В. А. Любецкий

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ВЫСШЕЙ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ ВУЗОВ

3-е издание

Рекомендовано Учебно-методическим отделом высшего образования в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по естественнонаучным направлениям

Допущено Министерством образования РФ в качестве учебного пособия по курсу «Элементарная математика» для студентов педагогических институтов и университетов

Книга доступна в электронной библиотеке biblio-online.ru, а также в мобильном приложении «Юрайт.Библиотека»

Москва ▪ Юрайт ▪ 2019

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
Л93

***Автор*:**

Любецкий Василий Александрович — профессор, доктор физико-математических наук, академик Российской академии естественных наук, профессор кафедры математической логики и теории алгоритмов механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, главный научный сотрудник, заведующий лабораторией Института проблем передачи информации имени А. А. Харкевича Российской академии наук.

***Рецензенты*:**

Постников М. М. — доктор физико-математических наук, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, главный научный сотрудник Математического института Российской академии наук;

Бутузов В. Ф. — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математики физического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова;

Смирнов В. А. — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой элементарной математики Московского государственного педагогического университета.

Любецкий, В. А.

Л93 Элементарная математика с точки зрения высшей. Основные понятия : учебное пособие для вузов / В. А. Любецкий. — 3-е изд. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 537 с. — (Высшее образование).

ISBN 978-5-534-10421-9

Излагаются основные понятия элементарной математики: элементарная функция, угол, вектор, плоскость, планиметрия, измерение величин, площадь и мера фигуры, геометрическое построение, решение алгебраических уравнений, число, точка, пространство, доказуемость, модель и истинность. Выясняется место этих понятий в современной системе представлений высшей математики.

Пособие снабжено большим количеством примеров и заданий для самостоятельной работы.

Для бакалавров, магистров и студентов педагогических институтов и университетов.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

Delphi Law Company

Все права защищены. Никакая часть данной книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме без письменного разрешения владельцев авторских прав. Правовую поддержку издательства обеспечивает юридическая компания «Дельфи».

ISBN 978-5-534-10421-9

© Любецкий В. А., 1987
© Любецкий В. А., 2019, с изменениями
© ООО «Издательство Юрайт», 2019

Оглавление

Предисловие к третьему изданию

Выходит стереотипное переиздание книги, которая адресована необычному читателю. Не будучи профессиональным математиком, он хочет ответить себе и, может быть, своим ученикам на вопрос, что такое математика. Для этого естественно выбрать материал понятий элементарной (школьной) математики. Этот вопрос не равнозначен вопросу об истории элементарной или высшей математики, которые имеют свой особый предмет обсуждения.

За время, прошедшее с предыдущего издания, автору говорили о недостатках книги, из которых отмечу два: «все это известно из соответствующих учебников по высшей математике» и «зачем так много места уделять понятию величины». О первом: человек, который прочел два десятка таких учебников, охватывающих рассмотренные здесь темы, узнал много-много сверх написанного в книге и стал редкостным профессионалом. О втором: понятие величины кажется мне сложным и даже загадочным; хотя в каждом отдельном случае оно выглядит просто.

Чего не хватает в этой книге для полного осуществления первоначального замысла автора? Движения в двух противоположных направлениях — (1) после всего сказанного в книге, так что же такое математика идеологически, и (2) каковы ее приложения.

(1) Математика сводится к двум понятиям: «множество» и «множество x — элемент множества y, обозначается $x \in y$» — которые восходят к физиологическим структурам нашего мозга подобно естественному языку. Глубокая загадка — мир множеств не сформирован до конца: математика может жить в мире только формульно описанных множеств вместе со способностью к счету (это — мир конструктивных множеств по К. Гёделю) и, в равной мере, — в другом мире, который включает кроме конструктивных еще и *случайные* множества, аморфные, практически не обладающие индивидуальными свойствами (такие удивительные множества были придуманы П. Коэном и названы генерическими, или, иногда говорят, случайными). При этом способность к счету (ординальный ряд) остается одинаковой в обоих мирах. Отсюда вытекает глубокая неопределенность в двух основных математических словах — «существует, записывается $\exists x$» и «для всякого, записывается $\forall x$». Поэтому в этих мирах на самые простые вопросы φ, даже относящиеся только к вещественным числам, могут быть противоположные ответы, т. е. в одном мире выполняется утверждение φ, а в другом

утверждение $\neg\varphi$ (знак $\neg$ означает отрицание). Это поднимает трудноразрешимые гносеологические вопросы, восходящие к нашему сознанию. В противоположность вещественным числам, можно думать, что любой вопрос φ о натуральных числах (начале ординального ряда) разрешим: в том смысле, что выполняется φ или $\neg\varphi$ в мире множеств, промежуточном между указанными выше.

(2) Приложения математики чрезвычайно важны: граница между математикой и ее приложениями трудноразличима. Можно назвать два приложения: математическая физика и математическая биология. Второе, хотя и не сопоставимо по объему и глубине развития с первым, — уже стало весьма нетривиальной областью, которая никак не сводится к статистике или моделированию или компьютерным вычислениям, которые имеют свои специфические предметные области.

По пункту (1) можно посмотреть книгу[1], по пункту (2) (в части биологии) — сайт[2].

В. А. Любецкий

---

[1] *Кановей В. Г., Любецкий В. А.* Теория множеств: абсолютно неразрешимые классические проблемы : учебное пособие для вузов. 2-е изд. Москва : Издательство Юрайт, 2019.

[2] URL: http://lab6.iitp.ru/ru/pub.

Предисловие

Задача этой книги — показать место основных понятий школьной математики в гораздо более широкой системе современных представлений высшей математики и в этих рамках строго и последовательно изложить сами понятия школьной (элементарной) математики с точки зрения высшей математики (которая отождествляется с содержанием курсов алгебры и теории чисел, анализа и геометрии, математической логики и теории алгоритмов, изучаемых в высшей школе). Впрочем, от читателей требуются не знания, а самые минимальные представления об этих курсах.

Хорошо известно, что многие выпускники классических и педагогических университетов, институтов — будущие школьные учителя, преподаватели вузов и даже научные работники испытывают затруднения в понимании, если так можно сказать, *общекультурных основ математики.* Есть много причин для того, чтобы отождествить эти основы с содержанием обычной школьной математики.

Упомянутые затруднения относятся прежде всего к пониманию того, что стоит за школьной математикой, и к умению связывать те обширные математические теории, которые изучаются студентом в течение четырех-пяти лет в высшей школе, с конкретикой школьной (элементарной) математики.

Цель книги — помочь преодолеть эти трудности, способствуя тем самым усилению профессиональной направленности в подготовке учителя и вообще выпускника математического факультета, физического и т. п. В частности, преодолеть распространенное заблуждение, что *натренированность* в решении элементарных задачек (конечно, полезная сама по себе) и есть *понимание* школьной математики (ее характера и движущих мотивов).

В то же время автор представлял себе и другого возможного читателя, который захочет с общекультурной точки зрения понять движущие мотивы современной математики на как можно более элементарном материале. С этой точки зрения трудно представить себе более простой, но в то же время содержательный, замкнутый в себе и представительный для всей математики материал, чем школьная математика, которая как раз с этой точки зрения и изучается в книге.

В первых главах рассматриваются наиболее традиционные понятия школьной математики: элементарная функция, угол, измерение углов (гл. 1); вектор, плоскость, планиметрия (гл. 2); величина, площадь и мера плоской фигуры (гл. 3); геометрические построения циркулем и линейкой, решение алгебраических уравнений низших степеней в радикалах (гл. 4). Таким образом, в четырех главах из пяти речь идет о понятиях, прошедших через многие века и вошедших в базисный стандарт любого образования. Современная математика дает им четкую, ясную и, по существу, простую трактовку с единых позиций.

В гл. 5 и приложении II изложение носит не столь простой характер, как в предыдущих главах. Поэтому чуть подробнее коснемся их содержания. В параграфе 5.1 детально рассматривается построение натуральных чисел — основы всех числовых систем и по сути основы даже геометрических пространств. Понятие натурального числа 1, 2, 3, … лежало у истоков цивилизаций.

В параграфе 5.2 традиционный подход к понятию рационального числа сравнивается с другим подходом, в рамках которого рациональное число — это функция. В параграфе 5.3 даны основные способы перехода от рациональных чисел — дискретного объекта к вещественным и комплексным числам — непрерывным объектам (в параграфе 5.5 эта линия изложения продолжается переходом от рациональных чисел к нечисловым p-адическим полям, которые, однако, родственны числовым полям и должны были бы естественно изучаться вместе с ними).

Параграфы 5.4—5.6 посвящены алгебро-топологическим свойствам вещественных и комплексных чисел: здесь мы касаемся свойств алгебраической замкнутости и локальной компактности, а также роли отношения порядка в числовых системах. Включение этого материала связано с тем, что именно сочетание алгебраических, топологических и порядковых свойств создает вещественным и комплексным числам уникальное положение в математике. Приложение II содержит подробное изложение элементарных вопросов неевклидовой планиметрии. Ясное понимание евклидовой планиметрии (о которой говорится в гл. 2), по-видимому, предполагает для контраста хотя бы в малой степени знакомство с неевклидовой планиметрией.

Предполагается, что читатель уже знаком с основными понятиями школьной математики на том предварительном уровне их понимания, который выносится из средней школы и первых курсов высшей школы. Также предполагается некоторая опытность читателя в оперировании основными алгебраическими, топологическими и логическими понятиями из упомянутых выше математических курсов; однако фактическое содержание этих курсов может быть ему незнакомо (или почти незнакомо). Иногда в книге упоминается, что данное понятие рассматривалось в таком-то курсе высшей школы; при этом не предполагается, что читатель помнит изложение этого понятия в упомянутом курсе. Это делается, чтобы подчеркнуть междисциплинарный (и отчасти даже связующий) характер курса «Элементарной математики» и этой книги.

Поэтому изложение в книге ведется постепенно, как правило, с полными определениями и доказательствами; от читателя в основном требуется умение не спеша разбирать временами длинные построения.

Более высокие требования к читателю предъявляют параграфы 5.5 и 5.6 (а отчасти и вся глава), так как изложение в них носит в большей степени обзорный характер. В последующие издания книги предполагается включить приложение, которое содержит доказательства или их эскизы для теорем из гл. 5.

Теперь чуть подробнее о содержании книги. В ней степень детальности при рассмотрении того или иного понятия школьной математики различна и зависит от внимания, которое ему уделяется в основных математических курсах высшей школы.

Так, понятия элементарной функции, угла и измерения углов в их элементарных аспектах известны студенту старших курсов почти на том же уровне, что и выпускнику школы. Поэтому здесь изложение носит систематический характер.

Понятие вектора обычно определяется аксиоматически как элемент произвольного векторного пространства. При всей важности такого аксиоматического подхода нужно представлять себе и конкретные модели аксиоматического определения вектора, в том числе не только простейшую модель вектора как направленного отрезка. Именно разнообразие этих моделей придает понятию вектора фундаментальное значение. Поэтому подробно рассматриваются различные конструктивные подходы к понятию вектора. Вообще *конструктивным* в книге называется подход, основанный на какой-то конкретной математической *конструкции* (в противоположность *аксиоматическому* подходу).

Понятие геометрической плоскости тщательно изучается в курсе геометрии, поэтому мы касаемся его бегло, только в плане адекватности различных определений плоскости интуитивному представлению о ней. Понятие планиметрии с аксиоматической точки зрения также подробно рассматривается в курсе геометрии, и мы касаемся его только в обзорном порядке. Однако при всей важности аксиоматического понимания планиметрии существенна и клейновская точка зрения на нее. Поэтому подробно рассматривается клейновский подход, в частности вычисляются все полиномиальные инварианты ортогональной группы, которые и образуют с этой точки зрения важную часть евклидовой планиметрии.

Понятие величины подробно рассматривается в книге, так как в сущности оно отсутствует в основных математических курсах. Столь же подробно рассматриваются и сравниваются различные способы измерения площади многоугольника, и в этой связи обсуждается аксиоматическое определение площади многоугольника.

Мера понимается как явно определенное (как мы говорим: «конструктивное» от слова «конструкция») продолжение функции площади с множества многоугольников на более широкое множество криволинейных фигур. В то же время мера определяется аксиоматически, и эти два подхода тщательно сравниваются. Затем на основе аксиоматического определения меры (без использования интегралов) вычисляются ее значения для круга, сектора, сегмента и других элементарных плоских фигур. В курсе анализа рассматривается мера Лебега (в основном на прямой), здесь рассматриваются меры Жордана и Лебега на плоскости. Таким образом, в этом вопросе, как и в других, автор стремился обеспечить преемственность излагаемого материала по отношению к основным математическим курсам высшей школы.

Подробно рассматриваются классические задачи об удвоении объема куба, трисекции угла и построении правильного семиугольника с помощью циркуля и линейки. При этом доказывается невозможность таких построений.

Затем подробно изучается вопрос о разрешимости в радикалах алгебраических уравнений степеней, меньших или равных 5. Доказывается теорема Галуа и на ее основе находятся известные формулы для решения уравнений степеней, меньших или равных 4.

Для согласования терминологии и обозначений после предисловия приводится материал, содержащий некоторые общие понятия высшей математики. Эти понятия играют в книге незначительную (безусловно, подсобную) роль языка, на котором говорится о школьной математике. Правильно рассматривать их как специализированную часть русского языка, подобную языку врача, химика или биолога. Разумно обращаться к этому материалу только по мере надобности, т. е. когда читатель встречает в книге обозначения или термины, смысл которых ему не ясен из контекста. Речь идет о таких сравнительно абстрактных понятиях, как гомоморфизм, подгруппа, топологическое пространство, индуцированная топология, связность, локальная компактность; однако они употребляются исключительно для простейших случаев: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_{>0}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}$, S^1, S^2. Конечно, в таких случаях эти понятия можно заменить соответствующими частными, по видимости более простыми словесными выражениями. Например, вместо локальной компактности можно говорить о наличии окрестности, являющейся отрезком или дугой, включающей концы. Подобная замена вряд ли приведет к более легкому пониманию смысла дела и в то же время сделает многие формулировки тяжеловесными и специфически привязанными к каждому отдельному случаю. Тем более, что эти абстрактные понятия рассматриваются в основных математических курсах и давно стали необходимым элементом минимальной математической культуры. Для некоторых категорий читателей такая замена абстрактных терминов соответствующими элементарными выражениями могла бы стать полезным упражнением, относящимся по существу не к математике, а к русскому языку.

В книге большинство вопросов рассматривается с точки зрения инвариантов подходящей группы преобразований, т. е. инвариантов действия подходящей группы; иными словами, с точки зрения непрерывных гомоморфизмов простейших групп. В доказательствах повторяются одни и те же ходы, связанные с компактностью, связностью, гомоморфностью, действием, ядром, факторизацией, простейшими неравенствами. Можно надеяться, что это придает весьма разнородным по их природе понятиям элементарной математики цельный и единообразной характер.

В книге можно найти материал для факультативных занятий в школе. Однако вопросы преподавания математики в школе здесь не рассматриваются. В этом, как и в других отношениях, автор старался следовать духу книги Ф. Клейна «Элементарная математика с точки зрения высшей». Книга Ф. Клейна своей конкретной содержательностью мало похожа на ряд современных изложений элементарной математики, в которых на первый план выдвигаются вопросы формально-логического порядка, например вопросы типа, является ли элементарная функция множеством пар, отношением; кажется, что такого рода вопросы маловажны для существа дела.

Автор неоднократно читал лекционный курс, одноименный с названием книги, для слушателей факультета повышения квалификации преподавателей, а также для студентов V курса математического факультета. Эти лекции, отпечатанные слушателями и студентами, после небольшой правки составили рукопись книги. Конечно, в книге остались погрешности, о которых автор просит сообщать по электронному адресу Lyubetsk@iitp.ru.

Приложение II написано совместно с С. А. Пироговым и П. В. Семеновым.

Благодарности. Автор благодарит научного редактора книги С. А. Пирогова за большую помощь в подготовке курса и рукописи. Автор благодарит Елену Любецкую и Александра Антипова за подготовку компьютерного файла этого издания. Книга не могла бы появиться без самоотверженной моральной и компьютерной поддержки Льва, Галины и Ильи Рубановых.

Автор сердечно признателен профессорам Е. А. Горину, Е. Я. Лину и А. В. Чернавскому за ценные советы и указания во время работы над этим курсом, за то многое, чему они научили автора. Автор глубоко признателен профессору М. М. Постникову за доброе отношение; в частности, его развернутая рецензия на первое издание книги (переданная автору на 50 страницах) позволила исправить ряд недостатков того издания и помогла автору лучше понять то, о чем он пишет.

Автор посвящает книгу своим детям: Василине, Татьяне, Елене и Анне.