *ограниченного ранга* (требуется, чтобы все множества из данной последовательности имели единый ранг $\rho < \omega_1$ в иерархии борелевских множеств), либо, наконец, как самое слабое требование, их *отделимости* множествами ограниченного ранга.

Эти проблемы возникли в 1920-х и 1930-х гг., но их полное решение было получено только в работах 1980-х гг. на основе весьма изощренных технических средств теории множеств.

Некоторые из проблем конституантов оказались также *абсолютно неразрешимыми*, подобно многим другим проблемам классической теории множеств. Однако некоторые другие, достаточно неожиданно, оказались *разрешимыми*, т. е. на поставленные вопросы о существовании определенных последовательностей борелевских множеств получены отрицательные ответы — хотя эти решения основаны на методах, обычно используемых именно для доказательств неразрешимости.

Результаты для последовательностей борелевских множеств излагаются в гл. 15 и 16, а гл. 17 книги посвящена еще двум проблемам классической дескриптивной теории множеств из «Лекций об аналитических множествах» Н. Н. Лузина [135] — это *узкая проблема континуума* — эффективного разбиения вещественной прямой на $\aleph_1$ непустых борелевских множеств ограниченного борелевского ранга, и *узкая проблема Лебега* об эффективном построении последовательности из $\aleph_1$ попарно различных борелевских множеств вещественной прямой ограниченного борелевского ранга.

Обе проблемы решаются в положительном направлении, если убрать требование ограниченности по рангу или требование эффективности построения, разрешив использование аксиомы выбора. В общей постановке эти проблемы решаются отрицательно. Этот глубокий результат Стерна, полученный при помощи упомянутой выше модели Соловея, составляет главное содержание гл. 17.

Эта книга, разумеется, отчасти пересекается по содержанию с двумя предшествующими нашими книгами из серии «Современная теория множеств». При необходимости мы ссылаемся на «Борелевские и проективные множества» [19] в части базовых определений и теорем дескриптивной теории множеств. Однако предлагаемая книга может читаться и независимо от трудов [18] и [19].

Предлагаемая работа, не претендуя ни на полный охват проблематики классической дескриптивной теории множеств (даже вместе с работами [18, 19]), ни на исчерпывающее изложение связанных с названными проблемами современных теоретико-множественных методов, задумана как введение, описывающее характер проблем, методов, результатов и приложений в изучаемой области.

Книга ориентирована на математиков (студентов, аспирантов, научных работников), знакомых с основами анализа, теории функций и топологии в объеме первых курсов университета. Для понимания изложения более сложных результатов, в частности связанных с ординалами (порядковыми числами), необходимо еще знакомство с элементарными основами теории множеств и теории моделей, которые также в той или форме преподаются на первых курсах университетов.

Работа над книгой одного из авторов (В. Г. Кановея) была частично поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований 13-01-00006.

Авторы посвящают книгу своим родителям, детям и внукам (Алеше, Валерии, Ивану, Маше и Сергею); становясь старше, мы все чаще думаем о них.