Синтаксическое исчисление Ламбека

М. Р. Пентус

1 Полугруппы с делением

Определение 1.1. Множество всех целых чисел обозначим через $\mathbb{Z}$, множество всех натуральных чисел (с нулём) — через $\mathbb{N}$.
Определение 1.2. *Разность* множеств A и B обозначим $A - B$.
Определение 1.3. Множество всех подмножеств произвольного множества A обозначим через $\mathcal{P}(A)$.
Определение 1.4. *Полугруппой* называется непустое множество S с заданной на нём бинарной операцией $\circ$, удовлетворяющей условию $(\forall x \in S)\,(\forall y \in S)\,(\forall z \in S)\,(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.
Пример 1.5. Пусть D — некоторое множество и $\mathrm{nil} \notin D \times D$. Определим на множестве $S \rightleftharpoons (D \times D) \cup \{\mathrm{nil}\}$ бинарную операцию $\star$, положив $\langle x, y\rangle \star \langle y, z\rangle \rightleftharpoons \langle x, z\rangle$ для любых $x, y, z \in D$, а во всех других случаях $a \star b \rightleftharpoons \mathrm{nil}$. Тогда $\langle S, \star\rangle$ — полугруппа (даже полугруппа с нулём).
Определение 1.6. *Частично упорядоченной полугруппой* (partially ordered semigroup) называется алгебраическая система $\langle S, \circ, \leqslant\rangle$, где $\langle S, \circ\rangle$ — полугруппа, $\leqslant$ — частичный порядок на множестве S (то есть отношение $\leqslant$ рефлексивно, транзитивно и антисимметрично) и выполняется свойство $(\forall x_1 \in S)\,(\forall x_2 \in S)\,(\forall y_1 \in S)\,(\forall y_2 \in S)\,(x_1 \leqslant x_2 \wedge y_1 \leqslant y_2 \to x_1 \circ y_1 \leqslant x_2 \circ y_2)$ (см. [46]).
Пример 1.7. $\langle \mathbb{N}, +, \leqslant\rangle$ — частично упорядоченная полугруппа.
Пример 1.8. Пусть $\langle S, \circ\rangle$ — полугруппа. Тогда $\langle S, \circ, =\rangle$ — частично упорядоченная полугруппа.
Упражнение 1.9. Пусть $\langle S, \star\rangle$ — полугруппа из примера 1.5. Определим на множестве S бинарное отношение $\preceq$ так:

$$x \preceq y \text{ тогда и только тогда, когда } x = \mathrm{nil} \text{ или } x = y.$$

Тогда $\langle S, \star, \preceq\rangle$ — частично упорядоченная полугруппа.
Определение 1.10. *Полугруппой с делением* (residuated semigroup) называется алгебраическая система $\langle S, \circ, \leqslant\rangle$, где $\langle S, \circ\rangle$ — полугруппа и $\leqslant$ — частичный порядок на множестве S, причём для любых элементов a и b из S существует такой элемент $a \,/\, b \in S$ (правое частное элемента a по b), что условия $c \leqslant a \,/\, b$ и $c \circ b \leqslant a$ эквивалентны, и существует такой элемент $b \setminus a \in S$ (левое частное элемента a по b), что условия $c \leqslant b \setminus a$ и $b \circ c \leqslant a$ эквивалентны (см. [46]).
Пример 1.11. $\langle \mathbb{Z}, +, \leqslant\rangle$ — полугруппа с делением.
Упражнение 1.12. $\langle \mathbb{Z}, \lambda x \lambda y.7, =\rangle$ не является полугруппой с делением.
Упражнение 1.13. $\langle \mathbb{Z}, \lambda x \lambda y.x, =\rangle$ не является полугруппой с делением.
Упражнение 1.14. $\langle \mathbb{N} - \{0\}, +, \geqslant\rangle$ — полугруппа с делением.
Упражнение 1.15. Если $\langle G, \times, {}^{-1}\rangle$ — группа, то $\langle G, \times, =\rangle$ — полугруппа с делением.
Упражнение 1.16. В каждой полугруппе с делением правое частное и левое частное определяются однозначно.
Определение 1.17. *Булевой алгеброй* называется непустое множество S с бинарными операциями $\wedge$ и $\vee$, унарной операцией $\neg$ и выделенными элементами 0 и 1, удовлетворяющими следующим аксиомам (где a, b, c — произвольные элементы множества S):

1. $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$,
2. $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$,
3. $a \wedge b = b \wedge a$,
4. $a \vee b = b \vee a$,
5. $(a \wedge b) \vee a = a$,
6. $(a \vee b) \wedge a = a$,
7. $(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$,
8. $(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$,
9. $a \wedge \neg a = 0$,

10. $a \vee \neg a = 1$.

Упражнение 1.18. Каждая булева алгебра является полугруппой с делением относительно операции $\wedge$ и бинарного отношения $\leqslant$, определённого так: $a \leqslant b$ тогда и только тогда, когда $a \wedge b = a$.
Упражнение 1.19. Каждая полугруппа с делением является частично упорядоченной полугруппой.

Теорема 1.20. *Пусть $\langle S, \circ, \leqslant\rangle$ — частично упорядоченная полугруппа. Рассмотрим множество $K \rightleftharpoons \{A \subseteq S \mid (\forall a \in A)\,(\forall b \leqslant a)\, b \in A\}$. Определим на множестве K бинарную операцию $\cdot$ так:*

$$A \cdot B \rightleftharpoons \{c \in S \mid (\exists a \in A)\,(\exists b \in B)\, c \leqslant a \circ b\}.$$

Тогда $\langle K, \cdot, \subseteq\rangle$ — полугруппа с делением. При этом $A \,/\, B = \{c \in S \mid (\forall b \in B)\, c \circ b \in A\}$ и $B \setminus A = \{c \in S \mid (\forall b \in B)\, b \circ c \in A\}$.

Пример 1.21. Пусть $\langle S, \circ\rangle$ — полугруппа. Определим на множестве $\mathcal{P}(S)$ бинарную операцию $\cdot$ так:

$$A \cdot B \rightleftharpoons \{a \circ b \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Тогда $\langle \mathcal{P}(S), \cdot, \subseteq\rangle$ — полугруппа с делением. При этом $A \,/\, B = \{c \in S \mid \{c\} \cdot B \subseteq A\}$ и $B \setminus A = \{c \in S \mid B \cdot \{c\} \subseteq A\}$.
Замечание 1.22. Операции $/$ и $\setminus$ из примера 1.21 используются при спецификации программ (см. [52]).
Определение 1.23. Пусть Σ — некоторое непустое множество. Через Σ^+ обозначается множество всех непустых конечных последовательностей элементов Σ. Полугруппа $\langle \Sigma^+, \circ\rangle$, где $\circ$ — операция конкатенации (склеивания) конечных последовательностей, называется *свободной полугруппой*. Элементы множества Σ называются *порождающими* этой свободной полугруппы.
Проблема 1.24. Пусть $\langle \Sigma^+, \circ\rangle$ — свободная полугруппа. Описать наименьшее подмножество множества $\mathcal{P}(\Sigma^+)$, содержащее все конечные подмножества множества Σ^+ и замкнутое относительно операций $\cdot$, $/$ и $\setminus$ из примера 1.21.
Упражнение 1.25. Пусть $\langle \Sigma^+, \circ\rangle$ — свободная полугруппа. Обозначим

$$K \rightleftharpoons \{A \subseteq \Sigma^+ \mid A = \Sigma^+ \text{ или } A \text{ конечно}\}.$$

Определим на частично упорядоченном множестве $\langle K, \subseteq\rangle$ бинарную операцию $\cdot$ так:

$$A \cdot B \rightleftharpoons \min\{C \in K \mid (\forall a \in A)\,(\forall b \in B)\, a \circ b \in C\}.$$

Тогда $\langle K, \cdot, \subseteq\rangle$ — полугруппа с делением.
Определение 1.26. Пусть Σ — некоторое непустое множество. Через Σ^* обозначается множество всех конечных последовательностей элементов Σ. Моноид $\langle \Sigma^*, \circ, \varepsilon\rangle$, где $\circ$ — операция конкатенации (склеивания) конечных последовательностей, а ε — пустая последовательность, называется *свободным моноидом.*
Замечание 1.27. $\Sigma^* = \Sigma^+ \cup \{\varepsilon\}$.
Упражнение 1.28. Существует ли такая конечная полугруппа с делением $\langle S, \circ, \leqslant\rangle$, что порядок $\leqslant$ линейный и $\langle S, \circ, \geqslant\rangle$, не является полугруппой с делением?
Упражнение 1.29. Существует ли такая полугруппа с делением $\langle S, \circ, \leqslant\rangle$, что порядок $\leqslant$ линейный и $\langle S, \circ, \geqslant\rangle$, не является полугруппой с делением?
Упражнение 1.30. Существует ли такая конечная полугруппа с делением $\langle S, \circ, \leqslant\rangle$, что $\langle S, \circ, \geqslant\rangle$, не является полугруппой с делением?

2 Несеквенциальное исчисление

Замечание 2.1. В определяемом в этом разделе исчислении выводятся все законы теории полугрупп с делением, выражаемые атомарными формулами в сигнатуре $\langle \cdot, \setminus, /, \leqslant\rangle$.
Определение 2.2. Элементы счётного множества $\mathrm{Pr} \rightleftharpoons \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ называются *примитивными типами.*
Определение 2.3. *Типы* исчисления Ламбека строятся из элементов множества Pr с помощью трёх бинарных операторов $\cdot$, $\setminus$ и $/$. Множество всех типов обозначается Tp. Типы будем обозначать заглавными буквами из начала латинского алфавита.

Определение 2.4. Рассмотрим исчисление $\mathrm{L_H}$ (см. [58]), выводимыми объектами которого являются формулы вида $A \to B$, где $A \in \mathrm{Tp}$ и $B \in \mathrm{Tp}$. Аксиомы исчисления $\mathrm{L_H}$ имеют вид $A \to A$, $(A \cdot B) \cdot C \to A \cdot (B \cdot C)$ и $A \cdot (B \cdot C) \to (A \cdot B) \cdot C$, а выводы строятся с помощью следующих правил:

$$\frac{A \cdot C \to B}{C \to A \setminus B,} \qquad \frac{C \cdot A \to B}{C \to B \,/\, A,} \qquad \frac{C \to A \setminus B}{A \cdot C \to B,} \qquad \frac{C \to B \,/\, A}{C \cdot A \to B,} \qquad \frac{A \to B \quad B \to C}{A \to C.}$$

В каждом правиле формула под чертой называется *заключением* данного правила, а формулы над чертой (одна или две) называются *посылками* данного правила. Множество выводимых формул данного исчисления определяется как наименьшее множество, содержащее все аксиомы и замкнутое относительно правил вывода (то есть удовлетворяющее следующему условию: если все посылки некоторого правила принадлежат этому множеству, то и заключение данного правила принадлежит этому множеству).

Исчисление $\mathrm{L_H}$ называется *исчислением Ламбека.* Будем писать $\mathrm{L_H} \vdash A \to B$, если формула $A \to B$ выводима в исчислении $\mathrm{L_H}$.

Замечание 2.5. Неформально формула $A \to B$ означает неравенство $A \leqslant B$, если A и B обозначают элементы некоторой полугруппы с делением. Формально соответствующее утверждение будет доказано в теореме 2.39.

Упражнение 2.6. $\mathrm{L_H} \vdash (A \,/\, B) \cdot B \to A$.

Упражнение 2.7. $\mathrm{L_H} \vdash B \cdot (B \setminus A) \to A$.

Пример 2.8. $\mathrm{L_H} \vdash B \to A \,/\, (B \setminus A)$:

$$\cfrac{\cfrac{B \setminus A \to B \setminus A}{B \cdot (B \setminus A) \to A}}{B \to A \,/\, (B \setminus A).}$$

Замечание 2.9. В математической лингвистике исчисление Ламбека используется для задания множества корректных предложений. В специальном словаре устанавливается соответствие между словоформами и типами исчисления Ламбека. Для наглядности обозначим p_1, p_2 и p_3 через s (предложение), np (именная группа) и n (именная группа без артикля). Пусть в словаре имеются следующие записи: $np \triangleright Mary$, $np \triangleright John$, $np \triangleright Africa$, $(np \setminus s) \triangleright smiles$, $(np \setminus s) \triangleright sleeps$, $((np \setminus s) \setminus (np \setminus s)) \triangleright charmingly$, $((np \setminus s) / np) \triangleright reads$, $n \triangleright book$, $(np / n) \triangleright a$, $(n / n) \triangleright strange$, $(n / n) \triangleright green$, $((s \setminus s) / s) \triangleright whenever$, $(s / (np \setminus s)) \triangleright he$, $(s \,/\, (np \setminus s)) \triangleright she$, $((s \,/\, np) \setminus s) \triangleright him$, $((s \,/\, np) \setminus s) \triangleright her$. $(np \,/\, n) \triangleright this$, $np \triangleright this$. Тогда выводимость $np \cdot (np \setminus s) \to s$ показывает, что *Mary smiles* является предложением.

Замечание 2.10. Если добавить ещё два примитвных типа np^* (именная группа в множественном числе) и n^* (именная группа в множественном числе без артикля), то можно получить грамматику для значительного фрагмента английского языка.

Упражнение 2.11. $\mathrm{L_H} \vdash (A \setminus B) \cdot C \to A \setminus (B \cdot C)$.

Упражнение 2.12. $\mathrm{L_H} \vdash A \cdot (B \setminus C) \to (B \,/\, A) \setminus C$.

Определение 2.13. *Моделью исчисления Ламбека на полугруппе с делением* (или, для краткости, просто *моделью на полугруппе с делением*) называется такая четвёрка $\langle S, \circ, \leqslant, w\rangle$, где $\langle S, \circ, \leqslant\rangle$ — полугруппа с делением, а w — отображение из множества Tp в множество S, удовлетворяющее следующим трём соотношениям:

$$\begin{aligned} w(A \cdot B) &= w(A) \circ w(B),\\ w(A \setminus B) &= w(A) \setminus w(B),\\ w(A \,/\, B) &= w(A) \,/\, w(B). \end{aligned}$$

Замечание 2.14. Пусть $\langle S, \circ, \leqslant, w\rangle$ — модель на полугруппе с делением. Если даны значения функции w на элементах Pr, то остальные значения функции w определяются однозначно.

Определение 2.15. Формула $A \to B$ называется *истинной* в модели на полугруппе с делением $\langle S, \circ, \leqslant, w\rangle$, если $w(A) \leqslant w(B)$.

Определение 2.16. Пусть $\mathcal{C}$ — некоторое исчисление и $\mathcal{F}$ — множество всех формул его языка. Исчисление $\mathcal{C}$ называется *корректным* относительно класса моделей $\mathcal{K}$, если для каждой формулы $F \in \mathcal{F}$ из $\mathcal{C} \vdash F$ следует, что $(\forall \mathfrak{M} \in \mathcal{K})\, \mathfrak{M} \vDash F$. Исчисление $\mathcal{C}$ называется *полным* относительно класса моделей $\mathcal{K}$, если для каждой формулы $F \in \mathcal{F}$ из $(\forall \mathfrak{M} \in \mathcal{K})\, \mathfrak{M} \vDash F$ следует, что $\mathcal{C} \vdash F$.

Замечание 2.17. Если исчисление $\mathcal{C}$ корректно относительно класса моделей $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_2$, то исчисление $\mathcal{C}$ также корректно относительно класса моделей $\mathcal{K}_2$.

Замечание 2.18. Если исчисление $\mathcal{C}$ полно относительно класса моделей $\mathcal{K}_2$ и $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_2$, то исчисление $\mathcal{C}$ также полно относительно класса моделей $\mathcal{K}_1$.

Теорема 2.19. *Исчисление* $\mathrm{L_H}$ *корректно относительно моделей на полугруппах с делением (то есть если* $A \to B$ *выводима в* $\mathrm{L_H}$*, то* $A \to B$ *истинна во всех моделях на полугруппах с делением).*

Упражнение 2.20. $\mathrm{L_H} \nvdash p \setminus q \cdot r \to (p \setminus q) \cdot r$.

Определение 2.21. Результат замены всех вхождений p_i в типе A на тип B будем обозначать $A[p_i := B]$. (Это понятие можно определить рекурсивно по построению A.) При этом говорят, что тип $A[p_i := B]$ получен из типа A *подстановкой.*

Теорема 2.22 (о допустимости правила подстановки)**.** *Если* $\mathrm{L_H} \vdash A \to B$*, то* $\mathrm{L_H} \vdash A[p_i := C] \to B[p_i := C]$.

Проблема 2.23. Найти алгоритм, определяющий по типам A и B, не содержащим других примитивных типов, кроме p_1, существует ли такой тип C, что $\mathrm{L_H} \vdash A[p_1 := C] \to B[p_1 := C]$.

Теорема 2.24. *Если* $\mathrm{L_H} \vdash A_1 \to A_2$*, то* $\mathrm{L_H} \vdash A_1 \cdot B \to A_2 \cdot B$, $\mathrm{L_H} \vdash B \cdot A_1 \to B \cdot A_2$, $\mathrm{L_H} \vdash A_1 \,/\, B \to A_2 \,/\, B$, $\mathrm{L_H} \vdash B \,/\, A_2 \to B \,/\, A_1$, $\mathrm{L_H} \vdash B \setminus A_1 \to B \setminus A_2$, $\mathrm{L_H} \vdash A_2 \setminus B \to A_1 \setminus B$.

Определение 2.25. Типы A и B называются *эквивалентными* (обозначение $A \underset{\mathrm{L_H}}{\leftrightarrow} B$), если $\mathrm{L_H} \vdash A \to B$ и $\mathrm{L_H} \vdash B \to A$. Для краткости будем вместо $\underset{\mathrm{L_H}}{\leftrightarrow}$ использовать просто знак $\leftrightarrow$.

Упражнение 2.26. $(A \setminus B) \,/\, C \leftrightarrow A \setminus (B \,/\, C)$.

Упражнение 2.27. $A \,/\, (B \cdot C) \leftrightarrow (A \,/\, C) \,/\, B$.

Упражнение 2.28. $A \cdot (A \setminus (A \cdot B)) \leftrightarrow A \cdot B$.

Упражнение 2.29. $A \setminus (A \cdot (A \setminus B)) \leftrightarrow A \setminus B$.

Упражнение 2.30. $(A \,/\, B) \,/\, (B \,/\, B) \leftrightarrow A \,/\, B$.

Проблема 2.31. Найти алгоритм, определяющий по типам A и B, не содержащим других примитивных типов, кроме p_1, существует ли такой тип C, что $A[p_1 := C] \leftrightarrow B[p_1 := C]$.

Теорема 2.32. *Если* $\mathrm{L_H} \vdash A \leftrightarrow B$*, то* $\mathrm{L_H} \vdash A[p_i := C] \leftrightarrow B[p_i := C]$.

Теорема 2.33. *Отношение* $\leftrightarrow$ *является конгруэнцией, то есть если* $A_1 \leftrightarrow A_2$ *и* $B_1 \leftrightarrow B_2$*, то* $A_1 \cdot B_1 \leftrightarrow A_2 \cdot B_2$, $A_1 \setminus B_1 \leftrightarrow A_2 \setminus B_2$, $A_1 \,/\, B_1 \leftrightarrow A_2 \,/\, B_2$.

Теорема 2.34 (о допустимости правила замены)**.** *Если* $A \leftrightarrow B$*, то* $C[p_i := A] \leftrightarrow C[p_i := B]$.

Теорема 2.35. *Если* $A \leftrightarrow B$ *и* $B \leftrightarrow C$*, то* $A \leftrightarrow C$.

Теорема 2.36. *Если* $A \leftrightarrow B$*, то* $B \leftrightarrow A$.

Проблема 2.37. Можно ли аксиоматизировать теорию отношения $\leftrightarrow$ с помощью правил подстановки, замены, транзитивности, симметричности (см. теоремы 2.32, 2.34, 2.35, 2.36) и конечного множества аксиом вида $A \leftrightarrow B$ (например, из упражнений 2.26, 2.27, 2.28)?

Определение 2.38. Если исчисление $\mathcal{C}$ корректно и полно относительно одноэлементного класса $\{\mathfrak{M}\}$ (то есть для каждой формулы $F \in \mathcal{F}$ условия $\mathcal{C} \vdash F$ и $\mathfrak{M} \models F$ равносильны), то модель $\mathfrak{M}$ называется *универсальной моделью* исчисления $\mathcal{C}$.

Теорема 2.39. *Исчисление* $\mathrm{L_H}$ *полно относительно моделей на полугруппах с делением (то есть если* $A \to B$ *истинна во всех моделях на полугруппах с делением, то* $A \to B$ *выводима в* $\mathrm{L_H}$*) (см.* [35]*). Существует универсальная модель (то есть существует такая модель на полугруппе с делением, что в ней истинны все выводимые в* $\mathrm{L_H}$ *формулы и только они).*

Доказательство. Построим каноническую модель из классов эквивалентности типов по конгруэнции $\leftrightarrow$. Обозначим $[A] \rightleftharpoons \{B \in \mathrm{Tp} \mid A \leftrightarrow B\}$ для каждого $A \in \mathrm{Tp}$. Обозначим $S \rightleftharpoons \{[A] \mid A \in \mathrm{Tp}\}$. Положим $[A] \leqslant [B]$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{L_H} \vdash A \to B$. Положим $[A] \circ [B] \rightleftharpoons [A \cdot B]$, $[A] \,/\, [B] \rightleftharpoons [A \,/\, B]$, $[A] \setminus [B] \rightleftharpoons [A \setminus B]$. Эти определения корректны. Можно проверить, что $\langle S, \circ, \leqslant \rangle$ является полугруппой с делением.

Положим $w(A) \rightleftharpoons [A]$ для каждого $A \in \mathrm{Tp}$. Легко проверить, что $\langle S, \circ, \leqslant, w \rangle$ является универсальной моделью для исчисления $\mathrm{L_H}$. □

Упражнение 2.40. Пусть $\mathcal{K}$ — некоторое k-элементное конечное множество полугрупп с делением. Пусть ни один из этих полугрупп с делением не содержит больше m элементов. Доказать что найдутся такие целые числа n_1 и n_2, что $1 \leqslant n_1 < n_2 \leqslant m^{km} + 1$ и невыводимая секвенция $p_1^{n_1} \to p_1^{n_2}$ истинна в каждой модели на полугрурре с делением из множества $\mathcal{K}$.

3 Секвенциальное исчисление

3.1 Определение

Замечание 3.1. Определяемое в этом разделе секвенциальное исчисление поможет установить разрешимость проблемы выводимости в исчислении $\mathrm{L_H}$.

Определение 3.2. Для множества всех конечных последовательностей типов используем обозначение Tp^*, а для множества всех непустых конечных последовательностей типов — Tp^+. Символ Λ будет обозначать пустую последовательность типов. Прописные греческие буквы (кроме Λ и Σ) будем использовать для обозначения произвольных конечных (не обязательно непустых) последовательностей типов. Иногда будем писать $A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$ вместо $(\ldots(A_1 \cdot A_2) \cdot \ldots \cdot A_n)$. Если $\Gamma = A_1 \ldots A_n$, то $\bullet\Gamma \rightleftharpoons A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$.

Определение 3.3. Определим теперь исчисление L (см. [58]). Выводимыми объектами этого исчисления являются записи вида $A_1 \ \ldots \ A_n \to B$, где $n \geqslant 1$ (такие записи называются *секвенциями*). Интуитивно $A_1 \ \ldots \ A_n \to B$ означает то же, что и $A_1 \cdot \ldots \cdot A_n \to B$. Тип B называется *сукцедентом*, а последовательность $A_1 \ \ldots \ A_n$ — *антецедентом* секвенции $A_1 \ \ldots \ A_n \to B$. Иногда для ясности типы антецедента отделяют друг от друга запятыми.

Аксиомы исчисления L имеют вид $A \to A$. Выводы строятся с помощью следующих правил:

$$\frac{A\ \Pi \to B}{\Pi \to A \setminus B}\ (\to \setminus),\ \text{где } \Pi \neq \Lambda, \qquad \frac{\Pi \to A \quad \Gamma\ B\ \Delta \to C}{\Gamma\ \Pi\ (A \setminus B)\ \Delta \to C}\ (\setminus \to),$$

$$\frac{\Pi\ A \to B}{\Pi \to B \mathbin{/} A}\ (\to /),\ \text{где } \Pi \neq \Lambda, \qquad \frac{\Pi \to A \quad \Gamma\ B\ \Delta \to C}{\Gamma\ (B \mathbin{/} A)\ \Pi\ \Delta \to C}\ (/ \to),$$

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Delta \to B}{\Gamma\ \Delta \to A \cdot B}\ (\to \cdot), \qquad \frac{\Gamma\ A\ B\ \Delta \to C}{\Gamma\ (A \cdot B)\ \Delta \to C}\ (\cdot \to),$$

$$\frac{\Pi \to B \quad \Gamma\ B\ \Delta \to A}{\Gamma\ \Pi\ \Delta \to A}\ (\mathrm{cut}).$$

В каждом правиле секвенция под чертой называется *заключением* данного правила, а секвенции над чертой (одна или две) называются *посылками* данного правила.

Исчисление L называется *секвенциальным исчислением Ламбека* или просто *исчислением Ламбека.*

Пример 3.4. $\mathrm{L} \vdash ((p_1 \setminus p_2) \mathbin{/} p_3) \to (p_1 \setminus (p_2 \mathbin{/} p_3))$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p_3 \to p_3 \qquad \dfrac{p_1 \to p_1 \quad p_2 \to p_2}{p_1\ (p_1 \setminus p_2) \to p_2}\ (\setminus \to)}{p_1\ ((p_1 \setminus p_2) \mathbin{/} p_3)\ p_3 \to p_2}\ (/ \to)}{p_1\ ((p_1 \setminus p_2) \mathbin{/} p_3) \to (p_2 \mathbin{/} p_3)}\ (\to /)}{((p_1 \setminus p_2) \mathbin{/} p_3) \to (p_1 \setminus (p_2 \mathbin{/} p_3))}\ (\to \setminus).$$

Упражнение 3.5. $\mathrm{L} \vdash (A \mathbin{/} B)\ (B \mathbin{/} C) \to A \mathbin{/} C$.

Лемма 3.6. *Если* $\mathrm{L} \vdash \Gamma \to A$*, то* $\Gamma \neq \Lambda$.

Замечание 3.7. Выводимость секвенции $np\ (np \setminus s)\ ((np \setminus s) \setminus (np \setminus s)) \to s$ показывает, что *Mary smiles charmingly* является предложением языка, заданного в замечании 2.9.

Определение 3.8. В правилах $(\to \setminus)$, $(\to /)$ и $(\to \cdot)$ *главным типом* называется сукцедент заключения. В правилах $(\setminus \to)$, $(/ \to)$ и $(\cdot \to)$ *главным типом* называется тот тип в антецеденте заключения, который в схеме правила заключён в скобки.

Определение 3.9. Секвенция $A_1 \ \ldots \ A_n \to B$, где $n \geqslant 1$, называется *истинной* в модели на полугруппе с делением $\langle S, \circ, \leqslant, w\rangle$, если $w(A_1) \circ \ldots \circ w(A_n) \leqslant w(B)$.

Определение 3.10. *Длина типа A* обозначается $\|A\|$ и определяется как суммарное количество вхождений примитивных типов и знаков бинарных операций в A:

$$\begin{aligned} \|p_i\| &\rightleftharpoons 1, \\ \|A \cdot B\| &\rightleftharpoons \|A\| + \|B\| + 1, \\ \|A \setminus B\| &\rightleftharpoons \|A\| + \|B\| + 1, \\ \|A \,/\, B\| &\rightleftharpoons \|A\| + \|B\| + 1. \end{aligned}$$

Для последовательности типов полагаем

$$\|A_1 \ldots A_n\| \rightleftharpoons \|A_1\| + \ldots + \|A_n\|.$$

Естественно, $\|\Lambda\| \rightleftharpoons 0$.

3.2 Устранимость сечения

Приведём доказательство теоремы об устранимости сечения, опубликованное И. Ламбеком в работе (см. [58]).

Теорема 3.11. *Любую секвенцию, выводимую в исчислении Ламбека, можно вывести без использования правила* (cut).

Доказательство. Докажем индукцией по $\|\Phi\| + \|\Upsilon\| + \|\Psi\| + \|F\| + \|E\|$, что если секвенции $\Upsilon \to F$ и $\Phi F \Psi \to E$ выводимы в исчислении Ламбека без использования правила (cut), то секвенция $\Phi\Upsilon\Psi \to E$ тоже выводима без использования правила (cut). Рассмотрим семь (частично перекрывающихся) случаев.

Случай 1: $\Upsilon \to F$ является аксиомой.

Тогда заключение правила сечения совпадает с посылкой $\Phi F \Psi \to E$.

Случай 2: $\Phi F \Psi \to E$ является аксиомой.

Тогда заключение правила сечения совпадает с посылкой $\Upsilon \to F$.

Случай 3: тип F не является главным типом последнего правила в выводе секвенции $\Upsilon \to F$. Разделим этот случай на подслучаи в зависимости от последнего правила этого вывода.

Случай 3a: правило $(\setminus \to)$.

Дано

$$\dfrac{\dfrac{\Pi \to A \quad \Gamma B \Delta \to F}{\Gamma\Pi(A \setminus B)\Delta \to F}\,(\setminus \to) \qquad \Phi F \Psi \to E}{\Phi\Gamma\Pi(A \setminus B)\Delta\Psi \to E}\,(\mathrm{cut}).$$

Перестроим вывод так:

$$\dfrac{\Pi \to A \qquad \dfrac{\Gamma B \Delta \to F \quad \Phi F \Psi \to E}{\Phi\Gamma B \Delta\Psi \to E}\,(\mathrm{cut})}{\Phi\Gamma\Pi(A \setminus B)\Delta\Psi \to E}\,(\setminus \to).$$

Случай 3b: правило $(/ \to)$.

Вывод перестраивается аналогично случаю 3a.

Случай 3c: правило $(\cdot \to)$.

Вывод перестраивается аналогично случаю 3a.

Случай 4: тип F не является главным типом последнего правила в выводе секвенции $\Phi F \Psi \to E$. Этот случай разбирается аналогично случаю 3.

Случай 5: В последних правилах выводов секвенций $\Upsilon \to F$ и $\Phi F \Psi \to E$ вводится главная связка для типа $F = A \cdot B$.

Дано

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to A \quad \Delta \to B}{\Gamma\Delta \to A \cdot B}\,(\to \cdot) \qquad \dfrac{\Phi A B \Psi \to E}{\Phi(A \cdot B)\Psi \to E}\,(\cdot \to)}{\Phi\Gamma\Delta\Psi \to E}\,(\mathrm{cut}).$$

Перестроим вывод так:

$$\dfrac{\Delta \to B \qquad \dfrac{\Gamma \to A \quad \Phi A B \Psi \to E}{\Phi\Gamma B\Psi \to E}\,(\mathrm{cut})}{\Phi\Gamma\Delta\Psi \to E}\,(\mathrm{cut}).$$

Случай 6: В последних правилах выводов секвенций $\Upsilon \to F$ и $\Phi F \Psi \to E$ вводится главная связка для типа $F = A \setminus B$.

Дано

$$\dfrac{\dfrac{A\Upsilon \to B}{\Upsilon \to A \setminus B}\,(\to \setminus) \quad \dfrac{\Pi \to A \quad \Gamma B \Delta \to E}{\Gamma \Pi (A \setminus B) \Delta \to E}\,(\setminus \to)}{\Gamma \Pi \Upsilon \Delta \to E}\,(\mathrm{cut}).$$

Перестроим вывод так:

$$\dfrac{\Pi \to A \quad \dfrac{A\Upsilon \to B \quad \Gamma B \Delta \to E}{\Gamma A \Upsilon \Delta \to E}\,(\mathrm{cut})}{\Gamma \Pi \Upsilon \Delta \to E}\,(\mathrm{cut}).$$

Случай 7: В последних правилах выводов секвенций $\Upsilon \to F$ и $\Phi F \Psi \to E$ вводится главная связка для типа $F = B \,/\, A$.

Вывод перестраивается аналогично случаю 6. □

Пример 3.12. $\mathrm{L} \nvdash p_1 \to p_2 \cdot (p_2 \setminus p_1)$. $\mathrm{L} \nvdash p_1 \,/\, (p_2 \setminus p_1) \to p_2$.
Упражнение 3.13. Пусть $A = p_1 \,/\, (p_2 \,/\, (p_1 \setminus p_2))$. Выполняется ли $\mathrm{L} \vdash AA \to A$?
Упражнение 3.14. Пусть $A = (p_1 \,/\, (p_1 \setminus p_1)) \,/\, p_1$. Выполняется ли $\mathrm{L} \vdash AA \to A$?
Упражнение 3.15. Пусть $A = (p_2 \,/\, (p_1 \setminus p_2)) \,/\, p_1$. Выполняется ли $\mathrm{L} \vdash AA \to A$?
Упражнение 3.16. Пусть $A = p_1 \setminus (p_2 \,/\, (p_1 \setminus p_2))$. Выполняется ли $\mathrm{L} \vdash AA \to A$?
Проблема 3.17. Найти самую короткую секвенцию среди секвенций, у которых самый короткий вывод содержит сечение (длиной вывода считаем суммарную длину встречающихся в нём секвенций).

Теорема 3.18 (свойство подформульности)**.** *Если секвенция $\Gamma \to A$ выводима в* L*, то существует такой вывод секвенции $\Gamma \to A$, что каждая формула, встречающаяся в этом выводе, является подформулой некторой формулы, встречающейся в секвенции $\Gamma \to A$.*

Теорема 3.19. *Проблема выводимости в* L *разрешима.*

Определение 3.20. Секвенция $\Gamma' \to A'$ называется *подстановочным примером* секвенции $\Gamma \to A$, если секвенцию $\Gamma' \to A'$ можно получить из $\Gamma \to A$ посредством конечного числа подстановок. Здесь предполагается, что результат подстановки в секвенцию определён аналогично результату подстановки в тип (см. определение 2.21).
Проблема 3.21. Разрешима ли проблема существования выводимого подстановочного примера заданной секвенции.
Упражнение 3.22. Существует выводимый подстановочный пример секвенции $p_1 \cdot p_2 \to p_1$.
Упражнение 3.23. Ни один подстановочный пример секвенции $p_1 \to p_1 \cdot p_2$ не выводится в L.

3.3 Простые теоретико-доказательственные свойства

Замечание 3.24. Правило вывода задаёт (обычно бесконечное) множество примеров этого правила. В каждом конкретном выводе используются именно примеры правил.
Определение 3.25. Правило вывода называется *обратимым*, если нет таких примеров, где заключение выводимо (в рассматриваемом исчислении), а хотя бы одна посылка невыводима.

Лемма 3.26. *Правила* $(\to \setminus)$, $(\to /)$ *и* $(\cdot \to)$ *обратимы.*

Доказательство. Обратимость правила $(\to \setminus)$ устанавливается выводом

$$\dfrac{\Pi \to A \setminus B \quad \dfrac{A \to A \quad B \to B}{A(A \setminus B) \to B}\,(\setminus \to)}{A\Pi \to B}\,(\mathrm{cut}).$$

Обратимость правила $(\to /)$ устанавливается выводом

$$\dfrac{\Pi \to B \,/\, A \quad \dfrac{A \to A \quad B \to B}{(B \,/\, A)A \to B}\,(/ \to)}{\Pi A \to B}\,(\mathrm{cut}).$$

Обратимость правила $(\cdot \to)$ устанавливается выводом

$$\dfrac{\dfrac{A \to A \quad B \to B}{AB \to A \cdot B}\,(\to \cdot) \qquad \Gamma(A \cdot B)\Delta \to C}{\Gamma AB\Delta \to C}\ (\mathrm{cut}).$$

□

Лемма 3.27. *Если* $\mathrm{L_H} \vdash D \to E$, *то* $\mathrm{L} \vdash D \to E$.

Лемма 3.28. *Если* $\mathrm{L} \vdash \Gamma \to A$, *то* $\mathrm{L_H} \vdash \bullet\Gamma \to A$.

Теорема 3.29. $\mathrm{L} \vdash \Gamma \to A$ *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{L_H} \vdash \bullet\Gamma \to A$ (*см.* [58]).

Пример 3.30. $\mathrm{L_H} \nvdash p_1 \to p_2 \cdot (p_2 \setminus p_1)$. $\mathrm{L_H} \nvdash p_1 \,/\, (p_2 \setminus p_1) \to p_2$.
Пример 3.31. $\mathrm{L} \vdash B\ (A \,/\, B) \to A$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{L_H} \vdash B \cdot (A \,/\, B) \to A$.
Определение 3.32. Правило вывода называется *допустимым*, если каждый его пример сохраняет выводимость, то есть нет таких примеров, где все посылки выводимы (в рассматриваемом исчислении), а заключение невыводимо.
Упражнение 3.33. Допустимо ли правило $\dfrac{A_1 \cdot B \to A \cdot B \quad A \cdot B_1 \to A \cdot B}{A_1 \cdot B_1 \to A \cdot B}$?
Упражнение 3.34. Допустимо ли правило $\dfrac{A \cdot B \to A_1 \cdot B \quad A \cdot B \to A \cdot B_1}{A \cdot B \to A_1 \cdot B_1}$?

Теорема 3.35. *Правило, заданное схемой, не содержащей в посылках ни одной связки, является допустимым в* L *тогда и только тогда, когда оно выводимо в* L (*см.* [21]).

Теорема 3.36. *Правило, заданное схемой, не содержащей в посылках ни одной связки, является допустимым в* $\mathrm{L}(\setminus, /)$ *тогда и только тогда, когда оно выводимо в* L (*см.* [21]).

Проблема 3.37. Разрешима ли проблема допустимости правил, заданных схемами, возможно содержащими связки (хотя бы для $\mathrm{L}(\setminus)$)?
Проблема 3.38. Разрешима ли проблема полноты системы правил, заданных схемами (хотя бы для $\mathrm{L}(\setminus)$)?
Определение 3.39. Функция $\mathrm{dual}\colon \mathrm{Tp} \to \mathrm{Tp}$ определяется так:

$$\begin{aligned}
\mathrm{dual}(p_i) &\rightleftharpoons p_i,\\
\mathrm{dual}(A \cdot B) &\rightleftharpoons \mathrm{dual}(B) \cdot \mathrm{dual}(A),\\
\mathrm{dual}(A \setminus B) &\rightleftharpoons \mathrm{dual}(B) \,/\, \mathrm{dual}(A),\\
\mathrm{dual}(A \,/\, B) &\rightleftharpoons \mathrm{dual}(B) \setminus \mathrm{dual}(A).
\end{aligned}$$

Пример 3.40. $\mathrm{dual}(p_1 \,/\, (p_3 \cdot (p_3 \setminus p_6))) = ((p_6 \,/\, p_3) \cdot p_3) \setminus p_1$.

Лемма 3.41. *Пусть* $A \in \mathrm{Tp}$. *Тогда* $\mathrm{dual}(\mathrm{dual}(A)) = A$.

Определение 3.42. Функция $\mathrm{dual}\colon \mathrm{Tp}^* \to \mathrm{Tp}^*$ определяется так:

$$\begin{aligned}
\mathrm{dual}(A_1\ \ldots\ A_n) &\rightleftharpoons \mathrm{dual}(A_n)\ \ldots\ \mathrm{dual}(A_1),\\
\mathrm{dual}(\Lambda) &\rightleftharpoons \Lambda.
\end{aligned}$$

Каждой секвенции $\Gamma \to A$ ставится в соответствие *двойственная* секвенция $\mathrm{dual}(\Gamma \to A)$, определяемая как $\mathrm{dual}(\Gamma) \to \mathrm{dual}(A)$.
Пример 3.43. $\mathrm{dual}((p \setminus q)\ (q \setminus r) \to p \setminus r) = (r \,/\, q)\ (q \,/\, p) \to r \,/\, p$.

Теорема 3.44. $\mathrm{L} \vdash \Gamma \to A$ *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{L} \vdash \mathrm{dual}(\Gamma) \to \mathrm{dual}(A)$.

Упражнение 3.45. Если $A \leftrightarrow B$, то $\mathrm{dual}(A) \leftrightarrow \mathrm{dual}(B)$.

Теорема 3.46. *Любую секвенцию, выводимую в исчислении Ламбека, можно вывести без правила* (cut) *так, что все используемые аксиомы имеют вид* $p_i \to p_i$ *(т. е. в аксиомах встречаются только примитивные типы).*

Доказательство. Рассмотрим исчисление, где исключены аксиомы с непримитивными типами и нет правила (cut). Достаточно доказать, что в этом исчислении выводимы все секвенции вида $A \to A$. Сделаем это индукцией по построению типа A.

Случай 1: $A = p_i$.

В этом случае $A \to A$ является аксиомой рассматриваемого исчисления.

Случай 2: $A = B \cdot C$.

По предположению индукции выводимы секвенции $B \to B$ и $C \to C$. Выведем секвенцию $B \cdot C \to B \cdot C$ следующим образом:

$$\cfrac{\cfrac{B \to B \quad C \to C}{BC \to B \cdot C}\,(\to \cdot)}{B \cdot C \to B \cdot C}\,(\cdot \to).$$

Случай 3: $A = B \setminus C$.

По предположению индукции выводимы секвенции $B \to B$ и $C \to C$. Выведем секвенцию $B \setminus C \to B \setminus C$ следующим образом:

$$\cfrac{\cfrac{B \to B \quad C \to C}{B(B \setminus C) \to C}\,(\setminus \to)}{B \setminus C \to B \setminus C}\,(\to \setminus).$$

Случай 4: $A = C \,/\, B$.

По предположению индукции выводимы секвенции $B \to B$ и $C \to C$. Выведем секвенцию $C \,/\, B \to C \,/\, B$ следующим образом:

$$\cfrac{\cfrac{B \to B \quad C \to C}{(C \,/\, B)B \to C}\,(/ \to)}{C \,/\, B \to C \,/\, B}\,(\to /).$$

□

Лемма 3.47. *Если* $\mathrm{L} \vdash A_1 \ \ldots \ A_n \to B$, *то* $\mathrm{L} \vdash (C \,/\, (C \,/\, A_1)) \ \ldots \ (C \,/\, (C \,/\, A_n)) \to (C \,/\, (C \,/\, B))$ (*см.* [21]).

Лемма 3.48. *Пусть секвенция* $A_1 \ \ldots \ A_n \to B$ *не содержит примитивного типа* t. *Если* $\mathrm{L} \vdash (t \,/\, (t \,/\, A_1)) \ \ldots \ (t \,/\, (t \,/\, A_n)) \to (t \,/\, (t \,/\, B))$, *то* $\mathrm{L} \vdash A_1 \ \ldots \ A_n \to B$ (*см.* [21]).

4 Варианты исчисления Ламбека

4.1 Исчисление Ламбека с единицей

Определение 4.1. Исчисление L^* получается из исчисления L, если разрешить использовать секвенции вида $\Lambda \to B$ (отбрасываются ограничение $n \geqslant 1$ в определении секвенции и ограничение $\Pi \neq \Lambda$ при правилах $(\to \setminus)$ и $(\to /)$).

Упражнение 4.2. $\mathrm{L}^* \vdash B \,/\, (A \,/\, A) \to B$.

Упражнение 4.3. $\mathrm{L}^* \nvdash ((p_1 \setminus p_2) \setminus p_3) \setminus p_4 \to p_3 \setminus ((p_2 \setminus p_1) \setminus p_4)$.

Упражнение 4.4. Существуют ли такие типы $A, B, C, D \in \mathrm{Tp}(\setminus)$, что $\mathrm{L}^* \vdash ((A \setminus B) \setminus C) \setminus D \to C \setminus ((B \setminus A) \setminus D)$?

Упражнение 4.5. $\mathrm{L}^* \nvdash p_3 \setminus ((p_2 \setminus p_1) \setminus p_4) \to ((p_1 \setminus p_2) \setminus p_3) \setminus p_4$.

Упражнение 4.6. $(A \setminus A) \setminus (A \setminus B) \underset{\mathrm{L}^*}{\leftrightarrow} A \setminus B$.

Упражнение 4.7. $(B \setminus A) \,/\, (A \setminus A) \underset{\mathrm{L}^*}{\leftrightarrow} B \setminus A$.

Упражнение 4.8. $(B \setminus A) \cdot (A \setminus A) \underset{\mathrm{L}^*}{\leftrightarrow} B \setminus A$.

Упражнение 4.9. Найти такой тип $C \in \mathrm{Tp}(\setminus)$, что для любого типа $A \in \mathrm{Tp}$ имеем $\mathrm{L}^* \vdash \to A[p_1 := C,\ p_2 := C, \ldots]$.

Упражнение 4.10. Каждое допустимое в L^* правило является допустимым также в $\mathrm{L}^*(p_1)$.

Упражнение 4.11. Каждое допустимое в $\mathrm{L}^*(p_1)$ правило, заданное схемой, является допустимым также в L^*.

Проблема 4.12. Существует ли правило, заданное схемой, не содержащей в посылках ни одной связки, допустимое в L^*, но не выводимое в L^*?

Определение 4.13. Через Tp_1 обозначается множество всех типов, построенных из элементов множества Pr и константы $\mathbf{1}$ с помощью трёх бинарных операторов $\boldsymbol{\cdot}$, $\backslash$ и $/$.

Определение 4.14. Исчисление L_1 получается из исчисления L^* добавлением аксиомы $\to \mathbf{1}$ и правила $\dfrac{\Gamma\,\Delta \to A}{\Gamma\,\mathbf{1}\,\Delta \to A}$ $(\mathbf{1}\to)$. При этом вместо множества типов Tp используется множество Tp_1.

Упражнение 4.15. $\mathrm{L}_1 \vdash \mathbf{1} \cdot A \to A$ и $\mathrm{L}_1 \vdash A \to \mathbf{1} \cdot A$.

Упражнение 4.16. $\mathrm{L}_1 \vdash \mathbf{1} \setminus A \to A$ и $\mathrm{L}_1 \vdash A \to \mathbf{1} \setminus A$.

Упражнение 4.17. $\mathrm{L}_1 \vdash B \cdot (\mathbf{1} \,/\, A) \to B \,/\, A$.

Теорема 4.18. *В* L_1 *сечение устранимо.*

Теорема 4.19. *Исчисление* L_1 *является консервативным расширением исчисления* L^**.*

Теорема 4.20. *В* L^* *сечение устранимо.*

Определение 4.21. *Моноидом* называется алгебраическая система $\langle S, \circ, \mathbf{1}\rangle$, где $\langle S, \circ\rangle$ — полугруппа и выполняется свойство $(\forall x \in S)\, x \circ \mathbf{1} = x = \mathbf{1} \circ x$.

Определение 4.22. *Моноидом с делением* называется алгебраическая система $\langle S, \circ, \mathbf{1}, \leqslant\rangle$, где $\langle S, \circ, \mathbf{1}\rangle$ — моноид, а $\langle S, \circ, \leqslant\rangle$ — полугруппа с делением.

Определение 4.23. *Моделью исчисления* L_1 *на моноиде с делением* называется такая пятёрка $\langle S, \circ, \mathbf{1}, \leqslant, w\rangle$, где $\langle S, \circ, \mathbf{1}, \leqslant\rangle$ — моноид с делением, а w — отображение из множества Tp_1 в множество S, удовлетворяющее следующим четырём соотношениям:

$$\begin{aligned} w(A \cdot B) &= w(A) \circ w(B),\\ w(A \setminus B) &= w(A) \setminus w(B),\\ w(A \,/\, B) &= w(A) \,/\, w(B),\\ w(\mathbf{1}) &= \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Определение 4.24. Пусть $\langle S, \circ, \mathbf{1}, \leqslant, w\rangle$ — модель на моноиде с делением. Тогда введём естественное отображение из множества Tp_1^* в множество S, обозначаемое также w:

$$w(A_1\ \ldots\ A_n) \rightleftharpoons \mathbf{1} \circ w(A_1) \circ \ldots \circ w(A_n).$$

Лемма 4.25. *Пусть* $\langle S, \circ, \mathbf{1}, \leqslant, w\rangle$ *— модель исчисления* L_1 *на моноиде с делением. Тогда* $w(\Gamma\Delta) = w(\Gamma) \circ w(\Delta)$ *для любых* $\Gamma \in \mathrm{Tp}_1^*$ *и* $\Delta \in \mathrm{Tp}_1^*$*.*

Определение 4.26. Секвенция $\Gamma \to A$ называется *истинной* в модели на моноиде с делением $\langle S, \circ, \mathbf{1}, \leqslant, w\rangle$, если $w(\Gamma) \leqslant w(A)$.

Теорема 4.27. *Исчисление* L_1 *корректно и полно относительно моделей на моноидах с делением. Существует универсальная модель.*

Доказательство. Каноническая модель состоит из классов эквивалентности типов (из Tp_1) по конгруэнции $\leftrightarrow_{\mathrm{L}_1}$. □

Теорема 4.28. *Исчисление* L^* *корректно и полно относительно моделей на моноидах с делением. Существует универсальная модель.*

Определение 4.29. Исчисление $\mathrm{L}_{1\mathrm{H}}$ получается из исчисления L_{H} добавлением аксиом $A \to \mathbf{1} \cdot A$, $\mathbf{1} \cdot A \to A$, $A \to A \cdot \mathbf{1}$ и $A \cdot \mathbf{1} \to A$. При этом вместо множества типов Tp используется множество Tp_1.

Теорема 4.30. $\mathrm{L}_1 \vdash \Gamma \to A$ *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{L}_{1\mathrm{H}} \vdash \bullet\Gamma \to A$*.*

Теорема 4.31. $\mathrm{L}_1 \vdash A_1 \ldots A_n \to B$ *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{L}^* \vdash \tilde{A}_1 \ldots \tilde{A}_n \to \tilde{B}$*, где операция* $C \mapsto \tilde{C}$ *определяется так:*

$$\begin{aligned} \tilde{p}_i &\rightleftharpoons (p_1 \setminus p_1) \cdot p_{i+1} \cdot (p_1 \setminus p_1),\\ \tilde{\mathbf{1}} &\rightleftharpoons (p_1 \setminus p_1),\\ \widetilde{A \cdot B} &\rightleftharpoons \widetilde{A} \cdot \widetilde{B},\\ \widetilde{A \setminus B} &\rightleftharpoons \widetilde{A} \setminus \widetilde{B},\\ \widetilde{A \,/\, B} &\rightleftharpoons \widetilde{A} \,/\, \widetilde{B} \end{aligned}$$

(*см.* [7, теорема 9]).

4.2 Исчисление Ламбека с одним примитивным типом

Определение 4.32. Если в исчислении L ограничиться типами, не содержащими других примитивных типов, кроме p_1, то полученное исчисление обозначается $\mathrm{L}(p_1)$.
Упражнение 4.33. $\mathrm{L}(p_1) \vdash (p_1 \,/\, p_1)\ (p_1 \,/\, p_1)\ p_1\ (p_1 \setminus p_1) \to p_1$.

Теорема 4.34. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Существуют такие типы $A_1, \ldots, A_n$ из $\mathrm{Tp}(\setminus; p)$, что при $\Gamma C \in \mathrm{Tp}(p_1, \ldots, p_n)^+$ имеют место равносильности*

$$\mathrm{L}^* \vdash \Gamma \to A \iff \mathrm{L}^*(p) \vdash \big(\Gamma \to A\big)[p_1 := A_1, \ldots, p_n := A_n]$$

и

$$\mathrm{L} \vdash \Gamma \to A \iff \mathrm{L}(p) \vdash \big(\Gamma \to A\big)[p_1 := A_1, \ldots, p_n := A_n].$$

Доказательство. Положим $A_k \rightleftharpoons p^k \setminus p \,/\, p^{n+1-k}$. Утверждение про L^* следует из результата Ф. Метейе про линейную логику (см. [71]). Утверждение про L доказывается аналогично. □

Следствие 4.35. *В исчислении $\mathrm{L}(p_1)$ допустимы те же правила, что в исчислении* L.

4.3 Элементарные фрагменты исчисления Ламбека

Определение 4.36. Если в исчислении L ограничиться типами, не содержащими ни $\cdot$, ни $/$, то получается исчисление $\mathrm{L}(\setminus)$. Аналогично определяются исчисления $\mathrm{L}(\setminus, /)$, $\mathrm{L}(\cdot, \setminus)$, $\mathrm{L_H}(\setminus, /)$ и др.
Упражнение 4.37. $\mathrm{L}(\setminus) \vdash (A \setminus (B \setminus A))\ (A \setminus (B \setminus A))\ (A \setminus (B \setminus A)) \to A \setminus (B \setminus (B \setminus (B \setminus A)))$.
Упражнение 4.38. $\mathrm{L}(\setminus) \vdash (B \setminus C)\ ((D \setminus C) \setminus E) \to (D \setminus B) \setminus E$.
Упражнение 4.39. $\mathrm{L}(\setminus) \vdash (A \setminus (B \setminus C))\ ((D \setminus C) \setminus E) \to A \setminus ((D \setminus B) \setminus E)$.
Упражнение 4.40. $\mathrm{L}(\setminus, /) \vdash ((B \,/\, A) \setminus C) \setminus D \to (B \setminus C) \setminus (A \setminus D)$.
Упражнение 4.41. $\mathrm{L}(\setminus, /) \vdash ((B \,/\, A) \setminus B) \setminus D \to (C \setminus A) \setminus (C \setminus D)$.

Теорема 4.42. *Исчисление $\mathrm{L_H}(\cdot, \setminus)$ можно задать аксиомами $A \to A$, $(A \cdot B) \cdot C \to A \cdot (B \cdot C)$, $A \cdot (B \cdot C) \to (A \cdot B) \cdot C$ и правилами*

$$\frac{A \cdot C \to B}{C \to A \setminus B,} \qquad \frac{C \to A \setminus B}{A \cdot C \to B,} \qquad \frac{A \to B \quad B \to C}{A \to C,} \qquad \frac{A \to B}{A \cdot C \to B \cdot C.}$$

Замечание 4.43. В теореме 4.42 можно последнее правило заменить на $\dfrac{A \to B}{B \setminus C \to A \setminus C}$.

Лемма 4.44 (Ю. В. Саватеев, 2004)**.** *Если $\mathrm{L}(\setminus) \vdash \Gamma p_i \to p_j$, то $\Gamma = \Lambda$ и $i = j$.*

Теорема 4.45 (Ю. В. Саватеев, 2004)**.** *Исчисление $\mathrm{L}(\setminus)$ можно задать аксиомами $p_i \to p_i$ и правилами*

$$\frac{A\ \Pi \to B}{\Pi \to A \setminus B}\ ,\ \textit{где}\ \Pi \neq \Lambda, \qquad \frac{\Pi \to A \quad \Gamma\ B \to p_i}{\Gamma\ \Pi\ (A \setminus B) \to p_i.}$$

Доказательство. Индукция по выводу аналогично лемме 4 из курсовой работы Ю. В. Саватеева (на 3-м курсе). □

Теорема 4.46 (Ю. В. Саватеев, 2004)**.** *Исчисление $\mathrm{L_H}(\setminus)$ можно задать аксиомой $A \to A$ и правилами*

$$\frac{A \to B \quad C \to D}{B \setminus C \to A \setminus D,} \qquad \frac{A \to B \setminus C \quad D \to E}{A \to (E \setminus B) \setminus (D \setminus C),} \qquad \frac{A \to B \setminus C \quad D \to E}{(C \setminus D) \to A \setminus (B \setminus E),} \qquad \frac{A \to B \setminus C \quad C \to D}{A \to B \setminus D.}$$

Следствие 4.47. *Исчисление $\mathrm{L_H}(\setminus)$ можно задать аксиомами $A \to A$, $B \setminus C \to (A \setminus B) \setminus (A \setminus C)$ и правилами*

$$\frac{A \to B \quad B \to C}{A \to C,} \qquad \frac{A \to B \quad C \to D}{B \setminus C \to A \setminus D.}$$

Теорема 4.48 (И. А. Болгова, 2002)**.** *Пусть $A, B \in \mathrm{Tp}(\setminus)$. Тогда утверждение $A \leftrightarrow B$ равносильно тому, что $A = B$.*

Доказательство. Индукция по $\|A\| + \|B\|$. Шаг индукции. Пусть $\mathrm{L}(\backslash) \vdash A_1 \backslash \ldots \backslash A_m \backslash p_k \to B_1 \backslash \ldots \backslash B_n \backslash p_l$ и $\mathrm{L}(\backslash) \vdash B_1 \backslash \ldots \backslash B_n \backslash p_l \to A_1 \backslash \ldots \backslash A_m \backslash p_k$. Тогда $p_k = p_l$, $m = n$ и $A_i \leftrightarrow B_i$ для каждого i. □

Теорема 4.49. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Существуют такие типы $A_1, \ldots, A_n$ из $\mathrm{Tp}(\backslash; p)$, что при $\Gamma C \in \mathrm{Tp}(\backslash; p_1, \ldots, p_n)^+$ имеют место равносильности*

$$\mathrm{L}(\backslash) \vdash \Gamma \to C \iff \mathrm{L}(\backslash; p) \vdash \big(\Gamma \to C\big)[p_1 := A_1, \ldots, p_n := A_n]$$

и

$$\mathrm{L}^*(\backslash) \vdash \Gamma \to C \iff \mathrm{L}^*(\backslash; p) \vdash \big(\Gamma \to C\big)[p_1 := A_1, \ldots, p_n := A_n]$$

(*см.* [7, теоремы 4 и 4*]).

Доказательство.

$$A_k \rightleftharpoons \big(p^{k+1} \cdot \big((p \backslash (p \backslash p)) \backslash p\big) \cdot p^{n-k+1}\big) \backslash p.$$

□

Теорема 4.50. $\mathrm{L}_1(\backslash) \vdash A_1 \ldots A_n \to B$ *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{L}^*(\backslash) \vdash \tilde{A}_1 \ldots \tilde{A}_n \to \tilde{B}$*, где операция $C \mapsto \tilde{C}$ определяется так:*

$$\begin{aligned} \tilde{p_i} &\rightleftharpoons (p_1 \backslash p_1) \backslash (p_{i+1} \backslash p_1), \\ \tilde{\mathbf{1}} &\rightleftharpoons (p_1 \backslash p_1), \\ \widetilde{A \cdot B} &\rightleftharpoons \widetilde{A} \cdot \widetilde{B}, \\ \widetilde{A \backslash B} &\rightleftharpoons \widetilde{A} \backslash \widetilde{B}, \\ \widetilde{A \,/\, B} &\rightleftharpoons \widetilde{A} \,/\, \widetilde{B} \end{aligned}$$

(*см.* [6]).

Определение 4.51. Функция $\mathrm{ord}\colon \mathrm{Tp}(\backslash, /) \to \mathbb{N}$ определяется так:

$$\begin{aligned} \mathrm{ord}(p_i) &\rightleftharpoons 0, \\ \mathrm{ord}(A \backslash B) &\rightleftharpoons \max(\mathrm{ord}(A) + 1, \mathrm{ord}(B)), \\ \mathrm{ord}(B \,/\, A) &\rightleftharpoons \max(\mathrm{ord}(A) + 1, \mathrm{ord}(B)). \end{aligned}$$

Число $\mathrm{ord}(A)$ будем называеть *хорновским порядком* типа A.
Пример 4.52. $\mathrm{ord}((p_1 \,/\, (p_3 \backslash p_6)) \,/\, p_3) = 2$.

4.4 Консервативные расширения исчисления Ламбека

Определение 4.53. Пусть $\mathcal{C}_1$ — некоторое исчисление и $\mathcal{F}_1$ — множество всех формул его языка. Пусть $\mathcal{C}_2$ — некоторое исчисление и $\mathcal{F}_2$ — множество всех формул его языка. Исчисление $\mathcal{C}_2$ является *расширенем* исчисления $\mathcal{C}_1$, если $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ и для каждой формулы $F \in \mathcal{F}_1$ из $\mathcal{C}_1 \vdash F$ следует, что $\mathcal{C}_2 \vdash F$. Исчисление $\mathcal{C}_2$ является *консервативным расширенем* исчисления $\mathcal{C}_1$, если оно является расширенем исчисления $\mathcal{C}_1$ и для каждой формулы $F \in \mathcal{F}_1$ из $\mathcal{C}_1 \nvdash F$ следует, что $\mathcal{C}_2 \nvdash F$.
Упражнение 4.54. Исчисление L является консервативным расширенем исчисления $\mathrm{L}(p_1)$.
Упражнение 4.55. Исчисление L является консервативным расширенем исчисления $\mathrm{L}(\backslash)$.
Упражнение 4.56. Если исчисление $\mathcal{C}_2$ является консервативным расширенем исчисления $\mathcal{C}_1$, то каждое допустимое в $\mathcal{C}_2$ правило является допустимым также в $\mathcal{C}_1$.
Определение 4.57. Через $\mathrm{Tp}(\cdot, \backslash, /, \cup, \cap)$ обозначается множество всех типов, построенных из элементов множества Pr с помощью бинарных операторов $\cdot$, $\backslash$, $/$, $\cup$ и $\cap$.
Определение 4.58. Исчисление $\mathrm{L}(\cdot, \backslash, /, \cup, \cap)$ получается из исчисления L добавлением правил

$$\frac{\Pi \to A \quad \Pi \to B}{\Pi \to A \cap B} \qquad \frac{\Gamma\ A\ \Delta \to C}{\Gamma\ (A \cap B)\ \Delta \to C} \qquad \frac{\Gamma\ B\ \Delta \to C}{\Gamma\ (A \cap B)\ \Delta \to C}$$

и

$$\frac{\Pi \to A}{\Pi \to A \cup B} \qquad \frac{\Pi \to B}{\Pi \to A \cup B} \qquad \frac{\Gamma\ A\ \Delta \to C \quad \Gamma\ B\ \Delta \to C}{\Gamma\ (A \cup B)\ \Delta \to C}\ .$$

При этом вместо множества типов Tp используется множество $\mathrm{Tp}(\cdot, \backslash, /, \cup, \cap)$.

Теорема 4.59. *В исчислении* $\mathrm{L}(\cdot, \backslash, /, \cup, \cap)$ *сечение устранимо.*

Теорема 4.60. *Исчисление* $\mathrm{L}(\cdot, \backslash, /, \cup, \cap)$ *является консервативным расширением исчисления* L.

Замечание 4.61. В линейной логике связка, соответствующая $\cdot$, называется мультипликативной конъюнкцией, а связка, соответствующая $\cap$, называется аддитивной конъюнкцией (см. [111]).

Определение 4.62. Через $\mathrm{Tp}(\cdot, \backslash, /, \Uparrow)$ обозначается множество всех типов, построенных из элементов множества Pr с помощью бинарных операторов $\cdot$, $\backslash$, $/$ и $\Uparrow$.

Определение 4.63. Исчисление $\mathrm{L}(\cdot, \backslash, /, \Uparrow)$ получается из исчисления L добавлением аксиом $A \to A \Uparrow B$ и $A \Uparrow B \to (C \setminus B) \,/\, (A \setminus (C \setminus B))$. При этом вместо множества типов Tp используется множество $\mathrm{Tp}(\cdot, \backslash, /, \Uparrow)$.

4.5 Добавление структурных правил

Определение 4.64. Исчисление LP получается из исчисления L добавлением правила $\dfrac{\Gamma\ A\ B\ \Delta \to C}{\Gamma\ B\ A\ \Delta \to C}$ (P).

Упражнение 4.65. $\mathrm{LP} \vdash A \,/\, B \to B \setminus A$ и $\mathrm{LP} \vdash B \setminus A \to A \,/\, B$.

Теорема 4.66. *В* LP *сечение устранимо.*

Теорема 4.67. *Исчисление* LP *корректно и полно относительно моделей на коммутативных полугруппах с делением. Существует универсальная модель.*

Доказательство. Каноническая модель состоит из классов эквивалентности типов по конгруэнции $\leftrightarrow_{\mathrm{LP}}$. □

Определение 4.68. Исчисление $\mathrm{LP_H}$ получается из исчисления $\mathrm{L_H}$ добавлением аксиом $A \cdot B \to B \cdot A$ и $B \cdot A \to A \cdot B$.

Теорема 4.69. $\mathrm{LP} \vdash \Gamma \to A$ *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{LP_H} \vdash \bullet\Gamma \to A$.

Замечание 4.70. Изучаются также исчисления, получаемые из исчисления L добавлением правила $\dfrac{\Gamma\ A\ A\ \Delta \to B}{\Gamma\ A\ \Delta \to B}$ (C) или $\dfrac{\Gamma\ \Delta \to B}{\Gamma\ A\ \Delta \to B}$ (M).

Замечание 4.71. Исчисление LPCM^* (полученное из L^* добавлением правил P, C, M), по существу, является фрагментом интуиционистского исчисления высказываний со связками $\wedge$ и $\to$.

4.6 Неассоциативное исчисление Ламбека

Определение 4.72. Определим теперь исчисление $\mathrm{NL}(\backslash, /)$ (см. [59]). Прописные греческие буквы (кроме Λ и Σ) будем использовать для обозначения *скобочных последовательностей типов*, определённых так:

- каждый тип является скобочной последовательностью типов,
- если Γ и Δ являются скобочными последовательностьями типов, то и $[\Gamma, \Delta]$ является скобочной последовательностью типов.

Выводимыми объектами исчисления $\mathrm{NL}(\backslash, /)$ являются секвенции вида $\Gamma \to A$, где $A \in \mathrm{Tp}$ и Γ является скобочной последовательностью типов.

Аксиомы исчисления $\mathrm{NL}(\backslash, /)$ имеют вид $A \to A$. Выводы строятся с помощью следующих правил:

$$\frac{[A, \Pi] \to B}{\Pi \to A \setminus B}\ (I\backslash), \qquad \frac{\Gamma \to A \quad \Delta \to A \setminus B}{[\Gamma, \Delta] \to B}\ (E\backslash),$$

$$\frac{[\Pi, A] \to B}{\Pi \to B \,/\, A}\ (I/), \qquad \frac{\Gamma \to B \,/\, A \quad \Delta \to A}{[\Gamma, \Delta] \to B}\ (E/).$$

(Это так называемая система естественного вывода.)

5 Модели исчисления Ламбека

Теорема 5.1. *Исчисление* L^* *полно относительно моделей на конечных моноидах с делением* (*см.* [105, 47, 48]).

Теорема 5.2. *Исчисление* L *полно относительно моделей на конечных полугруппах с делением.*

Доказательство. В препринте [105] изложено доказательство для исчисления L^* (которое там обозначается через **L**), а в сноске на с. 4 утверждается, что все результаты того препринта легко переносятся на случай L. Полное доказательство для исчисления L дано в [23] (там же утраняется пробел в доказательстве теоремы 4.2 из [105], связвнный с леммой 4.6). □

Упражнение 5.3. Существует ли такая модель на конечной полугруппе с делением, что в этой модели истинны только выводимые в L формулы?

Определение 5.4. Пусть $\langle S, \circ \rangle$ — полугруппа. Модель исчисления Ламбека на полугруппе с делением $\langle \mathcal{P}(S), \cdot, \subseteq \rangle$, построенной в примере 1.21, называется *моделью на подмножествах полугруппы.*

Теорема 5.5. *Исчисление* L *полно относительно моделей на подмножествах полугрупп* (*см.* [35]). *Существует универсальная модель.*

Определение 5.6. L-*модель* — модель на подмножествах свободной полугруппы.

Упражнение 5.7. Пусть $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$. Тогда для каждой L-модели $\langle \mathcal{P}(\Sigma_1^+), \cdot, \subseteq, w_1 \rangle$ существует такая L-модель $\langle \mathcal{P}(\Sigma_2^+), \cdot, \subseteq, w_2 \rangle$, что в них истинны одни и те же секвенции.

Теорема 5.8. *Исчисление* $\mathrm{L}(\backslash, /)$ *полно относительно* L-*моделей, и даже существует универсальная модель. Другими словами, существует* L-*модель, в которой ложна каждая невыводимая в исчислении Ламбека секвенция, не содержащая операции умножения.*

Доказательство. Приведём доказательство, опубликованное В. Бушковским в статье [31].

Обозначим множество всех типов, не содержащих операции умножения, через $\mathrm{Tp}(\backslash, /)$. Рассмотрим свободную полугруппу $\langle \mathcal{W}^+, \circ \rangle$, где $\mathcal{W} \rightleftharpoons \mathrm{Tp}(\backslash, /)$. Определим функцию $w\colon \mathrm{Tp}(\backslash, /) \to \mathcal{P}(\mathrm{Tp}(\backslash, /)^+)$ следующим образом

$$w(A) \rightleftharpoons \{\Gamma \in \mathrm{Tp}(\backslash, /)^+ \mid \mathrm{L} \vdash \Gamma \to A\}.$$

Докажем, что $\mathrm{L} \vdash A\Pi \to B$ тогда и только тогда, когда $w(A) \circ \Pi \subseteq w(B)$. Если $\mathrm{L} \vdash A\Pi \to B$, то для любой последовательности $\Gamma \in w(A)$ верно $\mathrm{L} \vdash \Gamma\Pi \to B$ (по правилу (cut)). Поэтому из $\mathrm{L} \vdash A\Pi \to B$ следует $w(A) \circ \Pi \subseteq w(B)$. Если $w(A) \circ \Pi \subseteq w(B)$, то $A\Pi \subseteq w(B)$ (так как $A \in w(A)$) и, следовательно, $\mathrm{L} \vdash A\Pi \to B$.

Используя лемму 3.26 получаем

$$\Pi \in w(A \setminus B) \;\Leftrightarrow\; \mathrm{L} \vdash \Pi \to A \setminus B \;\Leftrightarrow\; \mathrm{L} \vdash A\Pi \to B \;\Leftrightarrow\; w(A) \circ \Pi \subseteq w(B).$$

Аналогично

$$\Pi \in w(B \,/\, A) \;\Leftrightarrow\; \Pi \circ w(A) \subseteq w(B).$$

Тем самым установлено, что для любых $A \in \mathrm{Tp}(\backslash, /)$ и $B \in \mathrm{Tp}(\backslash, /)$

$$w(A \setminus B) = \{\Pi \in \mathrm{Tp}(\backslash, /)^+ \mid w(A) \circ \Pi \subseteq w(B)\},$$
$$w(B \,/\, A) = \{\Pi \in \mathrm{Tp}(\backslash, /)^+ \mid \Pi \circ w(A) \subseteq w(B)\},$$

т. е. $\langle \mathcal{W}^+, \circ, w \rangle$ — L-модель.

Построенная каноническая модель является универсальной для исчисления Ламбека без операции умножения, т. е. в ней ложны все невыводимые секвенции этого исчисления. Заметим, что аналогичная конструкция не проходит в исчислении Ламбека с операцией умножения. □

Замечание 5.9. Метод из приведённого выше доказательства теоремы 5.8 не подходит для исчисления Ламбека с умножением. Если положить

$$w(A) \rightleftharpoons \{\Gamma \in \mathrm{Tp}^+ \mid \mathrm{L} \vdash \Gamma \to A\},$$

то $w(A \cdot B) \supseteq w(A) \cdot w(B)$, но не гарантируется, что $w(A \cdot B) = w(A) \cdot w(B)$. Например, $p\,(p \setminus (q \cdot r)) \notin w(q) \cdot w(r)$.

Замечание 5.10. В. Бушковский доказал также L-полноту фрагмента исчисления Ламбека, где разрешены отрицательные вхождения операции умножения, но запрещены её положительные вхождения (см. [31]) (знак вхождения меняется на противоположный в подтипе A внутри типа вида $A \setminus B$ или $B \,/\, A$, а также в антецеденте секвенции).

Идея доказательства Бушковского заключается в замене каждого подтипа вида $A \cdot B$ на тип $p_i \,/\, (B \setminus (A \setminus p_i))$, где p_i — новый примитивный тип (для различных вхождений подтипов используются различные примитивные типы p_i). При этом выводимость секвенции не изменится, если все вхождения типов $A \cdot B$ были отрицательные.

Теорема 5.11. *Исчисление* L *полно относительно* L*-моделей со счётным числом порождающих* (*см.* [16]).

Теорема 5.12. *Исчисление* L *полно относительно* L*-моделей с двумя порождающими.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{L} \nvdash \Gamma \to A$. Согласно теореме 5.11 существует L-модель $\langle \mathcal{P}(\Sigma^+), \cdot, \subseteq, w \rangle$, где $\Sigma = \{c_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Обозначим $\Sigma_2 = \{a, b\}$. Искомую модель $\langle \mathcal{P}(\Sigma_2^+), \cdot, \subseteq, w_2 \rangle$ получим, заменив во всех словах символы c_i на слова $ab^i a$. □

Замечание 5.13. В доказательстве теоремы 5.12 нельзя использовать более простую замену c_i на слова $b^i a$, так как, например, $\{c_9\} \nsubseteq (\{c_3\} \,/\, \{c_2\}) \cdot \{c_8\}$, но $\{b^9 a\} \subseteq (\{b^3 a\} \,/\, \{b^2 a\}) \cdot \{b^8 a\}$.
Пример 5.14. Секвенция $p \,/\, s \to s \setminus p$ ложна в модели на подмножествах свободной полугруппы $\{a, b\}^+$, где

$$w(s) = \{a, ba\},$$
$$w(p) = \{a, ba, bba\},$$

где $w(p \,/\, s) = \{b\}$ и $w(s \setminus p) = \varnothing$.
Упражнение 5.15. В полугруппе с делением $\langle \mathcal{P}(\Sigma^+), \cdot, \subseteq \rangle$ выполняются следующие соотношения:

1. $\varnothing \cdot \mathcal{A} = \varnothing$ и $\mathcal{A} \cdot \varnothing = \varnothing$ для любого $\mathcal{A} \subseteq \Sigma^+$,
2. $\mathcal{A} \,/\, \varnothing = \Sigma^+$ и $\varnothing \setminus \mathcal{A} = \Sigma^+$ для любого $\mathcal{A} \subseteq \Sigma^+$,
3. если $\mathcal{A} \neq \Sigma^+$, то $\varnothing \,/\, \mathcal{A} = \varnothing$ и $\mathcal{A} \setminus \varnothing = \varnothing$,
4. $\Sigma^+ \,/\, \mathcal{A} = \Sigma^+$ и $\mathcal{A} \setminus \Sigma^+ = \Sigma^+$ для любого $\mathcal{A} \subseteq \Sigma^+$,
5. $\Sigma^+ \cdot \mathcal{A} \neq \Sigma^+$ и $\mathcal{A} \cdot \Sigma^+ \neq \Sigma^+$ для любого $\mathcal{A} \subseteq \Sigma^+$,
6. если $\mathcal{A}$ конечно и $\mathcal{B} \neq \varnothing$, то $\mathcal{A} \,/\, \mathcal{B}$ конечно и $\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$ конечно.

Проблема 5.16. Существует ли универсальная L-модель (хотя бы для $\mathrm{L}(\cdot, \setminus)$)?
Пример 5.17. Пусть $\langle S, \circ, \mathbf{1} \rangle$ — моноид. Определим на множестве $\mathcal{P}(S)$ бинарную операцию $\cdot$ так же как в примере 1.21:

$$A \cdot B \rightleftharpoons \{a \circ b \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Тогда $\langle \mathcal{P}(S), \cdot, \{\mathbf{1}\}, \subseteq \rangle$ — моноид с делением.
Определение 5.18. Пусть $\langle S, \circ, \mathbf{1} \rangle$ — моноид. Модель исчисления $\mathbf{1}$ на моноиде с делением $\langle \mathcal{P}(S), \cdot, \subseteq \rangle$, построенной в примере 5.17, называется *моделью на подмножествах моноида.*

Теорема 5.19. *Исчисление* L^* *полно относительно моделей на подмножествах свободного моноида с двумя порождающими* (*см.* [88]).

Пример 5.20. Секвенция $p \,/\, s \to s \setminus p$ ложна в модели на подмножествах свободного моноида $\{a, b\}^*$, где $w(s) = \{a, ba\}$ и $w(p) = \{a, ba, bba\}$ (очевидно, $w(p \,/\, s) = \{\varepsilon, b\}$ и $w(s \setminus p) = \{\varepsilon\}$).

Теорема 5.21. *Никакое расширение* L^* *не обладает сильной полнотой относительно* L*-моделей.* (*см.* [25, предожение 4.2]).

Доказательство. Рассмотрим правило

$$\frac{B \to A \quad A \to A \cdot A}{B \to A \cdot B}\ (\cdot \to).$$

□

Упражнение 5.22. Секвенция $\mathbf{1}/p \to p\backslash\mathbf{1}$ истинна в каждой модели на подмножествах свободного моноида.
Упражнение 5.23. Исчисление L_1 не полно относительно моделей на подмножествах свободных моноидов.
Упражнение 5.24. Найти способ интерпретации константы $\mathbf{1}$ на подмножествах свободных моноидов, обеспечивающий полноту L_1.
Проблема 5.25. Полно ли исчисление LP относительно моделей на подмножествах свободной полугруппы с одним порождающим?
Проблема 5.26. Полно ли исчисление L (или хотя бы $\mathrm{L}(\backslash)$) относительно моделей на полугруппах с делением, описанных в 1.24.
Проблема 5.27. Полно ли исчисление L (или хотя бы $\mathrm{L}(\backslash)$) относительно моделей на полугруппах с делением, описанных в 1.25.
Определение 5.28. Пусть D — некоторое множество и R — некоторое транзитивное бинарное отношение на нём. Определим на множестве $\mathcal{P}(R)$ бинарную операцию $\cdot$ так:

$$A \cdot B \rightleftharpoons \{\langle x, z\rangle \in R \mid \text{существует такой } y \in D, \text{ что } \langle x, y\rangle \in A \text{ и } \langle y, z\rangle \in B\}.$$

Тогда полугруппа с делением $\langle \mathcal{P}(R), \cdot, \subseteq\rangle$ называется *реляционной шкалой* или R-*шкалой*.
Упражнение 5.29. Каждая R-шкала изоморфна полугруппе с делением, построенной по некоторой подполугруппе полугруппы из примера 1.5 согласно конструкции из примера 1.21, если отбросить множества, не содержащие nil. Изоморфизм осуществляется функцией $f\colon A \mapsto A \cup \{\mathrm{nil}\}$.
Упражнение 5.30. Выразить операции $\backslash$ и $/$ в R-шкале через операции $\cdot$, $\neg$ и $(\,\cdot\,)^{-1}$, где $\neg R = (D \times D) - R$ и $R^{-1} = \{\langle x, y\rangle \mid \langle y, x\rangle \in R\}$.
Определение 5.31. R-*модель* — модель на R-шкале.

Теорема 5.32. *Исчисление* L *полно относительно* R-*моделей. Даже имеет место сильная полнота исчисления* L *относительно* R-*моделей (если секвенция* $\Gamma \to A$ *истинна в каждой* R-*модели, в которой истинны все секвенции из некоторого множества, то* $\Gamma \to A$ *выводится из этого множества секвенций в исчислении* L*).* (*см.* [25, теорема 2.1]).

Теорема 5.33. *Существует универсальная R-модель для* L.

Теорема 5.34. *Исчисление* L *полно относительно* R-*моделей на* $\langle \mathbb{Z}, <\rangle$ (*см.* [16]).

Проблема 5.35. Существует ли универсальная R-модель на $\langle \mathbb{Z}, <\rangle$ (хотя бы для $\mathrm{L}(\backslash)$)?
Проблема 5.36. Полно ли L (или хотя бы $\mathrm{L}(\backslash)$) относительно R-моделей на конечных строгих линейных порядках?
Определение 5.37. R-шкала $\langle \mathcal{P}(R), \cdot, \subseteq\rangle$ называется *рефлексивной* R-*шкалой*, если отношение R рефлексивно, то есть для некоторого множества D выполняется $R \subseteq D \times D$ и $(\forall x \in D)\,\langle x, x\rangle \in R$.
Определение 5.38. *Рефлексивной* R-*моделью* называется R-модель на рефлексивной R-шкале.
Упражнение 5.39. R-шкала на $\langle \mathbb{Z}, \leqslant\rangle$ (то есть R-шкала, где $D = \mathbb{Z}$ и в качестве R используется стандартное отношение $\leqslant$) является рефлексивной R-шкалой.
Упражнение 5.40. Каждая рефлексивная R-шкала является моноидом с делением. Единицей этого моноида является множество $\{\langle x, x\rangle \mid x \in D\}$ (в обозначениях определения 5.37).

Теорема 5.41. *Исчисление* L^* *полно относительно рефлексивных* R-*моделей* (*см.* [25, теорема 3.1]).

Теорема 5.42. *Для исчисления* L_1 *существует универсальная* R-*модель на счётном тотальном бинарном отношении, то есть* R-*модель, где* $D = \mathbb{N}$ *и* $R = D \times D$ (*см.* [25, с. 31]).

Проблема 5.43. Полно ли L^* относительно R-моделей на $\langle \mathbb{Z}, \leqslant\rangle$?
Упражнение 5.44. Полно ли L_1 относительно R-моделей на $\langle \mathbb{Z}, \leqslant\rangle$?
Проблема 5.45. Полно ли L_1 (или хотя бы $\mathrm{L}_1(\backslash)$) относительно R-моделей на конечных нестрогих линейных порядках?

Определение 5.46. *Моделью исчисления* $\mathrm{L}(\cdot, \backslash, /, \cup, \cap)$ *на подмножествах полугруппы* называется такая четвёрка $\langle \mathcal{P}(S), \cdot, \subseteq, w \rangle$, где $\langle \mathcal{P}(S), \cdot, \subseteq \rangle$ — полугруппа с делением построенная в примере 1.21 (по некоторой полугруппе $\langle S, \circ \rangle$), а w — отображение из множества $\mathrm{Tp}(\cdot, \backslash, /, \cup, \cap)$ в множество $\mathcal{P}(S)$, удовлетворяющее следующим пяти соотношениям:

$$\begin{aligned}
w(A \cdot B) &= w(A) \circ w(B),\\
w(A \setminus B) &= w(A) \setminus w(B),\\
w(A \mathbin{/} B) &= w(A) \mathbin{/} w(B),\\
w(A \cup B) &= w(A) \cup w(B),\\
w(A \cap B) &= w(A) \cap w(B).
\end{aligned}$$

Если $\langle S, \circ \rangle$ — свободная полугруппа, то такая модель называется L-*моделью исчисления* $\mathrm{L}(\cdot, \backslash, /, \cup, \cap)$. Если $\langle S, \circ \rangle$ — R-шкала (см. определение 5.28), то такая модель называется R-*моделью исчисления* $\mathrm{L}(\cdot, \backslash, /, \cup, \cap)$.

Теорема 5.47. *Исчисление* $\mathrm{L}(\cdot, \backslash, /, \cup, \cap)$ *корректно относительно моделей на подмножествах полугрупп* (*см.* [54]).

Замечание 5.48. Исчисление $\mathrm{L}(\cup, \cap)$ не полно относительно моделей на подмножествах полугрупп, так как в $\mathrm{L}(\cup, \cap)$ не выводится секвенция $p_1 \cap (p_2 \cup p_3) \to (p_1 \cap p_2) \cup (p_1 \cap p_3)$.

Теорема 5.49. *Исчисление* $\mathrm{L}(\cdot, \backslash, /, \cap)$ *сильно полно относительно* R-*моделей.* (*см.* [25, теорема 2.3]).

Теорема 5.50. *Ни одно из расширений* $\mathrm{L}(\cdot, \backslash, /, \cap, \cup)$ *конечным множеством аксиом не обладает сильной полнотой относительно* R-*моделей.* (*см.* [25, теорема 2.5]).

Проблема 5.51. Полно ли $\mathrm{L}(\cdot, \backslash, /, \cap)$ (или хотя бы $\mathrm{L}(\backslash, \cap)$) относительно L-моделей (или R-моделей).
Проблема 5.52. Полно ли $\mathrm{L}(\cdot, \backslash, /, \cup)$ (или хотя бы $\mathrm{L}(\backslash, \cup)$) относительно L-моделей (или R-моделей).
Определение 5.53. Операция $(\ \cdot\ )^+$ на множестве $\mathcal{P}(\Sigma^+)$ определяется так:

$$A^+ \rightleftharpoons A \cup (A \cdot A) \cup (A \cdot A \cdot A) \cup \ldots.$$

Проблема 5.54. Дополнить исчисление L правилами для $(\ \cdot\ )^+$ так, чтобы получилось исчисление, полное относительно L-моделей.
Проблема 5.55. Существует ли такое семейство полугрупп конусов, что его атомарная теория не совпадает ни с какой атомарной теорией полугруппы конусов?
Проблема 5.56. Разрешима ли атомарная теория подмножеств свободной полугруппы с операциями $\cdot$, $\backslash$, $/$ и $\neg$, где $\neg$ интерпретируется как теоретико-множественное дополнение ([39, с. 369]).

6 Свойства исчисления Ламбека

Определение 6.1. Определим перевод prop, ставящий типам, последовательностям типов и секвенциям исчисления Ламбека в соответствие формулы языка логики высказываний следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathrm{prop}(p_i) &\rightleftharpoons p_i,\\
\mathrm{prop}(A \cdot B) &\rightleftharpoons \mathrm{prop}(A) \wedge \mathrm{prop}(B),\\
\mathrm{prop}(A \setminus B) &\rightleftharpoons \mathrm{prop}(A) \to \mathrm{prop}(B),\\
\mathrm{prop}(B \mathbin{/} A) &\rightleftharpoons \mathrm{prop}(A) \to \mathrm{prop}(B),\\
\mathrm{prop}(A_1\ \ldots\ A_n) &\rightleftharpoons \mathrm{prop}(A_1) \wedge \ldots \wedge \mathrm{prop}(A_n),\\
\mathrm{prop}(\Gamma \to A) &\rightleftharpoons \mathrm{prop}(\Gamma) \to \mathrm{prop}(A).
\end{aligned}$$

Теорема 6.2. *Если* $\mathrm{L}^* \vdash \Gamma \to A$*, то формула* $\mathrm{prop}(\Gamma \to A)$ *выводима в интуиционистской логике.*

Следствие 6.3. *Если* $\mathrm{L}^* \vdash \Gamma \to A$*, то формула* $\mathrm{prop}(\Gamma \to A)$ *выводима в классической логике.*

Упражнение 6.4. $L^* \nvdash (((p_2 \setminus p_3) \setminus (p_1 \setminus p_2)) \setminus (p_1 \setminus p_3)) \setminus p_1 \to p_1$. Заметим, что перевод в язык логики высказываний выводим в классической логике.
Упражнение 6.5. $L^* \nvdash (p_2 \setminus p_3) \setminus ((p_1 \setminus p_2) \setminus p_4) \to (p_1 \setminus p_3) \setminus p_4$. Заметим, что перевод в язык логики высказываний выводим в классической логике.
Определение 6.6. Определим функции $\#^+_{p_i} : \mathrm{Tp}^* \to \mathbb{N}$ и $\#^-_{p_i} : \mathrm{Tp}^* \to \mathbb{N}$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
\#^+_{p_i}(p_j) &\rightleftharpoons \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases} & \#^-_{p_i}(p_j) &\rightleftharpoons 0, \\
\#^+_{p_i}(A \cdot B) &\rightleftharpoons \#^+_{p_i}(A) + \#^+_{p_i}(B), & \#^-_{p_i}(A \cdot B) &\rightleftharpoons \#^-_{p_i}(A) + \#^-_{p_i}(B), \\
\#^+_{p_i}(A \setminus B) &\rightleftharpoons \#^-_{p_i}(A) + \#^+_{p_i}(B), & \#^-_{p_i}(A \setminus B) &\rightleftharpoons \#^+_{p_i}(A) + \#^-_{p_i}(B), \\
\#^+_{p_i}(B \mathbin{/} A) &\rightleftharpoons \#^-_{p_i}(A) + \#^+_{p_i}(B), & \#^-_{p_i}(B \mathbin{/} A) &\rightleftharpoons \#^+_{p_i}(A) + \#^-_{p_i}(B), \\
\#^+_{p_i}(A_1 \ \ldots \ A_n) &\rightleftharpoons \#^+_{p_i}(A_1) + \ldots + \#^+_{p_i}(A_n), & \#^-_{p_i}(A_1 \ \ldots \ A_n) &\rightleftharpoons \#^-_{p_i}(A_1) + \ldots + \#^-_{p_i}(A_n).
\end{aligned}$$

Упражнение 6.7. $\#^+_{p_2}(p_1 \mathbin{/} (p_2 \mathbin{/} p_2) \cdot p_1) = 1$.
Определение 6.8. $\#_{p_i}(\Gamma) \rightleftharpoons \#^+_{p_i}(\Gamma) - \#^-_{p_i}(\Gamma)$.

Теорема 6.9. *Если* $L \vdash \Gamma \to A$, *то* $\#_{p_i}(\Gamma) = \#_{p_i}(A)$ *для каждого* i.

Определение 6.10. Обозначим через FG свободную группу, порождённую счётным множеством Pr. Под свободной группой будем понимать следующую конкретную её реализацию. Рассмотрим расширенный алфавит Pr', полученный из множества Pr добавлением для каждого $p_i \in \mathrm{Pr}$ новой буквы p_i^{-1}. В этом расширенном алфавите будем рассматривать приведённые слова. Слово u в алфавите Pr' называется *приведённым*, если в нём нет букв p_i и p_i^{-1}, стоящих рядом. Пустое слово также рассматривается как приведённое слово. Элементы FG — все приведённые слова. Определим умножение на этом множестве рекурсивно по длине слов.

- Если $u = u'p_i$ и $v = p_i^{-1}v'$ для некоторого индекса i, то $u \cdot v \rightleftharpoons u' \cdot v'$.
- Если $u = u'p_i^{-1}$ и $v = p_iv'$ для некоторого индекса i, то $u \cdot v \rightleftharpoons u' \cdot v'$.
- Иначе $u \cdot v$ строится обычным приписыванием слов.

Очевидно, что произведение приведённых слов является приведённым. Единицей построенной свободной группы FG является пустое слово ε. Определим операцию взятия обратного рекурсивно по длине слова так:

$$\begin{aligned}
(\varepsilon)^{-1} &\rightleftharpoons \varepsilon, \\
(up_i)^{-1} &\rightleftharpoons p_i^{-1}(u)^{-1}, \\
(up_i^{-1})^{-1} &\rightleftharpoons p_i(u)^{-1}.
\end{aligned}$$

Определение 6.11. *Интерпретацией в свободной группе* (будем обозначать её $[\![\,\cdot\,]\!]$) назовем следующее естественное отображение типов и их конечных последовательностей в группу FG:

$$\begin{aligned}
[\![p_i]\!] &\rightleftharpoons p_i, \\
[\![A \cdot B]\!] &\rightleftharpoons [\![A]\!][\![B]\!], \\
[\![A \setminus B]\!] &\rightleftharpoons [\![A]\!]^{-1}[\![B]\!], \\
[\![A \mathbin{/} B]\!] &\rightleftharpoons [\![A]\!][\![B]\!]^{-1}, \\
[\![A_1 \ \ldots \ A_n]\!] &\rightleftharpoons [\![A_1]\!] \ldots [\![A_n]\!].
\end{aligned}$$

Упражнение 6.12. $|[\![A]\!]| \leqslant (\|A\| + 1) \mathbin{/} 2$.

Теорема 6.13. *Если* $L \vdash \Gamma \to A$, *то* $[\![\Gamma]\!] = [\![A]\!]$.

Доказательство. Индукция по длине вывода.
Случай 1: Случай аксиомы тривиален.
Случай 2: Рассмотрим правило $(\to \cdot)$:

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Delta \to B}{\Gamma\Delta \to A \cdot B}\ (\to \cdot).$$

По предположению индукции $[\![\Gamma]\!] = [\![A]\!]$ и $[\![\Delta]\!] = [\![B]\!]$. Следовательно, $[\![\Gamma\Delta]\!] = [\![A]\!][\![B]\!] = [\![A \cdot B]\!]$.

Случай 3: Рассмотрим правило $(\cdot \to)$:

$$\frac{\Gamma A B \Delta \to C}{\Gamma(A \cdot B)\Delta \to C}\ (\cdot \to).$$

Очевидно.

Случай 4: Рассмотрим правило $(\to \backslash)$:

$$\frac{A\Pi \to B}{\Pi \to A \backslash B}\ (\to \backslash).$$

Домножая обе части равенства $[\![A]\!][\![\Pi]\!] = [\![B]\!]$ слева на $[\![A]\!]^{-1}$, получим $[\![\Pi]\!] = [\![A]\!]^{-1}[\![B]\!]$. Следовательно, $[\![\Pi]\!] = [\![A \backslash B]\!]$.

Случай 5: Случай $(\to /)$ разбирается аналогично предыдущему.

Случай 6: Рассмотрим правило $(\backslash \to)$:

$$\frac{\Pi \to A \quad \Gamma B \Delta \to C}{\Gamma\Pi(A \backslash B)\Delta \to C}\ (\backslash \to).$$

Так как $[\![\Pi]\!] = [\![A]\!]$, то $[\![\Pi]\!][\![A]\!]^{-1} = \varepsilon$. С другой стороны, $[\![\Gamma]\!][\![B]\!][\![\Delta]\!] = [\![C]\!]$ влечёт $[\![\Gamma]\!][\![\Pi]\!][\![A]\!]^{-1}[\![B]\!][\![\Delta]\!] = [\![C]\!]$. Следовательно, $[\![\Gamma]\!][\![\Pi]\!][\![A \backslash B]\!][\![\Delta]\!] = [\![C]\!]$.

Случай 7: Случай правила $(/ \to)$ рассматривается аналогично предыдущему. □

Теорема 6.14. *Если* $[\![\Gamma]\!] = [\![A]\!]$, *то* $\#_{p_i}(\Gamma) = \#_{p_i}(A)$ *для каждого* i.

Упражнение 6.15. $\mathrm{L}^* \nvdash (p_2 \backslash (p_1 \cdot (p_1 \backslash p_2))) \backslash p_2 \to p_2$. Ни перевод в классическую логику, ни интерпретация в свободной группе не позволяют установить невыводимость этой секвенции.

Упражнение 6.16. $\mathrm{L}^* \nvdash ((p_2 / (p_1 \backslash p_2)) \backslash p_1) \backslash p_2 \to p_2$. Ни перевод в классическую логику, ни интерпретация в свободной группе не позволяют установить невыводимость этой секвенции.

Упражнение 6.17. $\mathrm{L}^* \nvdash (((p_2 \backslash p_3) \backslash ((p_1 \backslash p_2) \backslash p_4)) \backslash ((p_1 \backslash p_3) \backslash p_4)) \backslash (p_3 \backslash p_1) \to (p_3 \backslash p_1)$. Ни перевод в классическую логику, ни интерпретация в свободной группе не позволяют установить невыводимость этой секвенции.

Теорема 6.18. *Пусть* $A, B \in \mathrm{Tp}$. *Тогда утверждение, что существует такой* $C \in \mathrm{Tp}$, *что* $\mathrm{L} \vdash A \to C$ *и* $\mathrm{L} \vdash B \to C$, *равносильно утверждению, что существует такой* $D \in \mathrm{Tp}$, *что* $\mathrm{L} \vdash D \to A$ *и* $\mathrm{L} \vdash D \to B$.

Доказательство. Первое доказательство дано в [58]. В [79] приведено доказательство, использующее конструкции $D = (A / C) \cdot C \cdot (C \backslash B)$ и $C = (D / A) \backslash D / (B \backslash D)$. В [19] используется конструкция $D = (A / C) \cdot A \cdot (A \backslash B)$. Аналогично можно положить $C = (D / A) \backslash A / (B \backslash A)$. □

Теорема 6.19. *Пусть* $A, B \in \mathrm{Tp}$. *Тогда утверждение, что существует такой* $C \in \mathrm{Tp}$, *что* $\mathrm{L} \vdash A \to C$ *и* $\mathrm{L} \vdash B \to C$, *равносильно утверждению* $[\![A]\!] = [\![B]\!]$ *(см.* [85]*).*

Замечание 6.20. Аналогичный результат верен для исчисления Ламбека-Гришина, введённого М. Мортгатом, но там вместо свободной группы используется свободная абелева группа, причём операциям Гришина соответствует дополнительная порождающая этой свободной группы.

Теорема 6.21 (Ю. В. Саватеев, 2005)**.** *Пусть* $A, B \in \mathrm{Tp}(\backslash)$. *Тогда утверждение, что существует такой* $C \in \mathrm{Tp}(\backslash)$, *что* $\mathrm{L}(\backslash) \vdash A \to C$ *и* $\mathrm{L}(\backslash) \vdash B \to C$, *равносильно утверждению* $[\![A]\!] = [\![B]\!]$.

Определение 6.22. Функция $\bar{\#}\colon \mathrm{Tp}^+ \to \mathbb{N} - \{0\}$. определяется так:

$$\begin{aligned}
\bar{\#}(p_i) &\rightleftharpoons 1,\\
\bar{\#}(A \cdot B) &\rightleftharpoons \bar{\#}(A) + \bar{\#}(B),\\
\bar{\#}(A \backslash B) &\rightleftharpoons \max(1, \bar{\#}(B) - \bar{\#}(A)),\\
\bar{\#}(B / A) &\rightleftharpoons \max(1, \bar{\#}(B) - \bar{\#}(A)).
\end{aligned}$$

Теорема 6.23. *Если* $\mathrm{L} \vdash \Gamma \to A$, *то* $\bar{\#}(\Gamma) \geqslant \bar{\#}(A)$.

Упражнение 6.24. Допустимо ли в L правило $\dfrac{A \to A \cdot B}{C \to D}$?
Упражнение 6.25. Найти аналог определения 6.22 для исчисления L_1.
Проблема 6.26. Обозначим через $\mathcal{S}$ множество всех таких секвенций $\Gamma \to A$, что $\bar{\bar{\#}}(\Gamma) \geqslant \bar{\bar{\#}}(A)$. Имеет ли место сильная полнота исчисления L относительно L-моделей, если рассматривать только секвенции из $\mathcal{S}$?
Определение 6.27. Секвенция $\Pi \to A$ называется *тонкой* тогда и только тогда, когда для любого $p \in \mathrm{Pr}$ справедливы неравенства $\#^+_p(\Pi \to A) \leqslant 1$ и $\#^-_p(\Pi \to A) \leqslant 1$ (т. е. каждый примитивный тип встречается в данной секвенции самое большее один раз положительно и один раз отрицательно).
Определение 6.28. Назовем *подстановкой примитивных типов* любую функцию из Pr в Pr.

Каждой подстановке ϕ естественным образом ставится в соответствие функция из Tp в Tp, также обозначаемая ϕ:

$$\begin{aligned} \phi(E \cdot F) &\rightleftharpoons \phi(E) \cdot \phi(F), \\ \phi(E \setminus F) &\rightleftharpoons \phi(E) \setminus \phi(F), \\ \phi(E \,/\, F) &\rightleftharpoons \phi(E) \,/\, \phi(F). \end{aligned}$$

Распространим отображение ϕ на секвенции следующим образом:

$$\phi(E_1 \dots E_m \to F) \rightleftharpoons \phi(E_1) \dots \phi(E_m) \to \phi(F).$$

Лемма 6.29. *Пусть ϕ — некоторая подстановка примитивных типов. Если в произвольном выводе исчисления Ламбека заменить каждую секвенцию $\Gamma \to C$ на $\phi(\Gamma \to C)$, то полученное дерево является выводом.*

Доказательство. Индукция по длине вывода в исчислении Ламбека. □

Теорема 6.30. *Секвенция $\Pi \to A$ выводима в исчислении Ламбека тогда и только тогда, когда существует выводимая тонкая секвенция $\Theta \to B$ и найдется такая подстановка ϕ, что $\Pi \to A = \phi(\Theta \to B)$.*

Доказательство. Часть "тогда" непосредственно следует из леммы 6.29.

Чтобы доказать часть "только тогда", рассмотрим произвольный вывод без сечения секвенции $\Pi \to A$. Пусть n — количество вхождений аксиом в данный вывод. Введём n новых примитивных типов $q_1, \dots, q_n$ и установим взаимно-однозначное соответствие между вхождениями аксиом и новыми примитивными типами. Определим подстановку ϕ так: если новый примитивный тип q_i соответствует некоторому вхождению аксиомы $p_j \to p_j$, то положим $\phi(q_i) \rightleftharpoons p_j$.

Теперь по данному выводу секвенции $\Pi \to A$ построим такой вывод некоторой секвенции $\Gamma \to C$, что $\phi(\Gamma \to C) = \Pi \to A$ и структуры этих двух выводов совпадают. Для этого сначала заменим все вхождения аксиом $p_j \to p_j$ на вхождения аксиом с соответствующими новыми примитивными типами. Затем распространим эту замену вниз по дереву вывода. Это возможно благодаря тому, что в каждом правиле вывода, кроме сечения, каждое вхождение примитивного типа в заключение правила имеет в точности одного предшественника в одной из посылок рассматриваемого правила. □

Пример 6.31. Рассмотрим в качестве $\Pi \to A$ секвенцию:

$$(p \,/\, p)\, p \to p \,/\, (p \setminus p).$$

Она имеет вывод:

$$\dfrac{\dfrac{p \to p \qquad \dfrac{p \to p \quad p \to p}{(p \,/\, p)\, p \to p}\,(/ \to)}{(p \,/\, p)\, p\, (p \setminus p) \to p}\,(\setminus \to)}{(p \,/\, p)\, p \to p \,/\, (p \setminus p)}\,(\to /).$$

В качестве $\Theta \to B$ берется секвенция $(q_3 \,/\, q_2)\, q_1 \to q_3 \,/\, (q_1 \setminus q_2)$. Положим

$$\phi(q_1) = p, \qquad \phi(q_2) = p, \qquad \phi(q_3) = p.$$

Имеем

$$\dfrac{q_1 \to q_1 \qquad \dfrac{q_2 \to q_2 \quad q_3 \to q_3}{(q_3 \,/\, q_2)\, q_2 \to q_3}\,(/\to)}{\dfrac{(q_3 \,/\, q_2)\, q_1\, (q_1 \setminus q_2) \to q_3}{(q_3 \,/\, q_2)\, q_1 \to q_3 \,/\, (q_1 \setminus q_2)}\,(\to /).}\,(\setminus\to)$$

Пример 6.32. Секвенцию $q\ (q \setminus q)\ (q \setminus r)\ ((q \setminus r) \setminus q \setminus s) \to s$ можно получить с помощью подстановки примитивных типов из двух различных тонких выводимых секвенций: $p_1\ (p_2 \setminus p_3)\ (p_3 \setminus r)\ ((p_2 \setminus r) \setminus p_1 \setminus s) \to s$ и $p_1\ (p_1 \setminus p_2)\ (p_3 \setminus r)\ ((p_3 \setminus r) \setminus p_2 \setminus s) \to s$.
Пример 6.33. Секвенцию $((q \setminus q) \setminus (q \setminus r)) \setminus s \to ((q \setminus q) \setminus (q \setminus r)) \setminus (q \setminus q) \setminus s$ можно получить с помощью подстановки примитивных типов из двух различных тонких выводимых секвенций: $((p_2\setminus p_1)\setminus(p_2\setminus r))\setminus s \to ((p_3\setminus p_4)\setminus(p_1\setminus r))\setminus(p_3\setminus p_4)\setminus s$ и $((p_3\setminus p_1)\setminus(p_2\setminus r))\setminus s \to ((p_3\setminus p_4)\setminus(p_2\setminus r))\setminus(p_1\setminus p_4)\setminus s$.

Теорема 6.34 (интерполяционное свойство L^*)**.** *Пусть* $\mathrm{L}^* \vdash \Phi\Theta\Psi \to C$, *где* $\Phi \in \mathrm{Tp}^*$, $\Theta \in \mathrm{Tp}^+$, $\Psi \in \mathrm{Tp}^*$ *и* $C \in \mathrm{Tp}$. *Тогда существует такой тип* E, *что*

- $\mathrm{L}^* \vdash \Theta \to E$,
- $\mathrm{L}^* \vdash \Phi E \Psi \to C$,
- $\forall i\ \#^+_{p_i}(E) \leqslant \min(\#^+_{p_i}(\Theta), \#^+_{p_i}(C) + \#^-_{p_i}(\Phi\Psi))$,
- $\forall i\ \#^-_{p_i}(E) \leqslant \min(\#^-_{p_i}(\Theta), \#^-_{p_i}(C) + \#^+_{p_i}(\Phi\Psi))$.

Доказательство. См. [96, 97]. □

Определение 6.35. $\|\Gamma\|_{p_i} \rightleftharpoons \#^+_{p_i}(\Gamma) + \#^-_{p_i}(\Gamma)$.
Определение 6.36. Множество примитивных типов, *входящих* в данный тип, определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(p_i) &\rightleftharpoons \{p_i\},\\
\mathrm{var}(A \cdot B) &\rightleftharpoons \mathrm{var}(A) \cup \mathrm{var}(B),\\
\mathrm{var}(A \setminus B) &\rightleftharpoons \mathrm{var}(A) \cup \mathrm{var}(B),\\
\mathrm{var}(A \,/\, B) &\rightleftharpoons \mathrm{var}(A) \cup \mathrm{var}(B).
\end{aligned}$$

Как обычно, $\mathrm{var}(\Gamma) \rightleftharpoons \mathrm{var}(\bullet\Gamma)$.
Упражнение 6.37. $p_i \in \mathrm{var}(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда $\|\Gamma\|_{p_i} > 0$.
Замечание 6.38. Можно рассмотреть несколько более слабую формулировку интерполяционного свойства в терминах $\|\cdot\|_{p_i}$ вместо $\#^+_{p_i}$ и $\#^-_{p_i}$ (так сделано в теореме 6.41). Но можно рассмотреть ещё более слабую формулировку в терминах функции var, аналогичную стандартному интерполяционному свойству Крейга для классической логики.

Следствие 6.39. *Пусть* $\mathrm{L}^* \vdash \Phi\Theta\Psi \to C$, *где* $\Phi \in \mathrm{Tp}^*$, $\Theta \in \mathrm{Tp}^+$, $\Psi \in \mathrm{Tp}^*$ *и* $C \in \mathrm{Tp}$. *Тогда существует такой тип* E, *что*

- $\mathrm{L}^* \vdash \Theta \to E$,
- $\mathrm{L}^* \vdash \Phi E \Psi \to C$,
- $\mathrm{var}(E) \subseteq \mathrm{var}(\Theta) \cap \mathrm{var}(\Phi\Psi C)$.

Следствие 6.40. *Пусть* $\mathrm{L}^* \vdash A \to C$. *Тогда существует такой тип* E, *что*

- $\mathrm{L}^* \vdash A \to E$,
- $\mathrm{L}^* \vdash E \to C$,
- $\mathrm{var}(E) \subseteq \mathrm{var}(A) \cap \mathrm{var}(C)$.

Теорема 6.41 (интерполяционное свойство L)**.** *Пусть* $\mathrm{L} \vdash \Phi\Theta\Psi \to C$, *где* $\Phi \in \mathrm{Tp}^*$, $\Theta \in \mathrm{Tp}^+$, $\Psi \in \mathrm{Tp}^*$ *и* $C \in \mathrm{Tp}$. *Тогда существует такой тип* E, *что*

(i) $\mathrm{L} \vdash \Theta \to E$,

(ii) $\mathrm{L} \vdash \Phi E \Psi \to C$,

(iii) $\forall i \, \|E\|_{p_i} \leqslant \min(\|\Theta\|_{p_i}, \|C\|_{p_i} + \|\Phi\Psi\|_{p_i})$

(*см.* [13]).

Будем писать $\Phi[\Theta]\Psi \to C$ вместо $\Phi\Theta\Psi \to C$, чтобы выделить отмеченную часть антецедента.

Назовем тип E, удовлетворяющий условиям (i) — (iii), *интерполянтом* для последовательности Θ в секвенции $\Phi[\Theta]\Psi \to C$.

Доказательство. Индукция по длине вывода без сечения.

Случай 1: Пусть $\Phi\Theta\Psi \to C$ является аксиомой, т. е. $C = \Phi\Theta\Psi$. Так как $\Theta \in \mathrm{Tp}^+$, то $\Theta = C$ и $\Phi = \Psi = \Lambda$. Положим $E = C$.

Во всех следующих случаях выделение подпоследовательности в антецеденте заключения рассматриваемого правила вывода порождает выделение подпоследовательностей в посылках. По предположению индукции найдем интерполянты для посылок.

Случай 2: Рассмотрим правило $(\to \backslash)$.

$$\frac{A\Phi[\Theta]\Psi \to B}{\Phi[\Theta]\Psi \to A \backslash B} \; (\to \backslash)$$

По предположению индукции найдем такой тип E, что $\mathrm{L} \vdash \Theta \to E$, $A\Phi E\Psi \to B$ и $\|E\|_{p_i} \leq \min(\|\Theta\|_{p_i}, \|B\|_{p_i} + \|A\Phi\Psi\|_{p_i})$ для любого p_i.

Проверим, что (i), (ii) и (iii) выполняются для заключения правила $(\to \backslash)$ с тем же интерполянтом E, что и для посылки. Утверждение (i), очевидно, вытекает из предположения индукции. Построив вывод

$$\frac{A\Phi E\Psi \to B}{\Phi E\Psi \to A \backslash B} \; (\to \backslash),$$

установим (ii). Утверждение (iii) следует из предположения индукции и определения $\| \; \|_{p_i}$.

Случай 3: Правило $(\to /)$ рассматривается аналогично.

Случай 4: Рассмотрим правило $(\backslash \to)$. Разберем шесть подслучаев.

Случай 4a:

$$\frac{\Pi'[\Pi'']\Pi''' \to A \quad \Gamma B\Delta \to C}{\Gamma\Pi'[\Pi'']\Pi'''(A \backslash B)\Delta \to C} \; (\backslash \to).$$

Рассматривается аналогично случаю 2.

Случай 4b:

$$\frac{\Pi \to A \quad \Gamma'[\Gamma'']\Gamma''' B\Delta \to C}{\Gamma'[\Gamma'']\Gamma'''\Pi(A \backslash B)\Delta \to C} \; (\backslash \to).$$

Рассматривается аналогично случаю 2.

Случай 4c:

$$\frac{\Pi \to A \quad \Gamma B\Delta'[\Delta'']\Delta''' \to C}{\Gamma\Pi(A \backslash B)\Delta'[\Delta'']\Delta''' \to C} \; (\backslash \to).$$

Рассматривается аналогично случаю 2.

Случай 4d:

$$\frac{[\Pi']\Pi'' \to A \quad \Gamma'[\Gamma'']B\Delta \to C}{\Gamma'[\Gamma''\Pi']\Pi''(A \backslash B)\Delta \to C} \; (\backslash \to).$$

Пусть E — интерполянт левой посылки и F — интерполянт правой посылки. Легко проверить, что $F \cdot E$ является интерполянтом заключения правила $(\backslash \to)$. Для установления (i) построим вывод

$$\frac{\Gamma'' \to F \quad \Pi' \to E}{\Gamma''\Pi' \to F \cdot E} \; (\cdot \to).$$

Случай 4e:

$$\frac{\Pi \to A \quad \Gamma'[\Gamma'' B\Delta']\Delta'' \to C}{\Gamma'[\Gamma''\Pi(A \backslash B)\Delta']\Delta'' \to C} \; (\backslash \to).$$

Пусть тип E — интерполянт правой посылки. Докажем, что E является также интерполянтом заключения. Утверждение (ii) очевидно.

По пункту (i) предположения индукции получаем, что

$$\frac{\Pi \to A \quad \Gamma'' B \Delta' \to E}{\Gamma'' \Pi (A \setminus B) \Delta' \to E}\ (\setminus \to).$$

Тем самым доказано (i). Для проверки (iii) достаточно заметить, что $\|B\|_{p_i} + \|\Gamma''\Delta'\|_{p_i} \leq \|A \setminus B\|_{p_i} + \|\Gamma''\Pi\Delta'\|_{p_i}$.

Случай 4f:

$$\frac{[\Pi']\Pi'' \to A \quad \Gamma[B\Delta']\Delta'' \to C}{\Gamma\Pi'[\Pi''(A \setminus B)\Delta']\Delta'' \to C}\ (\setminus \to).$$

Пусть E — интерполянт правой посылки, а F — интерполянт левой посылки.

Докажем, что тип $F \setminus E$ является интерполянтом заключения.

Докажем утверждение (iii):

$$\begin{aligned}
&\|F \setminus E\|_{p_i} = \\
&= \|E\|_{p_i} + \|F\|_{p_i} \leqslant \\
&\leqslant \min(\|B\Delta'\|_{p_i}, \|C\|_{p_i} + \|\Gamma\Delta''\|_{p_i}) + \\
&+ \min(\|A\|_{p_i} + \|\Pi''\|_{p_i}, \|\Pi'\|_{p_i}) \leqslant \\
&\leqslant \min(\|B\Delta'\|_{p_i} + \|A\|_{p_i} + \|\Pi''\|_{p_i}, \|C\|_{p_i} + \|\Gamma\Delta''\|_{p_i} + \|\Pi'\|_{p_i}) = \\
&= \min(\|\Pi''(A \setminus B)\Delta'\|_{p_i}, \|C\|_{p_i} + \|\Gamma\Pi'\Delta''\|_{p_i}).
\end{aligned}$$

Теперь докажем (i):

$$\cfrac{\cfrac{F\Pi'' \to A \quad B\Delta' \to E}{F\Pi''(A \setminus B)\Delta' \to E}\ (\setminus \to)}{\Pi''(A \setminus B)\Delta' \to F \setminus E}\ (\to \setminus).$$

Наконец, докажем (ii):

$$\frac{\Pi' \to F \quad \Gamma E \Delta'' \to C}{\Gamma\Pi'(F \setminus E)\Delta'' \to C}\ (\setminus \to).$$

Случай 5: Правило $(/ \to)$ рассматривается аналогично случаю 4.

Случай 6: Рассмотрим правило $(\to \cdot)$. Разберем три подслучая.

Случай 6a:

$$\frac{\Gamma'[\Gamma'']\Gamma''' \to A \quad \Delta \to B}{\Gamma'[\Gamma'']\Gamma'''\Delta \to A \cdot B}\ (\to \cdot).$$

Рассматривается аналогично случаю 2.

Случай 6b:

$$\frac{\Gamma'[\Gamma''] \to A \quad [\Delta']\Delta'' \to B}{\Gamma'[\Gamma''\Delta']\Delta'' \to A \cdot B}\ (\to \cdot).$$

Рассматривается аналогично случаю 4d.

Случай 6c:

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Delta'[\Delta'']\Delta''' \to B}{\Gamma\Delta'[\Delta'']\Delta''' \to A \cdot B}\ (\to \cdot).$$

Рассматривается аналогично случаю 2.

Случай 7: Рассмотрим правило $(\cdot \to)$. Все три подслучая разбираются аналогично случаю 2.

Случай 7a:

$$\frac{\Gamma'[\Gamma'']\Gamma''' AB\Delta \to C}{\Gamma'[\Gamma'']\Gamma'''(A \cdot B)\Delta \to C}\ (\cdot \to).$$

Случай 7b:

$$\frac{\Gamma'[\Gamma'' AB\Delta']\Delta'' \to C}{\Gamma'[\Gamma''(A \cdot B)\Delta']\Delta'' \to C}\ (\cdot \to).$$

Случай 7c:

$$\frac{\Gamma AB\Delta'[\Delta'']\Delta''' \to C}{\Gamma(A \cdot B)\Delta'[\Delta'']\Delta''' \to C}\ (\cdot \to).$$

□

Пример 6.42. Рассмотрим выводимую секвенцию

$$p_1 \cdot (p_1 \setminus p_2) \to (p_3 \,/\, p_2) \setminus p_3.$$

Здесь $\mathrm{var}(p_1 \cdot (p_1 \setminus p_2)) \cap \mathrm{var}((p_3/p_2) \setminus p_3) = \{p_1, p_2\} \cap \{p_2, p_3\} = \{p_2\}$. Интерполянтом данной секвенции является тип $E = p_2$. Действительно,

$$\mathrm{L} \vdash p_1 \cdot (p_1 \setminus p_2) \to p_2$$

и

$$\mathrm{L} \vdash p_2 \to (p_3 \,/\, p_2) \setminus p_3.$$

Теорема 6.43. *Интерполяционное свойство* $\mathrm{L}(\setminus, /)$ *и* $\mathrm{L}(\setminus)$ (*см.* [13]).

Определение 6.44. Исчисление Lcut (см. [13]).
Определение 6.45. Линейный вывод в Lcut.

Теорема 6.46. *Каждый вывод из гипотез в* Lcut *можно заменить на линейный вывод из гипотез в* Lcut.

7 Грамматики

Определение 7.1. *Контекстно-свободной грамматикой* называется четвёрка $G \rightleftharpoons \langle N, \Sigma, P, S\rangle$, где N и Σ — конечные алфавиты, $N \cap \Sigma = \varnothing$, $P \subset N \times (N \cup \Sigma)^*$, P конечно и $S \in N$. Здесь Σ — *основной алфавит* (*терминальный алфавит*), его элементы называются *терминальными символами* или *терминалами*, N — *вспомогательный алфавит* (*нетерминальный алфавит*), его элементы называются *нетерминальными символами*, *нетерминалами вспомогательными символами* или *переменными*, S — *начальный символ* (*аксиома*). Пары $(A, \beta) \in P$ называются *правилами подстановки*, просто *правилами* или *продукциями* и записываются в виде $A \to \beta$.
Замечание 7.2. Будем обозначать элементы множества Σ строчными буквами из начала латинского алфавита, а элементы множества N — заглавными латинскими буквами. Обычно в примерах мы будем задавать грамматику в виде списка правил, подразумевая, что алфавит N составляют все заглавные буквы, встречающиеся в правилах, а алфавит Σ — все строчные буквы, встречающиеся в правилах. При этом правила порождающей грамматики записывают в таком порядке, что левая часть первого правила есть начальный символ S.
Определение 7.3. Пусть дана грамматика G. Пишем $\phi \underset{G}{\Rightarrow} \psi$, если $\phi = \eta A \theta$, $\psi = \eta\beta\theta$ и $(A \to \beta) \in P$ для некоторого символа A и некоторых слов β, η, θ в алфавите $N \cup \Sigma$. Если $\phi \underset{G}{\Rightarrow} \psi$, то говорят, что слово ψ *непосредственно выводимо* из слова ϕ.
Замечание 7.4. Когда из контекста ясно, о какой грамматике идёт речь, вместо $\underset{G}{\Rightarrow}$ можно писать просто $\Rightarrow$.
Определение 7.5. Если $\omega_0 \underset{G}{\Rightarrow} \omega_1 \underset{G}{\Rightarrow} \ldots \underset{G}{\Rightarrow} \omega_n$, где $n \geqslant 0$, то пишем $\omega_0 \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} \omega_n$ и говорим, что слово ω_n *непосредственно выводимо* из слова ω_0. Другими словами, бинарное отношение $\overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}}$ является рефлексивным, транзитивным замыканием бинарного отношения $\underset{G}{\Rightarrow}$, определённого на множестве $(N \cup \Sigma)^*$.

При этом последовательность слов ω_0, ω_1, …, ω_n называется *выводом* слова ω_n из слова ω_0 в грамматике G. Число n называется *длиной* (*количеством шагов*) этого вывода.
Упражнение 7.6. Рассмотрим контекстно-свободную грамматику

$$\begin{aligned} &V \to b,\\ &V \to aVT,\\ &T \to cVT,\\ &T \to d. \end{aligned}$$

Тогда

$$V \Rightarrow aVT \Rightarrow abT \Rightarrow abcVT \Rightarrow abcVT \Rightarrow abcbT \Rightarrow abcbd$$

является выводом длины 6 в этой грамматике.

Определение 7.7. Язык, *порождаемый* грамматикой G, — это множество $L(G) \rightleftharpoons \{\omega \in \Sigma^* \mid S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} \omega\}$. Будем также говорить, что грамматика G *порождает* язык $L(G)$.

Упражнение 7.8. Грамматика

$$S \to FF,$$
$$F \to aFb,$$
$$F \to ab$$

порождает язык $\{a^n b^n a^m b^m \mid n \geqslant 1,\ m \geqslant 1\}$.

Определение 7.9. Язык называется *контекстно-свободным* (или *алгебраическим*), если существует контекстно-свободная грамматика, порождающая данный язык.

Теорема 7.10. *Для каждой контекстно-свободной грамматики, включающей правила вида $K \to \varepsilon$, можно эффективно построить такую контекстно-свободную грамматику без этих правил, что разность языков, порождаемых этими грамматиками, либо пуста, либо содержит лишь пустое слово (см., например, [49, 3, 57].*

Замечание 7.11. Некоторые авторы в определении контекстно-свободной грамматики запрещают использовать правила вида $K \to \varepsilon$. Как видно из теоремы 7.10, это различие несущественно.

Теорема 7.12 (о нормальной форме Грейбах)**.** *Каждый контекстно-свободный язык без пустого слова порождается некоторой контекстно-свободной грамматикой, где каждое правило имеет вид $A \to aBC$, $A \to aB$ или $A \to a$.*

Проблема 7.13. Рассмотрим алфавит $\Sigma \rightleftharpoons \{[,],|,m_+,l_+,r_+,m_-,l_-,r_-\}$ и две функции $f_+ \colon \mathrm{Tp} \to \Sigma^+$ и $f_- \colon \mathrm{Tp} \to \Sigma^+$, определённые так:

$$\begin{aligned}
f_+(p_i) &\rightleftharpoons |^i & \qquad f_-(p_i) &\rightleftharpoons |^i \\
f_+(A \cdot B) &\rightleftharpoons [f_+(A)m_+f_+(B)] & f_-(A \cdot B) &\rightleftharpoons [f_-(B)m_-f_-(A)] \\
f_+(A \mathbin{/} B) &\rightleftharpoons [f_+(A)r_+f_-(B)] & f_-(A \mathbin{/} B) &\rightleftharpoons [f_+(B)r_-f_-(A)] \\
f_+(A \setminus B) &\rightleftharpoons [f_-(A)l_+f_+(B)] & f_-(A \setminus B) &\rightleftharpoons [f_-(B)l_-f_+(A)].
\end{aligned}$$

Пусть дано $k \geqslant 1$. Является ли контекстно-свободным язык $\{f_-(A_n)\dots f_-(A_1)f_+(B) \mid \mathrm{L}(p_1,\dots,p_k) \vdash A_1\ \dots\ A_n \to B\}$?

Упражнение 7.14. Является ли контекстно-свободным язык $\{f_-(A_n)\dots f_-(A_1)f_+(B) \mid \mathrm{L} \vdash A_1\ \dots\ A_n \to B\}$, где функции f_+ и f_- взяты из 7.13?

Определение 7.15. *Грамматика Ламбека* есть тройка $\langle \Sigma, H, \triangleright \rangle$, где Σ — произвольное конечное множество (алфавит), H — произвольный тип исчисления Ламбека и $\triangleright$ — произвольное конечное бинарное отношение $\triangleright \subset \mathrm{Tp} \times \Sigma$.

Язык, порождаемый грамматикой Ламбека $\langle \Sigma, H, \triangleright \rangle$, определяется как множество всех непустых слов $a_1 \dots a_n$ в алфавите Σ, для которых существует такая выводимая в исчислении Ламбека секвенция $B_1 \dots B_n \to H$, что для любого $i \leqslant n$ выполняется $B_i \triangleright a_i$. Обозначим этот язык через $\mathcal{L}_L(\Sigma, H, \triangleright)$.

Упражнение 7.16. Рассмотрим грамматику Ламбека

$$\langle \{a,b\}, q, \{\langle p, a\rangle, \langle p \setminus q, b\rangle, \langle q \setminus (p \setminus q), b\rangle\}\rangle.$$

Она порождает язык $\{a^n b^n \mid n \geqslant 1\}$.

Замечание 7.17. Над каждым алфавитом Σ существует язык, не порождаемый никакой грамматикой Ламбека. (Языков континуум, а неизоморфных грамматик лишь счётное число.)

Определение 7.18. *Базовая категориальная грамматика* есть тройка $\langle \Sigma, H, \triangleright \rangle$, где Σ — произвольное конечное множество (алфавит), $H \in \mathrm{Tp}(\setminus, /)$ и $\triangleright$ — произвольное конечное бинарное отношение $\triangleright \subset \mathrm{Tp}(\setminus, /) \times \Sigma$.

Язык, порождаемый базовой категориальной грамматикой $\langle \Sigma, H, \triangleright \rangle$, определяется как множество всех непустых слов $a_1 \dots a_n$ в алфавите Σ, для которых существует такие типы $B_1, \dots, B_n$, что для любого $i \leqslant n$ выполняется $B_i \triangleright a_i$ и секвенция $B_1 \dots B_n \to H$ выводится в исчислении с аксиомой $A \to A$ и правилами

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Delta \to A \setminus B}{\Gamma\ \Delta \to B}\ , \qquad\qquad \frac{\Gamma \to B \mathbin{/} A \quad \Delta \to A}{\Gamma\ \Delta \to B}\ .$$

Теорема 7.19. *Каждая базовая категориальная грамматика эквивалентна некоторой контекстно-свободной грамматике без пустого слова* (*см.* [28]).

Теорема 7.20 (Гайфман)**.** *Каждая контекстно-свободная грамматика без пустого слова эквивалентна некоторой базовой категориальной грамматике* (*см.* [28, 37]).

Лемма 7.21. *Если секвенция* $\Phi \to D$ *выводится в исчислении, приведённом в определения 7.18, то* $\mathrm{L}(\backslash, /) \vdash \Phi \to D$.

Теорема 7.22. *Каждая контекстно-свободная грамматика без пустого слова эквивалентна некоторой грамматике Ламбека* (*см.* [42, 37]).

Доказательство. Пусть дана контекстно-свободная грамматика $\langle N, \Sigma, P, S\rangle$ в нормальной форме Хомского. Здесь Σ — *основной алфавит*, N — *вспомогательный алфавит*, S — *начальный символ*, P — множество контекстно-свободных правил (обычно записываемых в виде $\alpha \to \beta$). Пусть $N \subseteq \mathrm{Pr}$. Положим $H \rightleftharpoons S$.

Определим $I\colon N \to \mathcal{P}(\mathrm{Tp})$ так:

- если $p \in N$, то $p \in I(p)$,
- если $(p \to qr) \in P$, то $q \setminus p \in I(r)$,
- если $t \in N$ и $(p \to qr) \in P$, то $(q \setminus p) / (t \setminus r) \in I(t)$.

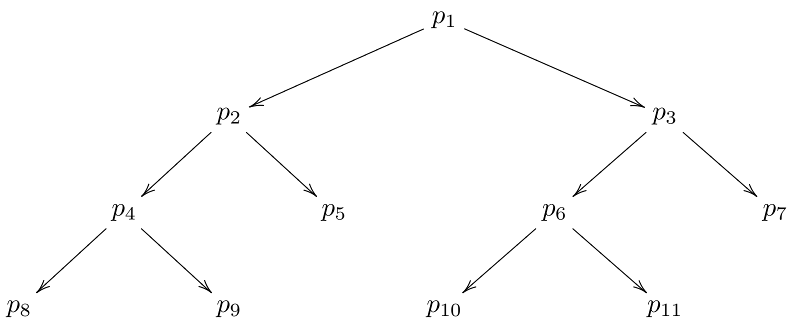
Положим $A \triangleright a$, если $A \in I(p)$ и $(p \to a) \in P$ для некоторого p.

Корректность построенной грамматики следует из того, что для любого $p \in N$ и любого $A \in I(p)$

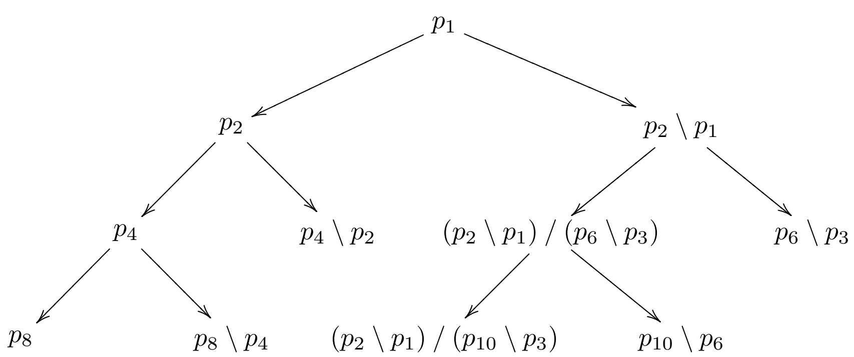
$$\mathrm{L} + \mathrm{Ax}_P \vdash p \to A.$$

Здесь $\mathrm{Ax}_P \rightleftharpoons \{qr \to p \mid (p \to qr) \in P$, а $\mathrm{L} + \mathrm{Ax}_P$ обозначает исчисление L с дополнительными аксиомами Ax_P. □

Пример 7.23. Контекстно-свободному выводу



соответствуют следующие типы исчисления Ламбека.



Заметим, что $\mathrm{L} \vdash p_8\ (p_8 \setminus p_4)\ (p_4 \setminus p_2)\ ((p_2 \setminus p_1) / (p_{10} \setminus p_3))\ (p_{10} \setminus p_6)\ (p_6 \setminus p_3) \to p_1$.

Теорема 7.24. *Каждая контекстно-свободная грамматика без пустого слова эквивалентна некоторой* $\mathrm{L}(\backslash)$*-грамматике* $\langle \Sigma, p_m, \triangleright \rangle$*, использующей только типы вида* p_i*,* $p_j \setminus p_i$ *и* $p_k \setminus (p_j \setminus p_i)$ (*см.* [42, 37]).

Пример 7.25. Грамматика из примера 7.6 эквивалентна $\mathrm{L}(\backslash)$-грамматике $\langle \Sigma, S, \triangleright \rangle$, где $V \triangleright b$, $(V \,/\, T) \,/\, V \triangleright a$, $(T \,/\, T) \,/\, V \triangleright c$, $T \triangleright d$. Здесь V и T считаются (различными) примитивными типами.

Теорема 7.26. *Каждая контекстно-свободная грамматика без пустого слова эквивалентна некоторой детерминированной категориальной грамматике над* $\mathrm{L}(\backslash, /)$ (*см.* [21]).

Проблема 7.27. Верен ли аналог теоремы 7.26 для $\mathrm{L}(\backslash)$? Верен ли аналог теоремы 7.26 для L^*?
Определение 7.28. Через $\lfloor A \rfloor$ обозначим суммарное количество вхождений примитивных типов в тип A:

$$\begin{aligned} \lfloor p_i \rfloor &\rightleftharpoons 1, \\ \lfloor A \cdot B \rfloor &\rightleftharpoons \lfloor A \rfloor + \lfloor B \rfloor, \\ \lfloor A \setminus B \rfloor &\rightleftharpoons \lfloor A \rfloor + \lfloor B \rfloor, \\ \lfloor A \,/\, B \rfloor &\rightleftharpoons \lfloor A \rfloor + \lfloor B \rfloor. \end{aligned}$$

Для последовательности типов полагаем

$$\lfloor A_1 \ldots A_n \rfloor \rightleftharpoons \lfloor A_1 \rfloor + \ldots + \lfloor A_n \rfloor.$$

Упражнение 7.29. $\lfloor A \rfloor = \sum\limits_{p \in \mathrm{Pr}} (\#_p^+(A) + \#_p^-(A))$.
Упражнение 7.30. $\|A\| = 2\lfloor A \rfloor - 1$.

Теорема 7.31. *Пусть* $L \vdash \Phi\Theta\Psi \to C$*, где* $\Phi \in \mathrm{Tp}^*$*,* $\Theta \in \mathrm{Tp}^+$*,* $\Psi \in \mathrm{Tp}^*$*,* $C \in \mathrm{Tp}$ *и секвенция* $\Phi\Theta\Psi \to C$ *является тонкой. Тогда существует такой тип* E*, что*

(i) $L \vdash \Theta \to E$,

(ii) $L \vdash \Phi E \Psi \to C$,

(iii) *секвенция* $\Theta \to E$ *является тонкой,*

(iv) *секвенция* $\Phi E \Psi \to C$ *является тонкой,*

(v) $\lfloor E \rfloor = |[\![\Theta]\!]|$.

Доказательство. Используя теорему 6.34 находим искомый тип E. Он удовлетворяет условиям (i) и (ii). Докажем, что он удовлетворяет также (iii), (iv) и (v).

Рассмотрим произвольный примитивный тип p. Так как $\#_p^+(E) \leqslant \#_p^+(C) + \#_p^-(\Phi\Psi)$, то $\#_p^+(E) + \#_p^-(\Theta) \leqslant \#_p^+(C) + \#_p^-(\Phi\Theta\Psi) \leqslant 1$ (последнее неравенство следует из того, что исходная секвенция $\Phi\Theta\Psi \to C$ является тонкой). Аналогично, $\#_p^-(E) + \#_p^+(\Theta) \leqslant \#_p^-(C) + \#_p^+(\Phi\Theta\Psi) \leqslant 1$. Тем самым доказано (iii).

Условие (iv) проверяется аналогично.

Для установления (v) достаточно проверить, что $\lfloor E \rfloor = |[\![E]\!]|$. Это очевидно, так как ни один примитивный тип не встречается в E более одного раза. □

Следующая вспомогательная лемма утверждает, по существу, что произвольная последовательность приведенных слов может сократиться до пустого слова только тогда, когда хотя бы одно из слов этой последовательности “потеряет” половину своих букв при сокращении с одним из своих соседей.

Лемма 7.32. *Если* $u_1, \ldots, u_n \in FG$*,* $n{>}1$ *и* $u_1 \ldots u_n = \varepsilon$*, то найдется индекс* $k{<}n$*, такой, что* $|u_k u_{k+1}| \leqslant \max(|u_k|, |u_{k+1}|)$.

Доказательство. Для любых двух элементов FG u_i и u_{i+1} существует три приведенных слова x_i, $y_{i,i+1}$ и z_{i+1} в группе FG, таких, что $u_i = x_i y_{i,i+1}$, $u_{i+1} = y_{i,i+1}^{-1} z_{i+1}$, $u_i u_{i+1} = x_i z_{i+1}$ и слова $x_i y_{i,i+1}$, $y_{i,i+1}^{-1} z_{i+1}$, $x_i z_{i+1}$ приведенные. Очевидно, $|u_i| = |x_i|+|y_{i,i+1}|$, $|u_{i+1}| = |y_{i,i+1}^{-1}|+|z_{i+1}| = |y_{i,i+1}|+|z_{i+1}|$ и $|u_i u_{i+1}| = |x_i|+|z_{i+1}|$.

Предположим, от противного, что для любого индекса $i < n$ имеют место неравенства $|u_i u_{i+1}| > |u_i|$ и $|u_i u_{i+1}| > |u_{i+1}|$. Из неравенства $|u_i u_{i+1}| > |u_i|$ получаем, что $|x_i|+|y_{i,i+1}| < |x_i|+|z_{i+1}|$, откуда $|y_{i,i+1}| < |z_{i+1}|$, и следовательно, $|y_{i,i+1}| < \frac{1}{2}|u_{i+1}|$. Аналогично, из неравенства $|u_i u_{i+1}| > |u_{i+1}|$ получаем, что $|y_{i,i+1}|+|z_{i+1}| < |x_i|+|z_{i+1}|$, откуда $|y_{i,i+1}| < |x_i|$, откуда, в свою очередь, $|y_{i,i+1}| < \frac{1}{2}|u_i|$.

Теперь рассмотрим произвольный индекс i, такой, что $1<i<n$. Напомним, что $u_i = y_{i-1,i}^{-1} z_i$ и, с другой стороны, $u_i = x_i y_{i,i+1}$. Оба слова $y_{i-1,i}^{-1} z_i$ и $x_i y_{i,i+1}$ являются приведенными и поэтому совпадают. Поскольку $|y_{i-1,i}^{-1}| < \frac{1}{2}|u_i|$ и $|y_{i,i+1}| < \frac{1}{2}|u_i|$, имеем $u_i = y_{i-1,i}^{-1} w_i y_{i,i+1}$, $x_i = y_{i-1,i}^{-1} w_i$ и $z_i = w_i y_{i,i+1}$ для подходящего приведенного слова w_i. Заметим, что как $y_{i-1,i}^{-1} w_i$, так и $w_i y_{i,i+1}$ являются приведенными.

Подставляя в равенство $u_1 \ldots u_n = \varepsilon$ выражение $x_1 y_{1,2}$ вместо u_1, $y_{n-1,n}^{-1} z_n$ вместо u_n и $y_{i-1,i}^{-1} w_i y_{i,i+1}$ вместо u_i (где $1<i<n$), получаем, что $x_1 w_2 w_3 \ldots w_{n-1} z_n = \varepsilon$.

Проверим теперь, что слово $x_1 w_2 w_3 \ldots w_{n-1} z_n$ является приведенным. Заметим, что слово $x_1 w_2$ приведенное, так как таковым является слово $x_1 z_2 = x_1(w_2 y_{2,3})$. Аналогично, слово $w_{n-1} z_n$ приведенное, так как слово $x_{n-1} z_n = (y_{n-2,n-1}^{-1} w_{n-1}) z_n$ приведенное. Наконец, для любого индекса i, удовлетворяющего неравенству $1<i<n-1$, слово $w_i w_{i+1}$ приведенное, поскольку таковым является слово $x_i z_{i+1} = (y_{i-1,i}^{-1} w_i)(w_{i+1} y_{i+1,i+2})$.

Мы установили, что слово $x_1 w_2 w_3 \ldots w_{n-1} z_n$ приведенное и $x_1 w_2 w_3 \ldots w_{n-1} z_n = \varepsilon$. Отсюда следует, что каждое из слов x_1, w_2, w_3, …, w_{n-1} и z_n совпадает с пустым словом ε. Однако на самом деле все они непустые, поскольку $|y_{i-1,i}^{-1}| < \frac{1}{2}|u_i|$ и $|y_{i,i+1}| < \frac{1}{2}|u_i|$. Получили противоречие. $\square$

Определение 7.33. Для любого натурального числа m определим множество ограниченных типов $\mathrm{Tp}(m)$ и множество ограниченных последовательностей типов $\mathrm{Ls}(m)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tp}(m) &\rightleftharpoons \{A \in \mathrm{Tp} \mid \|A\| \le m\}, \\ \mathrm{Ls}(m) &\rightleftharpoons \{\Pi \in \mathrm{Tp}(m)^+ \mid \|\Pi\| \le 2m\}. \end{aligned}$$

Определение 7.34. Для любых двух натуральных чисел m и s определим конечное множество типов $\mathrm{Tp}(m,s)$ и конечное множество последовательностей типов $\mathrm{Ls}(m,s)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tp}(m,s) &\rightleftharpoons \{A \in \mathrm{Tp} \mid \mathrm{var}(A) \subseteq \{p_1,\ldots,p_s\},\ \|A\| \le m\}, \\ \mathrm{Ls}(m,s) &\rightleftharpoons \{\Pi \in \mathrm{Tp}(m,s)^+ \mid \|\Pi\| \le 2m\}. \end{aligned}$$

Определение 7.35. Секвенция $\Gamma \to A$ считается аксиомой исчисления $Lcut_m$ тогда и только тогда, когда $L \vdash \Gamma \to A$, $A \in \mathrm{Tp}(m)$ и $\Gamma \in \mathrm{Ls}(m)$. Единственным правилом исчисления $Lcut_m$ является (cut).

Лемма 7.36. *Пусть $L \vdash \Pi \to C$, где $\Pi \in \mathrm{Ls}(m)$, $C \in \mathrm{Tp}(m)$, и секвенция $\Pi \to C$ тонкая. Тогда $Lcut_m \vdash \Pi \to C$.*

Доказательство. Индукция по $\|\Pi\|$.

Если $\|\Pi\| < 2m$, то $\Pi \to C$ является аксиомой исчисления $Lcut_m$.

Пусть $\|\Pi\| \geqslant 2m$. Представим последовательность Π в виде конкатенации $\Pi_1 \ldots \Pi_l$, где

- для каждого $i \leqslant l$ имеет место неравенство $\|\Pi_i\| \leqslant m$,
- для каждого $i < l$ имеет место неравенство $\|\Pi_i\| + \|\Pi_{i+1}\| > m$.

Согласно теореме 6.13 имеем $[\![\Pi]\!] = [\![C]\!]$. Обозначим $u_1 \rightleftharpoons [\![\Pi_1]\!]$, …, $u_l \rightleftharpoons [\![\Pi_l]\!]$, $u_{l+1} \rightleftharpoons [\![C]\!]^{-1}$. Очевидно, $u_1 \ldots u_l u_{l+1} = \varepsilon$. В силу леммы 7.32 найдётся такой индекс $k \leqslant l$, что $|u_k u_{k+1}| \leqslant \max(|u_k|, |u_{k+1}|)$.

Согласно упражнениям 6.12 и 7.30 для каждого $i < l$ имеет место неравенство $|u_i| \leqslant m$. Следовательно, $|u_k u_{k+1}| \leqslant m$.

Случай 1: Пусть $k < l$. Для этого значения k имеем $|[\![\Pi_k\Pi_{k+1}]\!]| \leqslant m$. Применив теорему 7.31, где

$$\underbrace{\Pi_1 \ldots \Pi_{k-1}}_{\Phi}\underbrace{\Pi_k\Pi_{k+1}}_{\Theta}\underbrace{\Pi_{k+2} \ldots \Pi_l}_{\Psi} \to C,$$

найдем такой интерполянт E для последовательности $\Pi_k\Pi_{k+1}$ в секвенции $\Pi_1 \ldots \Pi_l \to C$, что $\|E\| \leqslant m$ и выводимы тонкие секвенции $\Pi_k\Pi_{k+1} \to E$ и $\Pi_1 \ldots \Pi_{k-1}E\Pi_{k+2} \ldots \Pi_l \to C$.

Заметим, что $\|E\| \leqslant m$, но $\|\Pi_k\Pi_{k+1}\| > m$. Следовательно,

$$\|\Pi_1 \ldots \Pi_{k-1}E\Pi_{k+2} \ldots \Pi_l\| < \|\Pi_1 \ldots \Pi_l\|$$

и можно применить предположение индукции к выводимой тонкой секвенции

$$\Pi_1 \ldots \Pi_{k-1}E\Pi_{k+2} \ldots \Pi_l \to C.$$

С другой стороны, секвенция $\Pi_k\Pi_{k+1} \to E$ является аксиомой исчисления $Lcut_m$, так как $\|E\| \leqslant m$ и $\|\Pi_k\Pi_{k+1}\| \leqslant 2m$.

Мы доказали, что $Lcut_m \vdash \Pi_1 \ldots \Pi_{k-1}E\Pi_{k+2} \ldots \Pi_l \to C$ и $Lcut_m \vdash \Pi_k\Pi_{k+1} \to E$. Применяя правило сечения, получим, что

$$Lcut_m \vdash \Pi_1 \ldots \Pi_{k-1}\Pi_k\Pi_{k+1}\Pi_{k+2} \ldots \Pi_l \to C,$$

т. е. $Lcut_m \vdash \Pi \to C$.

Случай 2: Пусть $k = l$. Имеем $|[\![\Pi_l]\!][\![C]\!]^{-1}| \leqslant m$. Применив теорему 7.31, где

$$\underbrace{\Pi_1 \ldots \Pi_{l-1}}_{\Theta}\underbrace{\Pi_l}_{\Psi} \to C,$$

найдем интерполянт E для последовательности $\Pi_1 \ldots \Pi_{l-1}$ в секвенции $\Pi_1 \ldots \Pi_l \to C$, такой что $\|E\| = |[\![\Pi_1 \ldots \Pi_{l-1}]\!]|$ и выводимы тонкие секвенции $\Pi_1 \ldots \Pi_{l-1} \to E$ и $E\Pi_l \to C$.

Напомним, что $[\![\Pi_1 \ldots \Pi_{l-1}\Pi_l]\!] = [\![C]\!]$, откуда $[\![\Pi_1 \ldots \Pi_{l-1}]\!] = [\![C]\!][\![\Pi_l]\!]^{-1} = ([\![\Pi_l]\!][\![C]\!]^{-1})^{-1}$ и, далее, $|[\![\Pi_1 \ldots \Pi_{l-1}]\!]| = |([\![\Pi_l]\!][\![C]\!]^{-1})^{-1}| = |[\![\Pi_l]\!][\![C]\!]^{-1}| \leqslant m$. Следовательно, $\|E\| = |[\![\Pi_1 \ldots \Pi_{l-1}]\!]| \leqslant m$. Получаем, что $E\Pi_l \in \mathrm{Ls}(m, s)$ и, следовательно, секвенция $E\Pi_l \to C$ является аксиомой исчисления $Lcut_m$.

С другой стороны, $\|\Pi_1 \ldots \Pi_{l-1}\| < \|\Pi_1 \ldots \Pi_l\|$. Осталось применить предположение индукции к тонкой выводимой секвенции $\Pi_1 \ldots \Pi_{l-1} \to E$.

Применяя правило сечения, получим, что

$$Lcut_m \vdash \Pi_1 \ldots \Pi_{l-1}\Pi_l \to C,$$

т. е. $Lcut_m \vdash \Pi \to C$. □

Лемма 7.37. *Пусть* $\Gamma \in \mathrm{Tp}(m)^+$, $A \in \mathrm{Tp}(m)$. *Тогда равносильны следующие утверждения:*

(i) $Lcut_m \vdash \Gamma \to A$,

(ii) $L \vdash \Gamma \to A$.

Доказательство. Используем теорему 6.30 и лемму 7.36. □

Теорема 7.38. *Каждая грамматика Ламбека эквивалентна некоторой контекстно-свободной грамматике без пустого слова* (*см.* [13]).

Доказательство. Рассмотрим произвольную грамматику Ламбека $\langle \Sigma, H, \triangleright \rangle$. Поскольку определение языка, порождаемого этой грамматикой, затрагивает только конечное число типов, найдутся такие положительные целые числа m и s, что $H \in \mathrm{Tp}(m, s)$ и если $B \triangleright a$ для некоторого $a \in \Sigma$, то $B \in \mathrm{Tp}(m, s)$.

Не уменьшая общности, можно считать, что множества Σ и $\mathrm{Tp}(m, s)$ не пересекаются. Построим теперь искомую контекстно-свободную грамматику $\langle N, \Sigma, P, S \rangle$:

$$\begin{aligned} N &\rightleftharpoons \mathrm{Tp}(m, s), \\ S &\rightleftharpoons H, \\ P &\rightleftharpoons \{B \to a \mid a \in \Sigma,\ B \triangleright a\} \cup \\ &\qquad \cup \{A \to \Gamma \mid A \in \mathrm{Tp}(m, s),\ \Gamma \in \mathrm{Ls}(m, s),\ L \vdash \Gamma \to A\}. \end{aligned}$$

Осталось применить лемму 7.37. □

Следствие 7.39. *Класс языков, порождаемых грамматиками Ламбека, совпадает с классом всех контекстно-свободных языков без пустого слова.*

Теорема 7.40. *Каждый контекстно-свободный язык порождается некоторой* L^**-грамматикой* (*см.* [7, теорема 2*]).

Доказательство. Пусть язык M содержит пустое слово (иначе подойдёт грамматика из теоремы 7.24). Пусть в $\mathrm{L}(\backslash)$-Согласно теореме 7.24 язык $M - \{\varepsilon\}$ порождается грамматикой $\mathcal{G} = \langle \Sigma, p_1, \triangleright \rangle$, где встречаются только типы вида p_i, $p_j \setminus p_i$ и $p_k \setminus (p_j \setminus p_i)$. Можно даже добиться того, чтобы во всех используемых типах вида $p_j \setminus p_i$ и $p_k \setminus (p_j \setminus p_i)$ выполнялось $j \neq 1$ и $k \neq 1$. Тогда язык M порождается грамматикой $\mathcal{G}[p_1 := ((r \setminus r) \setminus ((s \setminus s) \setminus q)) \setminus q]$, где q, r, s — примитивные типы, не встречающиеся в $\mathcal{G}$. □

Следствие 7.41. *Класс языков, порождаемых* L^**-грамматиками, совпадает с классом всех контекстно-свободных языков.*

Теорема 7.42. *Класс языков, порождаемых* $\mathrm{L}^*(\backslash; p_1)$*-грамматиками, совпадает с классом всех контекстно-свободных языков* (*см.* [7]).

Проблема 7.43. Совпадает ли класс языков, порождаемых LP^*-грамматиками, с классом пермутационных замыканий контекстно-свободных языков?
Проблема 7.44. Какие языки порождаются $\mathrm{L}^*(\cdot, \backslash, /, \cup)$-грамматиками?
Проблема 7.45. Какие языки порождаются $\mathrm{L}^*(\cdot, \backslash, /, \cap)$-грамматиками?
Проблема 7.46. Какие языки порождаются $\mathrm{L}^*(\cdot, \backslash, /, \Uparrow)$-грамматиками?

8 Некоммутативная линейная логика

8.1 Определение исчисления MCLL

Рассмотрим *мультипликативный фрагмент циклической линейной логики*, введенной в [111]. Этот фрагмент будем обозначать через MCLL.
Определение 8.1. Предполагаем, что задано счетное множество

$$\mathrm{Var} = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}.$$

В контексте линейной логики элементы этого множества будем называть *переменными.* Они играют в точности ту же роль, что примитивные типы в исчислении Ламбека.
Определение 8.2. Определим множество формул Fm исчисления MCLL как наименьшее множество, удовлетворяющее следующим условиям:

- $\mathbf{1} \in \mathrm{Fm}$ и $\perp \in \mathrm{Fm}$,
- если $p_i \in \mathrm{Var}$, то $p_i \in \mathrm{Fm}$ и $\overline{p_i} \in \mathrm{Fm}$,
- если $A \in \mathrm{Fm}$ и $B \in \mathrm{Fm}$, то
  $(A \otimes B) \in \mathrm{Fm}$ и $(A \parr B) \in \mathrm{Fm}$.

Для экономии скобок будем считать, что у связки $\otimes$ приоритет выше, чем у $\parr$, и обе связки левоассоциативны. Следуя Ж.-И. Жирару, будем называть связки $\otimes$ и $\parr$ "тензор" и "пар" соответственно. Среди так называемых мультипликативных связок линейной логики они играют роль конъюнкции и дизъюнкции соответственно.
Определение 8.3. $\mathrm{At} \rightleftharpoons \mathrm{Var} \cup \{\overline{q} \mid q \in \mathrm{Var}\}$.
Определение 8.4. *Секвенции* исчисления MCLL имеют вид $\to \Gamma$, где $\Gamma \in \mathrm{Fm}^*$.
Определение 8.5. На множестве Fm определена операция

$$(\,\cdot\,)^{\perp} \colon \mathrm{Fm} \to \mathrm{Fm},$$

ставящая в соответствие каждой формуле её отрицание.

$$
\begin{array}{rcl}
(\mathbf{1})^{\perp} & \rightleftharpoons & \perp \\
(\perp)^{\perp} & \rightleftharpoons & \mathbf{1} \\
(p_i)^{\perp} & \rightleftharpoons & \overline{p_i} \\
(\overline{p_i})^{\perp} & \rightleftharpoons & p_i \\
(A \otimes B)^{\perp} & \rightleftharpoons & ((B)^{\perp} \invamp (A)^{\perp}) \\
(A \invamp B)^{\perp} & \rightleftharpoons & ((B)^{\perp} \otimes (A)^{\perp})
\end{array}
$$

Лемма 8.6. *Для любой $A \in \mathrm{Fm}$ формула $(A^{\perp})^{\perp}$ совпадает с A.*

Определение 8.7. На множестве Fm^* определим операцию $(\,\cdot\,)^{\perp}\colon \mathrm{Fm}^* \to \mathrm{Fm}^*$ следующим образом:

$$(A_1\ \ldots\ A_n)^{\perp} \rightleftharpoons A_n^{\perp}\ \ldots\ A_1^{\perp}.$$

Определение 8.8. Будем писать $\mathrm{MCLL} \vdash \Gamma$, если секвенция $\to \Gamma$ выводима в исчислении MCLL. Иногда будем также писать $\mathrm{MCLL} \vdash A_1 \ldots A_n \to B$, если секвенция $\to (A_n)^{\perp} \ldots (A_1)^{\perp}\, B$ выводима в исчислении MCLL.

Аксиомами исчисления MCLL служат все секвенции вида $\to \overline{p_i}\ p_i$, где $p_i \in \mathrm{Var}$, а также секвенция $\to \mathbf{1}$.

Исчисление MCLL имеет следующие правила.

$$\frac{\to \Gamma\ \Delta}{\to \Gamma\ \perp\ \Delta}\ (\to \perp)$$

$$\frac{\to \Gamma\ A\ B\ \Delta}{\to \Gamma\ (A \invamp B)\ \Delta}\ (\to \invamp) \qquad \frac{\to \Gamma\ A \quad \to B\ \Delta}{\to \Gamma\ (A \otimes B)\ \Delta}\ (\to \otimes)$$

$$\frac{\to \Gamma\ \Delta}{\to \Delta\ \Gamma}\ (\mathrm{rotate}) \qquad \frac{\to \Gamma\ A \quad \to (A)^{\perp}\ \Delta}{\to \Gamma\ \Delta}\ (\mathrm{cut})$$

Упражнение 8.9. $\mathrm{MCLL} \vdash \overline{p_1}\ (p_1 \otimes (\overline{p_1} \invamp p_1))$.
Упражнение 8.10. $\mathrm{MCLL} \nvdash ((p_1 \invamp p_2) \otimes p_3)\ ((\overline{p_3} \invamp \overline{p_2}) \otimes \overline{p_1})$.
Упражнение 8.11. $\mathrm{MCLL} \vdash (p_2 \otimes (p_3 \invamp \overline{p_3}))\ (\overline{p_2} \otimes \overline{p_1} \invamp p_1)$.
Упражнение 8.12. $\mathrm{MCLL} \vdash (\overline{p_1} \otimes p_2)\ (\overline{p_2} \otimes p_3)\ (\overline{p_3} \invamp p_1)$.

Лемма 8.13. *Правило $(\to \invamp)$ обратимо.*

Теорема 8.14. *Любую секвенцию, выводимую в исчислении* MCLL, *можно вывести без использования правила* (cut).

Определение 8.15. Если $\mathrm{MCLL} \vdash A \to B$ и $\mathrm{MCLL} \vdash B \to A$, то пишут $A \underset{\mathrm{MCLL}}{\leftrightarrow} B$.

Упражнение 8.16. $(p_1 \otimes p_2) \otimes p_3 \underset{\mathrm{MCLL}}{\leftrightarrow} p_1 \otimes (p_2 \otimes p_3)$.

Упражнение 8.17. $(p_1 \invamp p_2) \invamp p_3 \underset{\mathrm{MCLL}}{\leftrightarrow} p_1 \invamp (p_2 \invamp p_3)$.

Теорема 8.18. *Если* $\mathrm{MCLL} \vdash A_1 \to A_2$, *то* $\mathrm{MCLL} \vdash A_2^{\perp} \to A_1^{\perp}$.

Следствие 8.19. *Если* $A_1 \underset{\mathrm{MCLL}}{\leftrightarrow} A_2$, *то* $A_1^{\perp} \underset{\mathrm{MCLL}}{\leftrightarrow} A_2^{\perp}$.

Теорема 8.20. *Если* $\mathrm{MCLL} \vdash A_1 \to A_2$ *и* $\mathrm{MCLL} \vdash B_1 \to B_2$, *то* $\mathrm{MCLL} \vdash A_1 \otimes B_1 \to A_2 \otimes B_2$ *и* $\mathrm{MCLL} \vdash A_1 \invamp B_1 \to A_2 \invamp B_2$.

Следствие 8.21. *Если* $A_1 \underset{\mathrm{MCLL}}{\leftrightarrow} A_2$ *и* $B_1 \underset{\mathrm{MCLL}}{\leftrightarrow} B_2$, *то* $A_1 \otimes B_1 \underset{\mathrm{MCLL}}{\leftrightarrow} A_2 \otimes B_2$ *и* $A_1 \invamp B_1 \underset{\mathrm{MCLL}}{\leftrightarrow} A_2 \invamp B_2$.

Определение 8.22. Обозначим через $\underline{\mathrm{Fm}}$ множество формул, не содержащих $\mathbf{1}$ и $\perp$.
Определение 8.23. Обозначим через $\underline{\mathrm{MCLL}}$ фрагмент исчисления MCLL без констант $\mathbf{1}$ и $\perp$.

8.2 Исчисление без правила циклической перестановки

Определим исчисление $\underline{\mathrm{MCLL}}'$, эквивалентное исчислению $\underline{\mathrm{MCLL}}$.
Определение 8.24. Выводимыми объектами исчисления $\underline{\mathrm{MCLL}}'$ являются секвенции вида $\to \Gamma$, где $\Gamma \in \underline{\mathrm{Fm}}^*$. Будем писать $\underline{\mathrm{MCLL}}' \vdash \Gamma$, если секвенция $\to \Gamma$ выводима в исчислении $\underline{\mathrm{MCLL}}'$. Иногда будем также писать $\underline{\mathrm{MCLL}}' \vdash A_1 \ldots A_n \to B$, если секвенция $\to (A_n)^\perp \ldots (A_1)^\perp B$ выводима в исчислении $\underline{\mathrm{MCLL}}'$.

Аксиомами исчисления $\underline{\mathrm{MCLL}}'$ служат все секвенции вида $\to \overline{p_i}\, p_i$ и $\to p_i\, \overline{p_i}$, где $p_i \in \mathrm{Var}$.

Исчисление $\underline{\mathrm{MCLL}}'$ имеет следующие правила.

$$\frac{\to \Gamma\ A\ B\ \Delta}{\to \Gamma\ (A \parr B)\ \Delta}\ (\to \parr)$$

$$\frac{\to \Gamma\ A\ \Pi \quad \to B\ \Delta}{\to \Gamma\ (A \otimes B)\ \Delta\ \Pi}\ (\to \otimes_1) \qquad \frac{\to \Gamma\ A \quad \to \Pi\ B\ \Delta}{\to \Pi\ \Gamma\ (A \otimes B)\ \Delta}\ (\to \otimes_2)$$

$$\frac{\to \Gamma\ A\ \Pi \quad \to (A)^\perp\ \Delta}{\to \Gamma\ \Delta\ \Pi}\ (\mathrm{cut}_1) \qquad \frac{\to \Gamma\ A \quad \to \Pi\ (A)^\perp\ \Delta}{\to \Pi\ \Gamma\ \Delta}\ (\mathrm{cut}_2)$$

Теорема 8.25. *Любую секвенцию, выводимую в исчислении* $\underline{\mathrm{MCLL}}'$, *можно вывести без использования правил* (cut_1) *и* (cut_2).

Лемма 8.26. *Если* $\underline{\mathrm{MCLL}}' \vdash \Phi\ \Psi$, *то* $\underline{\mathrm{MCLL}}' \vdash \Psi\ \Phi$.

Доказательство. Индукция по длине вывода. □

Теорема 8.27. *Пусть* $\Gamma \in \underline{\mathrm{Fm}}^*$. *Секвенция* $\to \Gamma$ *выводима в* $\underline{\mathrm{MCLL}}'$ *тогда и только тогда, когда она выводима в* $\underline{\mathrm{MCLL}}$.

8.3 Инварианты

Определение 8.28.

$$\begin{aligned}
\flat(p) &\rightleftharpoons 0,\\
\flat(\overline{p}) &\rightleftharpoons 0,\\
\flat(\mathbf{1}) &\rightleftharpoons 1,\\
\flat(\perp) &\rightleftharpoons -1,\\
\flat(A \otimes B) &\rightleftharpoons \flat(A) + \flat(B) - 1,\\
\flat(A \parr B) &\rightleftharpoons \flat(A) + \flat(B) + 1.
\end{aligned}$$

Определение 8.29.

$$\begin{aligned}
\natural(p) &\rightleftharpoons 1,\\
\natural(\overline{p}) &\rightleftharpoons -1,\\
\natural(\mathbf{1}) &\rightleftharpoons 1,\\
\natural(\perp) &\rightleftharpoons -1,\\
\natural(A \otimes B) &\rightleftharpoons \natural(A) + \natural(B) - 1,\\
\natural(A \parr B) &\rightleftharpoons \natural(A) + \natural(B) + 1.
\end{aligned}$$

Упражнение 8.30. Число $\natural(A)$ нечётно при любом $A \in \mathrm{Fm}$.

Лемма 8.31. *Пусть* $A \in \mathrm{Fm}$. *Тогда* $\flat(A^\perp) = -\flat(A)$ *и* $\natural(A^\perp) = -\natural(A)$.

Теорема 8.32. *Если* $\mathrm{MCLL} \vdash A_1\ \ldots\ A_n$, *то* $\flat(A_1) + \ldots + \flat(A_n) = 2 - n$ *и* $\natural(A_1) + \ldots + \natural(A_n) = 2 - n$.

Следствие 8.33. *Если* $\mathrm{MCLL} \vdash A \to B$, *то* $\flat(A) = \flat(B)$ *и* $\natural(A) = \natural(B)$.

Определение 8.34. Определим перевод prop, ставящий в соответствие формулам и секвенциям исчисления MCLL формулы языка логики высказываний следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathrm{prop}(p_i) &\rightleftharpoons p_i,\\
\mathrm{prop}(\overline{p_i}) &\rightleftharpoons \neg p_i,\\
\mathrm{prop}(\mathbf{1}) &\rightleftharpoons \top,\\
\mathrm{prop}(\bot) &\rightleftharpoons \bot,\\
\mathrm{prop}(A \otimes B) &\rightleftharpoons \mathrm{prop}(A) \wedge \mathrm{prop}(B),\\
\mathrm{prop}(A \parr B) &\rightleftharpoons \mathrm{prop}(A) \vee \mathrm{prop}(B),\\
\mathrm{prop}(A_1\ \ldots\ A_n) &\rightleftharpoons \mathrm{prop}(A_1) \vee \ldots \vee \mathrm{prop}(A_n),
\end{aligned}$$

Теорема 8.35. *Если* MCLL $\vdash \Gamma$*, то формула* $\mathrm{prop}(\Gamma)$ *выводима в классической логике.*

Упражнение 8.36. Если $A \in \mathrm{Fm}$, то формулы $\mathrm{prop}(A^\bot)$ и $\neg\,\mathrm{prop}(A)$ эквивалентны в классической логике.

8.4 Консервативность над исчислением Ламбека

Определение 8.37. Каждому типу $A \in \mathrm{Tp}$ поставим в соответствие формулу $\widehat{A} \in \mathrm{Fm}$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
\widehat{p} &\rightleftharpoons p,\\
\widehat{A \,/\, B} &\rightleftharpoons \widehat{A} \parr (\widehat{B}^\bot),\\
\widehat{A \setminus B} &\rightleftharpoons (\widehat{A}^\bot) \parr \widehat{B},\\
\widehat{A \cdot B} &\rightleftharpoons \widehat{A} \otimes \widehat{B}.
\end{aligned}$$

Упражнение 8.38. Если $A \in \mathrm{Tp}$, то формулы $\mathrm{prop}(A)$ (см. определение 6.1) и $\mathrm{prop}(\widehat{A})$ эквивалентны в классической логике.

Лемма 8.39. *Пусть* $A \in \mathrm{Tp}$*. Тогда* $\natural(\widehat{A}) = 1$.

Определение 8.40. На множестве Tp^* определим отображение $\widehat{\ }\colon \mathrm{Tp}^* \to \mathrm{Fm}^*$ следующим образом:

$$\widehat{A_1\ \ldots\ A_n} \rightleftharpoons \widehat{A_1}\ \ldots\ \widehat{A_n}.$$

Теорема 8.41. *Пусть* $A_1, \ldots, A_n, B \in \mathrm{Tp}$*. Секвенция* $A_1\ \ldots\ A_n \to B$ *выводима в* L^* *тогда и только тогда, когда* MCLL $\vdash \widehat{A_1}\ \ldots\ \widehat{A_n} \to \widehat{B}$.

Замечание 8.42. Теорема 8.41 утверждает, что исчисление MCLL консервативно над исчислением L^* при переводе $A \setminus B$ как $(A)^\bot \parr B$ и $B \,/\, A$ как $B \parr (A)^\bot$. Если наложить на правило $(\to \parr)$ требование $\Gamma\Delta \neq \Lambda$, то получим вариант циклической линейной логики, консервативный над исчислением Ламбека.

Упражнение 8.43. MCLL $\vdash (\widehat{p \cdot q}) \setminus q\ (\widehat{p \cdot q}) \setminus q \to (p \cdot \widehat{p \cdot q}) \setminus q$.

8.5 Интерпретация формул MCLL в свободной группе

Определение 8.44. *Длину* $\|A\|$ формулы A определим как количество вхождений переменных в A.

$$\begin{array}{rcl}
\|\mathbf{1}\| & \rightleftharpoons & 0\\
\|\bot\| & \rightleftharpoons & 0\\
\|p_i\| & \rightleftharpoons & 1\\
\|\overline{p_i}\| & \rightleftharpoons & 1\\
\|A \otimes B\| & \rightleftharpoons & \|A\| + \|B\|\\
\|A \parr B\| & \rightleftharpoons & \|A\| + \|B\|
\end{array}$$

Длина последовательности формул определяется естественным образом:

$$\|A_1 \ldots A_n\| \rightleftharpoons \|A_1\| + \ldots + \|A_n\|.$$

Упражнение 8.45. Для каждого типа $A \in \mathrm{Tp}$ выполняется равенство $\|A\| = \|\widehat{A}\|$.
Определение 8.46. *Интерпретацией формул* MCLL *в свободной группе* (будем обозначать ее $[\![\ ]\!]$) назовем следующее естественное отображение формул и их конечных последовательностей в группу FG:

$$\begin{array}{rcl}
[\![\mathbf{1}]\!] & \rightleftharpoons & \varepsilon \\
[\![\bot]\!] & \rightleftharpoons & \varepsilon \\
[\![p_i]\!] & \rightleftharpoons & p_i \\
[\![\overline{p_i}]\!] & \rightleftharpoons & p_i^{-1} \\
[\![A \otimes B]\!] & \rightleftharpoons & [\![A]\!][\![B]\!] \\
[\![A \parr B]\!] & \rightleftharpoons & [\![A]\!][\![B]\!] \\
[\![A_1 \dots A_n]\!] & \rightleftharpoons & [\![A_1]\!] \dots [\![A_n]\!].
\end{array}$$

Лемма 8.47. *Для любой формулы* $A \in \mathrm{Fm}$ *справедливо неравенство* $|[\![A]\!]| \leqslant \|A\|$.

Доказательство. Индукция по построению формулы A. □

Лемма 8.48. *Для любой формулы* $A \in \mathrm{Fm}$ *справедливо равенство* $[\![A^\bot]\!] = [\![A]\!]^{-1}$.

Лемма 8.49. *Если секвенция* $\to \Gamma$ *выводима в исчислении* MCLL*, то* $[\![\Gamma]\!] = \varepsilon$.

Доказательство. Эта лемма доказывается аналогично теореме 6.13 индукцией по длине вывода. □

8.6 Тонкие секвенции в исчислении MCLL

Определение 8.50. Для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$ определим два отображения $\#_p^+$ и $\#_p^-$ из множества Fm в множество $\mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcl}
\#_p^+(q) & \rightleftharpoons & \begin{cases} 1, & \text{если } p = q \\ 0, & \text{если } q \in \mathrm{Var} \text{ и } p \neq q \end{cases} \\
\#_p^-(q) & \rightleftharpoons & 0, \text{если } q \in \mathrm{Var} \\
\#_p^+(q^{-1}) & \rightleftharpoons & 0, \text{если } q \in \mathrm{Var} \\
\#_p^-(q^{-1}) & \rightleftharpoons & \begin{cases} 1, & \text{если } p = q \\ 0, & \text{если } q \in \mathrm{Var} \text{ и } p \neq q \end{cases} \\
\#_p^+(A \otimes B) & \rightleftharpoons & \#_p^+(A) + \#_p^+(B) \\
\#_p^-(A \otimes B) & \rightleftharpoons & \#_p^-(A) + \#_p^-(B) \\
\#_p^+(A \parr B) & \rightleftharpoons & \#_p^+(A) + \#_p^+(B) \\
\#_p^-(A \parr B) & \rightleftharpoons & \#_p^-(A) + \#_p^-(B)
\end{array}$$

Распространим эти определения и на последовательности формул.

$$\begin{array}{rcl}
\#_p^+(A_1 \dots A_n) & \rightleftharpoons & \#_p^+(A_1) + \dots + \#_p^+(A_n) \\
\#_p^-(A_1 \dots A_n) & \rightleftharpoons & \#_p^-(A_1) + \dots + \#_p^-(A_n)
\end{array}$$

Определение 8.51. Секвенция $\to \Pi$ называется *тонкой* тогда и только тогда, когда для любого $p \in \mathrm{Var}$ справедливы неравенства $\#_p^+(\Pi) \leqslant 1$ и $\#_p^-(\Pi) \leqslant 1$.

Лемма 8.52. *Пусть* ϕ *— некоторая подстановка переменных. Если в произвольном выводе исчисления* MCLL *заменить каждую секвенцию* $\to \Gamma$ *на* $\to \phi(\Gamma)$*, то полученное дерево является выводом в* MCLL*.*

Теорема 8.53. *Секвенция* $\to \Pi$ *выводима в* MCLL *тогда и только тогда, когда существует выводимая в* MCLL *тонкая секвенция* $\to \Theta$ *и найдется такая подстановка* ϕ*, что* $\Pi = \phi(\Theta)$*.*

8.7 Интерполяция в MCLL

Лемма 8.54. *Пусть* $\mathrm{MCLL} \vdash \Gamma\Pi\Delta$*, где* $\Gamma \in \mathrm{Fm}^*$, $\Pi \in \mathrm{Fm}^*$ *и* $\Delta \in \mathrm{Fm}^*$*. Тогда существует такая формула* E*, что*

(i) $\mathrm{MCLL} \vdash (E)^{\perp}\,\Pi$,

(ii) $\mathrm{MCLL} \vdash \Gamma E \Delta$,

(iii) *для любой* $p \in \mathrm{Var}$ *имеет место неравенство*

$$\#_p^+(E) \leq \min(\#_p^+(\Pi), \#_p^-(\Gamma\Delta)),$$

(iv) *для любой* $p \in \mathrm{Var}$ *имеет место неравенство*

$$\#_p^-(E) \leq \min(\#_p^-(\Pi), \#_p^+(\Gamma\Delta)).$$

Лемма 8.55. *Пусть* $\mathrm{MCLL} \vdash \Gamma\Pi\Delta$*, где* $\Gamma \in \mathrm{Fm}^*$, $\Pi \in \mathrm{Fm}^*$, $\Delta \in \mathrm{Fm}^*$ *и секвенция* $\to \Gamma\Pi\Delta$ *является тонкой. Тогда существует такая формула* E*, что*

(i) $\mathrm{MCLL} \vdash (E)^{\perp}\,\Pi$,

(ii) $\mathrm{MCLL} \vdash \Gamma E \Delta$,

(iii) *секвенция* $\to (E)^{\perp}\,\Pi$ *является тонкой,*

(iv) *секвенция* $\to \Gamma E \Delta$ *является тонкой,*

(v) $\|E\| = |[\![\Pi]\!]|$.

Лемма 8.56. *Пусть* $\mathrm{MCLL} \vdash \Phi\Theta\Psi \to C$*, где* $\Phi \in \mathrm{Fm}^*$, $\Theta \in \mathrm{Fm}^*$, $\Psi \in \mathrm{Fm}^*$, $C \in \mathrm{Fm}$ *и секвенция* $\Phi\Theta\Psi \to C$ *является тонкой. Тогда существует такая формула* E*, что*

(i) $\mathrm{MCLL} \vdash \Theta \to E$,

(ii) $\mathrm{MCLL} \vdash \Phi E \Psi \to C$,

(iii) *секвенция* $\Theta \to E$ *является тонкой,*

(iv) *секвенция* $\Phi E \Psi \to C$ *является тонкой,*

(v) $\|E\| = |[\![\Theta]\!]|$.

Доказательство. Дано, что $\mathrm{MCLL} \vdash (\Psi)^{\perp}\,(\Theta)^{\perp}\,(\Phi)^{\perp}\,C$. Применим лемму 8.55, положив

$$\begin{array}{rcl} \Gamma & \rightleftharpoons & (\Psi)^{\perp}, \\ \Pi & \rightleftharpoons & (\Theta)^{\perp}, \\ \Delta & \rightleftharpoons & (\Phi)^{\perp}\,C. \end{array}$$

□

8.8 Грамматики, основанные на исчислении MCLL

Определение 8.57. *Категориальная грамматика, основанная на исчислении* MCLL (или MCLL-грамматика) есть тройка $\langle \Sigma, H, \triangleright \rangle$, где Σ — некоторое конечное множество (алфавит), H — формула, и $\triangleright$ — некоторое конечное бинарное отношение $\triangleright \subset \mathrm{Fm} \times \Sigma$.

Язык, порождаемый грамматикой $\langle \Sigma, H, \triangleright \rangle$, определяется как множество всех слов $a_1 \ldots a_n$ в алфавите Σ, для которых существует выводимая в MCLL секвенция $B_1 \ldots B_n \to H$, такая что для любого $i \leqslant n$ выполняется $B_i \triangleright a_i$. Обозначим этот язык через $\mathcal{L}_{CLL}(\Sigma, H, \triangleright)$.

Теорема 8.58. *Пусть* $\langle \Sigma, H, \triangleright \rangle$ *— некоторая* MCLL*-грамматика. Тогда язык* $\mathcal{L}_{CLL}(\Sigma, H, \triangleright)$ *является контекстно-свободным.*

Замечание 8.59. Обратное верно в силу консервативности MCLL над L^*. Следовательно, класс языков, порождаемых категориальными грамматиками, основанными на мультипликативной циклической линейной логике, совпадает с классом всех контекстно-свободных языков.

9 Сети доказательства

Приведём определение сетей доказательства из [88] (но без констант $\perp$ и $\mathbf{1}$). Более интуитивное изложение можно найти в [94].

Определение 9.1.

$$\begin{aligned} \|p\| &\rightleftharpoons 2,\\ \|\overline{p}\| &\rightleftharpoons 2,\\ \|A \otimes B\| &\rightleftharpoons \|A\| + \|B\|,\\ \|A \parr B\| &\rightleftharpoons \|A\| + \|B\|. \end{aligned}$$

$\|A_1 \ldots A_n\| \rightleftharpoons \|A_1\| + \ldots + \|A_n\|$.

Замечание 9.2. $\|A\| = 2\lfloor A\rfloor$.

Определение 9.3. Определим отображение $c\colon \underline{\mathrm{Fm}} \to \mathbb{Z}$ так:

$$\begin{aligned} c(p) &\rightleftharpoons 1,\\ c(\overline{p}) &\rightleftharpoons 1,\\ c(A \otimes B) &\rightleftharpoons \|A\|,\\ c(A \parr B) &\rightleftharpoons \|A\|. \end{aligned}$$

Упражнение 9.4. $c(A) + c(A^{\perp}) = \|A\|$.

Определение 9.5. Чтобы формализовать понятие *вхождения* подформулы в данную формулу, введём вспомогательное множество $\mathrm{Occ} \rightleftharpoons \underline{\mathrm{Fm}} \times \mathbb{Z}$. Различным вхождениям подформул будут ставиться в соответствие различные элементы множества Occ.

Определение 9.6. Бинарное отношение $\prec$ на множестве Occ определим как наименьшее транзитивное бинарное отношение, удовлетворяющее условиям $\langle A, k - \|A\| + c(A)\rangle \prec \langle (A \mathbin{\lambda} B), k\rangle$ и $\langle B, k + c(B)\rangle \prec \langle (A \mathbin{\lambda} B), k\rangle$ для всех $\lambda \in \{\otimes, \parr\}$, $A \in \underline{\mathrm{Fm}}$, $B \in \underline{\mathrm{Fm}}$, $k \in \mathbb{Z}$. Знак $\preceq$ вводится обычным образом.

Замечание 9.7. Если дана формула A, то можно вхожденям её подформул поставить в соответствие элементы множества Occ. Вхождению подформулы B соответствует пара $\langle B, k\rangle \in \mathrm{Occ}$, где $\langle B, k\rangle \preceq \langle A, c(A)\rangle$ и k равно "$\|\cdot\|$-расстоянию" от левого конца формулы A до главной связки подформулы B (число k однозначно определяет, где рассматриваемая подформула находится). Тогда $\preceq$ соответствует двуместному отношению "быть подформулой".

Определение 9.8. Для любой последовательности формул $\Gamma = A_1 \ldots A_n$ построим реляционную систему $\mathbf{\Omega}_\Gamma = \langle \Omega_\Gamma, \prec_\Gamma, <_\Gamma\rangle$ следующим образом. Положим

$$\Omega_\Gamma \rightleftharpoons \{\langle B, k + \|A_1 \ldots A_{i-1}\|\rangle \mid 1 \leqslant i \leqslant n \text{ и } \langle B, k\rangle \preceq \langle A_i, c(A_i)\rangle\} \\ \cup \{\langle \diamond, \|A_1 \ldots A_{i-1}\|\rangle \mid 1 \leqslant i \leqslant n\},$$

где $\diamond$ — новый символ, не принадлежащий множеству $\underline{\mathrm{Fm}}$. Множество Ω_Γ состоит из четырёх непересекающихся частей

$$\begin{aligned} \Omega_\Gamma^{\diamond} &\rightleftharpoons \{\langle C, k\rangle \in \Omega_\Gamma \mid C = \diamond\},\\ \Omega_\Gamma^{\mathrm{At}} &\rightleftharpoons \{\langle C, k\rangle \in \Omega_\Gamma \mid C \in \mathrm{At}\},\\ \Omega_\Gamma^{\otimes} &\rightleftharpoons \{\langle C, k\rangle \in \Omega_\Gamma \mid C = A \otimes B \text{ для некоторых } A \text{ и } B\},\\ \Omega_\Gamma^{\parr} &\rightleftharpoons \{\langle C, k\rangle \in \Omega_\Gamma \mid C = A \parr B \text{ для некоторых } A \text{ и } B\}. \end{aligned}$$

Будем сокращать $\Omega_\Gamma^{\parr} \cup \Omega_\Gamma^{\diamond}$ посредством $\Omega_\Gamma^{\parr\diamond}$ и использовать аналогичную конвенцию для $\Omega_\Gamma^{\otimes\parr}$, $\Omega_\Gamma^{\otimes\diamond}$, $\Omega_\Gamma^{\otimes\parr\diamond}$. Отношение $\prec_\Gamma$ — такой иррефлексивный частичный порядок на Ω_Γ, что $\alpha \prec_\Gamma \beta$ тогда и только тогда, когда $\alpha \notin \Omega_\Gamma^{\diamond}$, $\beta \notin \Omega_\Gamma^{\diamond}$ и $\alpha \prec \beta$. Отношение $<_\Gamma$ — такой иррефлексивный линейный порядок на Ω_Γ, что $\langle A, k\rangle <_\Gamma \langle B, l\rangle$ тогда и только тогда, когда $k < l$. Знаки $\preceq_\Gamma$ и $\leqslant_\Gamma$ вводятся обычным образом.

Замечание 9.9. $\Omega_\Gamma \subseteq (\underline{\mathrm{Fm}} \cup \{\diamond\}) \times \mathbb{Z} = \mathrm{Occ} \cup (\{\diamond\} \times \mathbb{Z})$.

Упражнение 9.10. Пусть $\Gamma \in \underline{\mathrm{Fm}}^*$, $k \in \mathbb{N}$ и $k < \|\Gamma\|$. Тогда существует единственный $C \in \underline{\mathrm{Fm}} \cup \{\diamond\}$, удовлетворяющий условию $\langle C, k\rangle \in \Omega_\Gamma$.

Определение 9.11. Для каждого множества $\Theta \subseteq \Omega_\Gamma$ положим $\flat(\Theta) \rightleftharpoons |\Omega_\Gamma^{\parr\diamond} \cap \Theta| - |\Omega_\Gamma^{\otimes} \cap \Theta|$.
Упражнение 9.12. Если $A_1 \ \dots \ A_n \in \underline{\mathrm{Fm}}^*$, то $\flat(\Omega_{A_1 \ \dots \ A_n}) = \flat(A_1) + \ldots + \flat(A_n) + n$.
Определение 9.13. Для любых $\alpha \in \Omega_\Gamma$ и $\beta \in \Omega_\Gamma$ обозначим через $\mathrm{Bt}(\alpha, \beta)$ множество $\{\gamma \in \Omega_\Gamma \mid \alpha <_\Gamma \gamma <_\Gamma \beta$ или $\beta <_\Gamma \gamma <_\Gamma \alpha\}$. Вместо $\flat(\mathrm{Bt}(\alpha, \beta))$ будем писать $\flat(\alpha, \beta)$.
Пример 9.14. Пусть $A_1 = \overline{p_1} \otimes ((p_1 \otimes (\overline{p_1} \parr p_1)) \parr \overline{p_1})$, $A_2 = p_1$ и $\Gamma = A_1 A_2$. Рассмотрим элементы $\alpha = \langle (p_1 \otimes (\overline{p_1} \parr p_1)) \parr \overline{p_1}, 8\rangle$ и $\beta = \langle p_1 \otimes (\overline{p_1} \parr p_1), 4\rangle$. Тогда $\flat(\alpha, \beta) = 1$ и $\mathrm{Bt}(\alpha, \beta) = \{\langle \overline{p_1}, 5\rangle, \langle \overline{p_1} \parr p_1, 6\rangle, \langle p_1, 7\rangle\}$.

Лемма 9.15. *Если $\alpha \prec_\Gamma \gamma$ и $\beta \in \mathrm{Bt}(\alpha, \gamma)$, то $\beta \prec_\Gamma \gamma$.*

Лемма 9.16. *Если $\alpha \leqslant_\Gamma \gamma$, то существует такой элемент $\beta \in \mathrm{Bt}(\alpha, \gamma) \cup \{\alpha, \gamma\}$, что либо $\beta \in \Omega_\Gamma^\diamond$, либо $\alpha \preceq_\Gamma \beta$ и $\gamma \preceq_\Gamma \beta$.*

Определение 9.17. Пусть $\mathcal{C} \subseteq \Omega_\Gamma \times \Omega_\Gamma$. Ориентированный граф $\langle \Omega_\Gamma, \mathcal{C}\rangle$ будем называть $<_\Gamma$-*планарным*, если для каждого ребра $\langle \alpha, \beta\rangle \in \mathcal{C}$ и каждого ребра $\langle \gamma, \delta\rangle \in \mathcal{C}$ утверждения $\gamma \in \mathrm{Bt}(\alpha, \beta)$ и $\delta \in \mathrm{Bt}(\alpha, \beta)$ либо оба истинны, либо оба ложны, при условии что $\{\alpha, \beta\} \cap \{\gamma, \delta\} = \varnothing$.
Замечание 9.18. Интуитивно, граф является $<_\Gamma$-планарным тогда и только тогда, когда его рёбра можно нарисовать без пересечений на полуплоскости, когда вершины упорядочены на границе этой полуплоскости согласно линейному порядку $<_\Gamma$.
Определение 9.19. Пусть $\Gamma \in \underline{\mathrm{Fm}}^*$. *Сеть доказательства для* Γ — реляционная система $\langle \boldsymbol{\Omega}_\Gamma, \mathcal{A}, \mathcal{E}\rangle$, где

(PN1) $\flat(\Omega_\Gamma) = 2$,

(PN2) $\mathcal{A}$ — график некоторой функции из $\Omega_\Gamma^\otimes$ в $\Omega_\Gamma^{\parr\diamond}$,

(PN3) $\mathcal{E}$ график некоторой функции из $\Omega_\Gamma^{\mathrm{At}}$ в $\Omega_\Gamma^{\mathrm{At}}$,

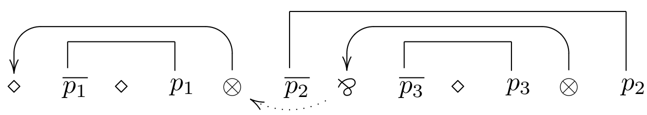
(PN4) если $\langle \alpha, \beta\rangle \in \mathcal{E}$, то $\langle \beta, \alpha\rangle \in \mathcal{E}$,

(PN5) если $\langle \alpha, \beta\rangle \in \mathcal{E}$ и $\alpha \leqslant_\Gamma \beta$, то существуют такие $F \in \mathrm{At}$ и $i, j \in \mathbb{Z}$, что $\alpha = \langle F^\perp, i\rangle$ и $\beta = \langle F, j\rangle$,

(PN6) граф $\langle \Omega_\Gamma, \mathcal{A} \cup \mathcal{E}\rangle$ является $<_\Gamma$-планарным и

(PN7) граф $\langle \Omega_\Gamma, \prec_\Gamma \cup \mathcal{A}\rangle$ является ациклическим (то есть транзитивное замыкание бинарного отношения $\prec_\Gamma \cup \mathcal{A}$ иррефлексивно).

Пример 9.20. Пусть $A_1 = \overline{p_1}$, $A_2 = p_1 \otimes (\overline{p_2} \parr \overline{p_3})$, $A_3 = p_3 \otimes p_2$ и $\Gamma = A_1 A_2 A_3$. Существует сеть доказательства для Γ. Она показана на рисунке ниже. При этом элементы множеств $\Omega_\Gamma^\otimes$ и $\Omega_\Gamma^\parr$ изображены символами $\otimes$ и $\parr$ соответственно, линейный порядок $<_\Gamma$ идёт слева направо, отношение $\prec_\Gamma$ показано пунктирными стрелками и отношения $\mathcal{A}$ и $\mathcal{E}$ изображены на верхней полуплоскости.



Упражнение 9.21. Найти сеть доказательства для $\overline{p_1}\ (p_1 \otimes (\overline{p_1} \parr p_1))$.

Лемма 9.22. *Пусть $\Gamma \in \underline{\mathrm{Fm}}^*$. Если $\langle \boldsymbol{\Omega}_\Gamma, \mathcal{A}, \mathcal{E}\rangle$ удовлетворяет условиям* PN2—PN4 *и* PN6*, то для каждого ребра $\langle \alpha, \beta\rangle \in \mathcal{E}$ имеем $\flat(\alpha, \beta) \geqslant 1$ и $\flat(\Omega_\Gamma - \mathrm{Bt}(\alpha, \beta)) \geqslant 1$.*

Лемма 9.23. *Пусть $\Gamma \in \underline{\mathrm{Fm}}^*$. Если $\langle \boldsymbol{\Omega}_\Gamma, \mathcal{A}, \mathcal{E}\rangle$ удовлетворяет условиям* PN1—PN4 *и* PN6*, то для каждого ребра $\langle \alpha, \beta\rangle \in \mathcal{E} \cup \mathcal{A}$ имеем $\flat(\alpha, \beta) = 1$ и $\flat(\Omega_\Gamma - \mathrm{Bt}(\alpha, \beta)) = 1$.*

Доказательство. См. [88, лемма 7.10]. □

Теорема 9.24. *Секвенция $\to \Gamma$ выводима в $\underline{\mathrm{MCLL}}'$ тогда и только тогда, когда существует сеть доказательства для Γ.*

Доказательство. См. [88, теорема 7.12]. □

Упражнение 9.25. Найти все сети доказательства для $(p \otimes \overline{p} \parr p)\ (\overline{p} \otimes p \parr \overline{p})$.
Упражнение 9.26. Найти все сети доказательства для $(p \otimes (\overline{p} \parr p))\ (\overline{p} \otimes (p \parr \overline{p}))$.

Упражнение 9.27. Найти все сети доказательства для $p\ (\overline{p} \otimes (p \parr ((((\overline{p} \otimes p) \parr \overline{p}) \parr p) \otimes \overline{p})))$.
Упражнение 9.28. Пусть $\Gamma \in \underline{\mathrm{Fm}}^*$. Если $\flat(\Omega_\Gamma) \leqslant 2$ и $\langle \mathbf{\Omega}_\Gamma, \mathcal{A}, \mathcal{E} \rangle$ удовлетворяет условиям PN2—PN7, то $\langle \mathbf{\Omega}_\Gamma, \mathcal{A}, \mathcal{E} \rangle$ является сетью доказательства для Γ.

Следующие леммы позволяют упростить определение сети доказательства.

Лемма 9.29. *Пусть* $\Gamma \in \underline{\mathrm{Fm}}^*$. *Пусть* $\mathbf{\Omega}_\Gamma$ *и* $\mathcal{E}$ *удовлетворяют условиям* PN1 *и* PN3—PN5. *Пусть* $\flat(\alpha, \beta) = 1$ *для каждого ребра* $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathcal{E}$. *Пусть граф* $\langle \Omega_\Gamma, \mathcal{E} \rangle$ *является* $<_\Gamma$*-планарным. Тогда существует такое множество* $\mathcal{A}$, *что* $\langle \mathbf{\Omega}_\Gamma, \mathcal{A}, \mathcal{E} \rangle$ *удовлетворяет условиям* PN2 *и* PN6.

Лемма 9.30. *Пусть* $\Gamma \in \underline{\mathrm{Fm}}^*$. *Пусть* $\langle \mathbf{\Omega}_\Gamma, \mathcal{A}_1, \mathcal{E} \rangle$ *и* $\langle \mathbf{\Omega}_\Gamma, \mathcal{A}_2, \mathcal{E} \rangle$ *являются сетями доказательства. Тогда* $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$.

Лемма 9.31. *Пусть* $\Gamma \in \underline{\mathrm{Fm}}^*$. *Пусть* $\langle \mathbf{\Omega}_\Gamma, \mathcal{A}, \mathcal{E}_1 \rangle$ *и* $\langle \mathbf{\Omega}_\Gamma, \mathcal{A}, \mathcal{E}_2 \rangle$ *являются сетями доказательства. Тогда* $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$.

Лемма 9.32. *Пусть* $\Gamma \in \underline{\mathrm{Fm}}^*$ *и* $\flat(\Omega_\Gamma) = 2$. *Пусть* $\mathcal{A}$ *— график некоторой функции из* $\Omega_\Gamma^\otimes$ *в* $\Omega_\Gamma^{\parr\diamond}$, *причём ориентированный граф* $\langle \Omega_\Gamma, \mathcal{A} \rangle$ *является* $<_\Gamma$*-планарным и* $\flat(\alpha, \beta) = 1$ *для всех* $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathcal{A}$. *Тогда существует такое иррефлексивное симметричное бинарное отношение* $\mathcal{E}$, *являющееся графиком неоторой функции из* $\Omega_\Gamma^{\mathrm{At}}$ *в* $\Omega_\Gamma^{\mathrm{At}}$, *что ориентированный граф* $\langle \Omega_\Gamma, \mathcal{A} \cup \mathcal{E} \rangle$ *является* $<_\Gamma$*-планарным.*

Лемма 9.33. *Пусть* $\Gamma \in \underline{\mathrm{Fm}}^*$, $\langle A, i \rangle \in \Omega_\Gamma^{\mathrm{At}}$, $\langle B, j \rangle \in \Omega_\Gamma^{\mathrm{At}}$, $\flat(\langle A, i \rangle, \langle B, j \rangle) = 1$. *Тогда* $i - j \equiv 2 \pmod 4$.

Лемма 9.34. *Пусть* $\Gamma \in \underline{\mathrm{Fm}}^*$, $\langle A, i \rangle \in \Omega_\Gamma^{\otimes\parr\diamond}$, $\langle B, j \rangle \in \Omega_\Gamma^{\otimes\parr\diamond}$, $\flat(\langle A, i \rangle, \langle B, j \rangle) = 1$. *Тогда* $i - j \equiv 0 \pmod 4$.

Определение 9.35. Пусть $\Gamma \in \underline{\mathrm{Fm}}^*$. Обозначим

$$\mathrm{at}_0(\Gamma) \rightleftharpoons \{F \mid \langle F, 4m{+}1 \rangle \in \Omega_\Gamma^{\mathrm{At}} \text{ для некоторого } m \in \mathbb{Z}\} \cup \{F \mid \langle F^\perp, 4m{+}3 \rangle \in \Omega_\Gamma^{\mathrm{At}} \text{ для некоторого } m \in \mathbb{Z}\}.$$

Определение 9.36. Пусть $\Gamma \in \underline{\mathrm{Fm}}^*$. *Облегчённой сетью доказательства для* Γ называется реляционная структура $\langle \mathbf{\Omega}_\Gamma, \mathcal{A} \rangle$, где

- $|\mathrm{at}_0(\Gamma)| = 1$,
- $\flat(\Omega_\Gamma) = 2$,
- $\mathcal{A}$ график некоторой функции из $\Omega_\Gamma^\otimes$ в $\Omega_\Gamma^{\parr\diamond}$,
- $\flat(\alpha, \beta) = 1$ для всех $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathcal{A}$,
- граф $\langle \Omega_\Gamma, \mathcal{A} \rangle$ является $<_\Gamma$-планарным,
- граф $\langle \Omega_\Gamma, \prec_\Gamma \cup \mathcal{A} \rangle$ является ациклическим.

Лемма 9.37. *Пусть* $\Gamma \in \underline{\mathrm{Fm}}^*$ *и* $|\mathrm{at}_0(\Gamma)| = 1$. *Тогда* $\underline{\mathrm{MCLL}}' \vdash \Gamma$ *тогда и только тогда, когда существует облегчённая сеть доказательства для* Γ.

9.1 Альтернирующие сети

В статье Леконта 1993 года критерий для выводимости в $\mathrm{L}^*(\backslash, /)$ дан с ошибкой (и доказательство содержит пробелы). — Ошибку Леконта можно продемонстрировать на примере секвенции

$$((t \,/\, (q \,/\, r)) \setminus u) \setminus p -> (q \,/\, ((t \setminus u) \setminus r)) \setminus p,$$

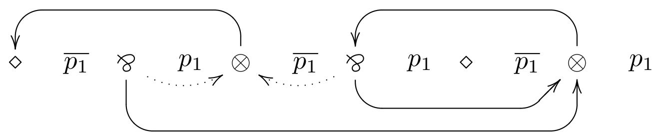
которая не выводится: пунктирная дуга между u и r из сукцедента не дублируется. Но между этими вершинами есть путь, где чередуются сплошные дуги и аксиомные дуги (надо двигаться против течения). Так как Леконт забыл указать, что путь с чередованием должен начинаться с аксиомной дуги, то его критерий даёт положительный ответ (а на самом деле секвенция не выводится).

10 Сети эквивалентности

Определение 10.1. Пусть $A \in \underline{\mathrm{Fm}}$, $B \in \underline{\mathrm{Fm}}$ и $\Gamma = A\ B^{\perp}$. *Облегчённой сетью эквивалентности для* Γ называется реляционная система $\langle \mathbf{\Omega}_{\Gamma}, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \rangle$, где

- $|\mathrm{at}_0(A) \cup \mathrm{at}_0(B)| = 1$,
- $\sharp A = \sharp B$,
- $\mathcal{A}_1$ — график некоторой функции из $\Omega_{\Gamma}^{\otimes}$ в $\Omega_{\Gamma}^{\parr\diamond}$,
- $\mathcal{A}_2$ — график некоторой функции из $\Omega_{\Gamma}^{\parr}$ в $\Omega_{\Gamma}^{\otimes\diamond}$,
- $\flat(\alpha, \beta) = 1$ для всех $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathcal{A}_1$,
- $\flat(\alpha, \beta) = -1$ для всех $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathcal{A}_2$, удавлетворяющих $\langle \diamond, \|A\| \rangle \notin \mathrm{Bt}(\alpha, \beta)$,
- $\flat(\alpha, \beta) = 1$ для всех $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathcal{A}_2$, удавлетворяющих $\langle \diamond, \|A\| \rangle \in \mathrm{Bt}(\alpha, \beta)$,
- графы $\langle \Omega_{\Gamma}, \mathcal{A}_1 \rangle$ и $\langle \Omega_{\Gamma}, \mathcal{A}_2 \rangle$ являются $<_{\Gamma}$-планарными,
- графы $\langle \Omega_{\Gamma}, \prec_{\Gamma} \cup \mathcal{A}_1 \rangle$ и $\langle \Omega_{\Gamma}, \prec_{\Gamma} \cup \mathcal{A}_2 \rangle$ являются ациклическими.

Пример 10.2. Пусть $\Gamma = ((\overline{p_1} \parr p_1) \otimes (\overline{p_1} \parr p_1))\ (\overline{p_1} \otimes p_1)$. Тогда Ω_{Γ} состоит из двенадцати элементов $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{11}$, где $\alpha_0 <_{\Gamma} \alpha_1 <_{\Gamma} \ldots <_{\Gamma} \alpha_{11}$, $\alpha_2 \prec_{\Gamma} \alpha_4$, $\alpha_6 \prec_{\Gamma} \alpha_4$. Положим $\mathcal{A}_1 = \{\langle \alpha_4, \alpha_0 \rangle, \langle \alpha_{10}, \alpha_6 \rangle\}$ и $\mathcal{A}_2 = \{\langle \alpha_2, \alpha_{10} \rangle, \langle \alpha_6, \alpha_{10} \rangle\}$. Тогда $\langle \mathbf{\Omega}_{\Gamma}, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \rangle$ является облегчённой сетью эквивалентности для Γ. Её можно изобразить следующим образом.



Лемма 10.3. *Пусть* $A \in \underline{\mathrm{Fm}}$ *и* $B \in \underline{\mathrm{Fm}}$. *Тогда* $\flat(\Omega_{A\ B^{\perp}}) + \flat(\Omega_{B\ A^{\perp}}) = 4$.

Лемма 10.4. *Пусть* $A \in \underline{\mathrm{Fm}}$, $B \in \underline{\mathrm{Fm}}$, $|\mathrm{at}_0(A) \cup \mathrm{at}_0(B)| = 1$, $\Gamma = A\ B^{\perp}$. *Тогда* $A \underset{\underline{\mathrm{MCLL}'}}{\leftrightarrow} B$ *тогда и только тогда, когда существует облегчённая сеть эквивалентности для* Γ.

Упражнение 10.5. $p \underset{\mathrm{L}^*}{\leftrightarrow} p \cdot (((p \,/\, p) \setminus p) \setminus p)$.

Упражнение 10.6. Построить облегчённую сеть эквивалентности, демонстрирующую, что $p \underset{\mathrm{L}^*}{\leftrightarrow} p \cdot (((p \,/\, p) \setminus p) \setminus p)$.

Упражнение 10.7. $(((p \otimes \overline{p}) \otimes p) \parr \overline{p}) \parr p \underset{\underline{\mathrm{MCLL}'}}{\not\leftrightarrow} p$.

Упражнение 10.8. Если $\langle F, 1 \rangle \in \Omega_A^{\mathrm{At}}$, то $(F \parr F^{\perp}) \otimes A \underset{\underline{\mathrm{MCLL}'}}{\leftrightarrow} A$.

Упражнение 10.9. Если $\langle F^{\perp}, \|A\| - 1 \rangle \in \Omega_A^{\mathrm{At}}$, то $A \otimes (F \parr F^{\perp}) \underset{\underline{\mathrm{MCLL}'}}{\leftrightarrow} A$.

Теорема 10.10. *Пусть* $A \in \underline{\mathrm{Fm}}$, $\mathrm{at}_0(A) = \{p\}$ *и* $\flat(C) \in \{-1, 0, 1\}$ *для всех* $C \in \mathrm{SubNF}(A)$. *Тогда* $A \underset{\underline{\mathrm{MCLL}'}}{\leftrightarrow} p$, *или* $A \underset{\underline{\mathrm{MCLL}'}}{\leftrightarrow} p \otimes \overline{p}$, *или* $A \underset{\underline{\mathrm{MCLL}'}}{\leftrightarrow} p \parr \overline{p}$.

В лемме 10.11 и теореме 10.13 представлен метод, разработанный В. А. Мининой. В [8] она доказала, что если $A \underset{\underline{\mathrm{MCLL}'}}{\leftrightarrow} B$, то все элементы множества Var, встречающиеся в A, встречаются также в B (и, естественно, наоборот).

Лемма 10.11. *Пусть* $\Gamma \in \underline{\mathrm{Fm}}^*$, $\langle \delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{2k} \rangle$ *— некоторая последовательность элементов множества* $\Omega_{\Gamma}^{\mathrm{At}}$, $k \geqslant 1$, $\mathcal{F}_1 = \{\langle \delta_{2i}, \delta_{2i+1} \rangle \mid i < k\}$, $\mathcal{F}_2 = \{\langle \delta_{2i+1}, \delta_{2i+2} \rangle \mid i < k\}$. *Пусть графы* $\langle \Omega_{\Gamma}, \mathcal{F}_1 \rangle$ *и* $\langle \Omega_{\Gamma}, \mathcal{F}_2 \rangle$ *являются* $<_{\Gamma}$*-планарными,* $\flat(\alpha, \beta) = 1$ *для всех* $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathcal{F}_1$ *и* $\flat(\alpha, \beta) = -1$ *для всех* $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathcal{F}_2$. *Тогда* $\delta_0 \neq \delta_{2k}$.

Доказательство. Очевидно, $\flat(\alpha,\alpha)=0$ и $\flat(\alpha,\beta)=\flat(\beta,\alpha)$ для любых α и β.

Заметим, что если $\alpha,\beta,\gamma\in\Omega_\Gamma^{\mathrm{At}}$ и $\alpha<_\Gamma\beta<_\Gamma\gamma$, то $\flat(\alpha,\gamma)=\flat(\alpha,\beta)+\flat(\beta,\gamma)$.

Докажем лемму индукцией по k. База индукции очевидна из того, что $\flat(\delta_0,\delta_1)=1\neq-1=\flat(\delta_2,\delta_1)$. Проведём шаг индукции. Пусть $k>1$. Допустим, от противного, что $\delta_0=\delta_{2k}$. Легко проверить, что $\flat(\delta_i,\delta_j)\equiv i-j \pmod 2$ для любых i и j. Учитывая предположение индукции получаем, что $\delta_i\neq\delta_j$ при $0\leqslant i<j<2k$.

Так как $\langle\Omega_\Gamma,\mathcal{F}_1\rangle$ и $\langle\Omega_\Gamma,\mathcal{F}_2\rangle$ являются $<_\Gamma$-планарными, то найдётся такой индекс $m<2k$, что $\mathrm{Bt}(\delta_m,\delta_{m+1})\cap\{\delta_i\mid i\leqslant 2k\}=\varnothing$. Без ограничения общности можно считать, что $0<m<2k-1$. Остаётся применить предположение индукции к последовательности, полученной удалением δ_m и δ_{m+1}. Очевидно, получившиеся графы $<_\Gamma$-планарны. Осталось проверить, что $\flat(\delta_{m-1},\delta_{m+2})=(-1)^(m-1)$.

Для простоты предположим, что $m=1$ и $\delta_1<_\Gamma\delta_2$. Очевидно, $\delta_2<_\Gamma\delta_0$ или $\delta_0<_\Gamma\delta_1$. Аналогично, $\delta_3<_\Gamma\delta_1$ или $\delta_2<_\Gamma\delta_3$.

Случай 1: $\delta_2<_\Gamma\delta_0$ и $\delta_3<_\Gamma\delta_1$. Противоречие с $<_\Gamma$-планарностью графа $\langle\Omega_\Gamma,\mathcal{F}_1\rangle$.

Случай 2: $\delta_2<_\Gamma\delta_0$ и $\delta_2<_\Gamma\delta_3$. В силу $<_\Gamma$-планарности графа $\langle\Omega_\Gamma,\mathcal{F}_1\rangle$ имеем $\delta_3<_\Gamma\delta_0$. Следовательно,
$$\flat(\delta_0,\delta_3)=\flat(\delta_0,\delta_1)-(\flat(\delta_1,\delta_2)+\flat(\delta_2,\delta_3))=1.$$

Случай 3: $\delta_0<_\Gamma\delta_1$ и $\delta_3<_\Gamma\delta_1$. В силу $<_\Gamma$-планарности графа $\langle\Omega_\Gamma,\mathcal{F}_1\rangle$ имеем $\delta_3<_\Gamma\delta_0$. Следовательно,
$$\flat(\delta_0,\delta_3)=\flat(\delta_2,\delta_3)-(\flat(\delta_0,\delta_1)+\flat(\delta_1,\delta_2))=1.$$

Случай 4: $\delta_0<_\Gamma\delta_1$ и $\delta_2<_\Gamma\delta_3$. Очевидно,
$$\flat(\delta_0,\delta_3)=\flat(\delta_0,\delta_1)+\flat(\delta_1,\delta_2)+\flat(\delta_2,\delta_3)=1.$$

□

Лемма 10.12. *Пусть* $B\in\underline{\mathrm{Fm}}$, $F\in\mathrm{At}$, $i\in\mathbb{Z}$. *Тогда равносильны следующие утверждения:*

(i) $\langle F,i\rangle\in\Omega_B^{\mathrm{At}}$,

(ii) $\langle F^\perp,\|B\|-i\rangle\in\Omega_{B^\perp}^{\mathrm{At}}$,

Теорема 10.13. *Если формулы* $A\in\underline{\mathrm{Fm}}$ *и* $B\in\underline{\mathrm{Fm}}$ *эквивалентны в* $\underline{\mathrm{MCLL}'}$, *то* $\mathrm{at}_0(A)=\mathrm{at}_0(B)$.

Доказательство. Пусть $A\underset{\underline{\mathrm{MCLL}'}}{\leftrightarrow}B$ и $\Gamma=A\ B^\perp$. Обобщая естественным образом понятие облегчённой сети эквивалентности к случаю неодноэлементного $\mathrm{at}_0(\Gamma)$, получаем сеть эквивалентности $\langle\boldsymbol{\Omega}_\Gamma,\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2\rangle$

Допустим, от противного, что $F\in\mathrm{at}_0(A)$ и $F\notin\mathrm{at}_0(B)$ для некоторого $F\in\mathrm{At}$. Согласно определению 9.35 в множестве Ω_A^{At} найдётся элемент вида $\langle F,4m+1\rangle$ или $\langle F^\perp,4m+3\rangle$, где $m\in\mathbb{Z}$. Обозначим один из таких элементов через δ_0. Построим последовательность элементов $\delta_j\in\Omega_\Gamma^{\mathrm{At}}$, где $0\leqslant j\leqslant 2k$, удовлетворяющую условиям $\langle\delta_{2i},\delta_{2i+1}\rangle\in\mathcal{E}_1$ и $\langle\delta_{2i+1},\delta_{2i+2}\rangle\in\mathcal{E}_2$ для всех $i<k$, и условию $\delta_{2k}=\delta_0$. Индукцией по j можно доказать, что для каждого $j\leqslant 2k$ найдётся такое число $m\in\mathbb{Z}$, что $\delta_j=\langle F,4m+1\rangle$ или $\delta_j=\langle F^\perp,4m+3\rangle$. В силу леммы 10.12 $\delta_j\in\Omega_A$ для всех $j\leqslant 2k$. Получаем $\flat(\delta_{2i},\delta_{2i+1})=1$ и $\flat(\delta_{2i+1},\delta_{2i+2})=-1$ для всех $i<k$. Тепрь можно применить лемму 10.11 к последовательности $\langle\delta_0,\delta_1,\ldots,\delta_{2k}\rangle$. Получаем $\delta_0\neq\delta_{2k}$. Лемма доказана. □

Теорема 10.14 (В. А. Минина)**.** *Если* $A\underset{\underline{\mathrm{MCLL}'}}{\leftrightarrow}B$, *то* $\mathrm{var}(A)=\mathrm{var}(B)$.

Теорема 10.15. *Пусть* A *— формула, а* $p\in\mathrm{Var}$. *Тогда* A *и* p *эквивалентны тогда и только тогда, когда* $\mathrm{at}_0(A)=\{p\}$, $\sharp A=0$ *и* $\sharp C\in\{-1,0,1\}$ *для всех* $C\in\mathrm{SubNF}(A)$.

11 Сложность

Упражнение 11.1. Проблемы выводимости в L, L* и MCLL лежат в классе NP.

Теорема 11.2. *Для каждого из исчислений* L, L(\\, /), L(·, \\), L*, L*(\\, /), L*(·, \\) *проблема выводимости является* NP*-полной (см.* [91, 100, 19]*).*

Следствие 11.3. *Проблема выводимости в* MCLL *является* NP*-полной.*

Теорема 11.4. *Для каждого из исчислений* $\mathrm{L}(\backslash)$, $\mathrm{L}^*(\backslash)$ *проблема выводимости разрешима за полиномиальное время* (*см.* [98]).

Теорема 11.5. *Существует алгоритм, определяющий выводимость секвенции* $\Gamma \to D$ *в исчислении* $\mathrm{L}^*(\backslash, /)$ *за время, ограниченное полиномом, зависящим от длины секвенции и от экспоненты максимального хорновского порядка типа из секвенции (см. определение 4.51).*

Доказательство. В (см. [94, теорема 4]) изложен алгоритм для определения выводимости секвенции $G_1 \dots G_k \to D$, тратящий $O(n^3 2^{4m})$ операций над натуральными числами от 0 до n, если $\|G_1\| + \dots + \|G_k\| + \|D\| \leqslant n$, $\mathrm{ord}(D) \leqslant m$ и $\mathrm{ord}(G_i) \leqslant m - 1$ для каждого i.

На самом деле в (см. [94, теорема 4]) доказан более общий результат для всего исчисления L^*, но для того чтобы его сформулировать, нужно особым образом продолжить функцию ord на типы с умножением. □

Теорема 11.6. *Существует алгоритм, определяющий выводимость секвенции* $\Gamma \to D$ *в исчислении* $\mathrm{L}(\backslash, /)$ *за время, ограниченное полиномом, зависящим от длины секвенции и от экспоненты максимального хорновского порядка типа из секвенции* (*см.* [94, теорема 5]).

Теорема 11.7. *Существует алгоритм, определяющий принадлежность слова* w *грамматике Ламбека за время, ограниченное полиномом, зависящим от длины слова, размера грамматики и экспоненты максимального хорновского порядка типа из грамматики* (*см.* [94, теорема 6]).

12 Примеры

Пример 12.1 (И. А. Болгова, 2002)**.** Пусть $A = (p\,/\,(p\,/\,p))\,/\,p$, $B_1 = p\,/\,p$, $B_2 = (p\,/\,(p\,/\,p))\,/\,(p\,/\,(p\,/\,p))$, $C = ((p\,/\,(p\,/\,p))\,/\,(p\,/\,p))\,/\,(p\,/\,(p\,/\,p))$. Тогда $\mathrm{L} \vdash A \to C$, $\mathrm{L} \vdash B_i \to C$, $\mathrm{L} \nvdash A \to B_i$, $\mathrm{L} \nvdash B_i \to A$ для $i \leqslant 2$.
Пример 12.2 (Ю. В. Саватеев, 2006)**.** Существуют два неэквивалентных вывода секвенции $(p \setminus p)\ (p \setminus s)\ ((p \setminus s) \setminus (p \setminus q)) \to p \setminus q$.
Пример 12.3 (И. М. Смуров, 2011)**.** Пусть $R = r \setminus r$, $A = s\,/\,(s_2 \setminus (((p\,/\,r_2)\,/\,R) \setminus p))$, $B_1 = s\,/\,(s_2 \setminus r_2)$, $B_2 = (s\,/\,r_2)\,/\,(s_2 \setminus R)$. Тогда $\mathrm{L}^* \vdash A \to B_1$, $\mathrm{L}^* \vdash A \to B_2$, $\mathrm{L} \nvdash B_1 \to B_2$, $\mathrm{L} \nvdash B_2 \to B_1$. Если $\mathrm{L}^* \vdash A \to C$ и C не содержит p, то $\mathrm{L}^* \vdash B_1 \to C$ или $\mathrm{L}^* \vdash B_2 \to C$.
Пример 12.4 (И. М. Смуров, 2011)**.** Пусть $R = r \setminus r$, $A = ((s_2 \setminus p) \setminus q) \setminus ((q_2 \setminus (R \setminus p)) \setminus s)$, $B_1 = ((s_2 \setminus q_2) \setminus q) \setminus s$, $B_2 = (q_2 \setminus ((s_2 \setminus R) \setminus q)) \setminus s$. Тогда $\mathrm{L}^* \vdash B_1 \to A$, $\mathrm{L}^* \vdash B_2 \to A$, $\mathrm{L} \nvdash B_1 \to B_2$, $\mathrm{L} \nvdash B_2 \to B_1$. Если $\mathrm{L}^* \vdash C \to A$ и C не содержит p, то $\mathrm{L}^* \vdash C \to B_1$ или $\mathrm{L}^* \vdash C \to B_2$.
Пример 12.5 (И. М. Смуров, 2011)**.** Пусть $A = ((r_2\,/\,(p \setminus s_2)) \setminus r) \setminus ((q\,/\,(p \setminus q_2)) \setminus s)$, $B_1 = (q\,/\,(((r_2\,/\,s_2) \setminus r) \setminus q_2)) \setminus s$, $B_2 = ((r_2\,/\,(q\,/\,(s_2 \setminus q_2))) \setminus r) \setminus s$. Тогда $\mathrm{L} \vdash B_1 \to A$, $\mathrm{L} \vdash B_2 \to A$, $\mathrm{L} \nvdash B_1 \to B_2$, $\mathrm{L} \nvdash B_2 \to B_1$. Если $\mathrm{L} \vdash C \to A$ и C не содержит p, то $\mathrm{L} \vdash C \to B_1$ или $\mathrm{L} \vdash C \to B_2$.
Пример 12.6 (И. М. Смуров, 2011)**.** Пусть $A = ((p\,/\,(r \setminus p)) \setminus q) \setminus ((p\,/\,(r \setminus p)) \setminus ((q_2\,/\,(p\,/\,(r \setminus p))) \setminus s))$, $B_1 = (r \setminus q) \setminus ((q_2\,/\,(r \setminus r)) \setminus s)$, $B_2 = q \setminus ((q_2\,/\,r) \setminus s)$. Тогда $\mathrm{L}^* \vdash B_1 \to A$, $\mathrm{L}^* \vdash B_2 \to A$, $\mathrm{L} \nvdash B_1 \to B_2$, $\mathrm{L} \nvdash B_2 \to B_1$. Если $\mathrm{L}^* \vdash C \to A$ и C не содержит p, то $\mathrm{L}^* \vdash C \to B_1$ или $\mathrm{L}^* \vdash C \to B_2$.

Список литературы

[1] Бушковский В. Синтаксическое исчисление Ламбека и его семантика // Логические исследования. Вып. 1. — М.: Наука, 1993. — С. 77—96.

[2] Гладкий А. В. Лекции по математической лингвистике для студентов НГУ. — Новосибирск.: Издательство НГУ, 1966.

[3] Гладкий А. В. Формальные грамматики и языки. — М.: Наука, 1973.

[4] Гладкий А. В., Мельчук И. А. Элементы математической лингвистики. — М.: Наука, 1969. — 192 с.: ил.

[5] Гришин В. Н. Об одном обобщении системы Айдукевича—Ламбека // Исследования по неклассическим логикам и формальным системам. — М.: Наука, 1983. — С. 315—334.

[6] Кузнецов С. Л. Об исчислении Ламбека с одним делением и одним примитивным типом, допускающем пустые антецеденты // Вестник Московского университета. Серия 1, Математика. Механика. — 2009. — № 2. — С. 62—65.

[7] Кузнецов С. Л. О грамматиках, основанных на двух вариантах исчисления Ламбека: Дипломная работа / Кафедра математической логики и теории алгоритмов МГУ. — М., 2009. — 12 с.

[8] Минина В. А. Необходимое условие эквивалентности формул некоммутативной линейной логики: Курсовая работа / Кафедра математической логики и теории алгоритмов МГУ. — М., 1999. — 7 с.

[9] Минина В. А. Полнота синтаксического исчисления Ламбека с операцией инволюции: Дипломная работа / Кафедра математической логики и теории алгоритмов МГУ. — М., 2001. — ??? с.

[10] Пентус А. Е., Пентус М. Р. Теория формальных языков: Учебное пособие. — М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом ф-те МГУ, 2004. — 80 с.

[11] Пентус А. Е., Пентус М. Р. Математическая теория формальных языков: Учебное пособие. — М.: Интернет-университет информационных технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. — 247 с.: ил. — (Серия "Основы информатики и математики").

[12] Пентус А. Е., Пентус М. Р. Атомарная теория деления двусторонних идеалов полуколец // Фундаментальная и прикладная математика. — 2006. — Т. 12, № 2. — С. 201—208.

[13] Пентус М. Р. Исчисление Ламбека и формальные грамматики // Фундаментальная и прикладная математика. — 1995. — Т. 1, № 3. — С. 729—751.

[14] Пентус М. Р. Исчисление Ламбека и формальные грамматики: Дис. . . . канд. физ.-мат. наук: 01.01.06. — Защищена 01.03.1996; Утв. 14.06.1996; 01910048811. — М., 1996. — 69 с. — Библиогр.: с. 67—69.

[15] Пентус М. Р. Синтаксическое исчисление Ламбека и формальные грамматики // YSTM'96: "Молодежь и наука — третье тысячелетие". Труды международного конгресса. Т. 1 / Под ред. И. Б. Федорова и др. — М.: НТА "Актуальные проблемы фундаментальных наук", 1997. — С. I-15—I-16.

[16] Пентус М. Р. Полнота синтаксического исчисления Ламбека // Фундаментальная и прикладная математика. — 1999. — Т. 5, № 1. — С. 193—219.

[17] Пентус М. Р. Атомарные теории семейств полугрупп с делением // Фундаментальная и прикладная математика. — 2000. — Т. 6, № 2. — С. 627—632.

[18] Пентус М. Р. Полнота исчисления Ламбека: Дис. . . . доктора физ.-мат. наук: 01.01.06. — Защищена 06.10.2000; Утв. 12.01.2001; 01960004678. — М., 2000. — 165 с. — Библиогр.: с. 158—165.

[19] Саватеев Ю. В. Алгоритмическая сложность фрагментов исчисления Ламбека : дис. . . . канд. физ.-мат. наук : 01.01.06 : защищена 11.12.2009. — М., 2009. — 75 с.

[20] Саватеев Ю. В. Распознавание выводимости для исчисления Ламбека с одним делением // Вестник Московского университета. Серия 1, Математика. Механика. — 2009. — № 2. — С. 59—62.

[21] Сафиуллин А. Н. Выводимость допустимых правил с простыми посылками в исчислении Ламбека // Вестник Московского университета. Серия 1, Математика. Механика. — 2007. — № 4. — С. 72—76.

[22] Турмухамбетова Г. А. О полиномиальной разрешимости в некоммутативной линейной логике: Дипломная работа / Кафедра математической логики и теории алгоритмов МГУ. — М., 1995. — 14 с.

[23] Харитонов А. В. Полнота исчисления Ламбека относительно моделей на конечных полугруппах с делением: Курсовая работа / Кафедра математической логики и теории алгоритмов МГУ. — М., 2007. — 7 с.

[24] Allwein G., Dunn J. M. Kripke models for linear logic // Journal of Symbolic Logic. — 1993. — Vol. 58, № 2. — P. 514—545.

[25] Andréka H., Mikulás Sz. Lambek calculus and its relational semantics // Journal of Logic, Language and Information. — 1994. — Vol. 3, № 1. — P. 1—37.

[26] Avron A. The semantics and proof theory of linear logic // Theoretical Computer Science. — 1988. — Vol. 57, № 2/3. — P. 161—184.

[27] Bar-Hillel Y. A quasi-arithmetical notation for syntactic description // Langugage. — 1953. — Vol. 29. — P. 47—58.

[28] Bar-Hillel Y., Gaifman C., Shamir E. On categorial and phrase-structure grammars // Bull. Res. Council Israel Sect. F. — 1960. — Vol. 9F. — P. 1—16.

[29] Bulińska M. On the Complexity of Nonassociative Lambek Calculus with Unit // Studia Logica. — 2009. — Vol. 93, № 1. — P. 1—14.

[30] Buszkowski W. Undecidability of some logical extensions of Ajdukiewicz–Lambek calculus // Studia Logica. — 1978. — Vol. 37. — P. 59—64.

[31] Buszkowski W. Compatibility of categorial grammar with an associated category system // Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. — 1982. — Vol. 28. — P. 229—238.

[32] Buszkowski W. Some decision problems in the theory of syntactic categories // Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. — 1982. — Vol. 28. — P. 539—548.

[33] Buszkowski W. Algebraic models of categorial grammars // Proceedings of the 7th International Congress of Logic, Methodology, and Philosophy of Science. — New York: Plenum Press, 1985. — P. 403—426.

[34] Buszkowski W. The equivalence of unidirectional Lambek categorial grammars and context-free grammars // Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. — 1985. — Vol. 31. — P. 369—384.

[35] Buszkowski W. Completeness Results for Lambek Syntactic Calculus // Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. — 1986. — Vol. 32. — P. 13—28.

[36] Buszkowski W. On generative capacity of the Lambek calculus // Logics in AI: European Workshop JELIA '90. Amsterdam, The Netherlands, September 1990. Proceedings / Editor J. van Eijck. — Berlin: Springer-Verlag, 1991. — P. 139—152. — (Lecture Notes in Computer Science; vol. 478. Lecture Notes in Artificial Intelligence).

[37] Buszkowski W. On the Equivalence of Lambek Categorial Grammars and Basic Categorial Grammars. — Amsterdam: Institute for Logic, Language and Computation, University of Amsterdam, 1993. — 21 p. — (ILLC Prepublication Series; LP—93—07).

[38] Buszkowski W. The finite model property for BCI and related systems // Studia Logica. — 1996. — Vol. 57. — P. 303—323.

[39] Buszkowski W. Type logics in grammar // Trends in Logic: 50 Years of Studia Logica / Editors V. F. Hendricks, J. Malinowski. — Kluwer Academic Publishers, 2003. — P. 337—382. — (Trends in Logic; vol. 21).

[40] Carpenter B. Type-Logical Semantics. — Cambridge etc.: The MIT Press, 1997. — XXI, 575 p. — (Language, Speech, and Communication).

[41] Categorial Grammars and Natural Language Structures / Editors R. T. Oehrle, E. Bach, D. Wheeler. — Dordrecht: Reidel, 1988.

[42] Cohen J. M. The equivalence of two concepts of categorial grammar // Information and Control. — 1967. — Vol. 10. — P. 475—484.

[43] Došen K. A Completeness Theorem for the Lambek Calculus of Syntactic Categories // Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. — 1985. — Vol. 31. — P. 235—241.

[44] Došen K. Sequent systems and groupoid models // Studia Logica. — 1988. — Vol. 47, № 4. — P. 353—385; 1989. — Vol. 48, № 1. — P. 41—65. — Addenda and corrigenda: 1990. — Vol. 49. — P. 614.

[45] Došen K. A brief survey of frames for the Lambek calculus // Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. — 1992. — Vol. 38, № 2. — P. 179—187.

[46] Fuchs L. Partially Ordered Algebraic Systems. — Oxford: Pergamon Press, 1963. — Русский перевод: Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы / Пер. с англ. И. В. Стеллецкого. — М.: Мир, 1965. — 342 с.

[47] Galatos N., Ono H. Cut elimination and strong separation for substructural logics: an algebraic approach [Preprint]. — Denver: University of Denver, Department of Mathematics, 2008. — 56 p. — (M08/26). — URL: `http://www.math.du.edu/data/preprints/m0826.pdf` (дата обращения: 31.01.2009).

[48] Galatos N., Ono H. Cut elimination and strong separation for substructural logics: an algebraic approach // Annals of Pure and Applied Logic. — 2010. — Vol. 161, № 9. — P. 1097—1133.

[49] Ginsburg S. The Mathematical Theory of Context-free Languages. — New York: McGraw—Hill, 1966. — Русский перевод: Гинзбург С. Математическая теория контекстно-свободных языков / Пер. с англ. А. Я. Диковского, Л. С. Модиной. — М.: Мир, 1970. — 326 с.

[50] Girard J.-Y. Linear logic // Theoretical Computer Science. — 1987. — Vol. 50, № 1. — P. 1—102.

[51] Hendriks H. Studied Flexibility. Categories and Types in Syntax and Semantics: Ph.D. thesis. — Amsterdam, 1993. — (ILLC Dissertation series; 1993—5).

[52] Hoare C. A. R., He J. The weakest prespecification // Fund. Inform. — 1986. — Vol. 9, № 1. — P. 51—84; 1986. — Vol. 9, № 2. — P. 217—251.

[53] Jeż A., Okhotin A. One-nonterminal conjunctive grammars over a unary alphabet // Computer Science — Theory and Applications / Editors E.A. Hirsch et al.. — Berlin: Springer, 2009. — P. 191—202. — (Lecture Notes in Computer Science; vol. 5675).

[54] Kanazawa M. The Lambek calculus enriched with additional connectives // Journal of Logic, Language and Information. — 1992. — Vol. 1. — P. 141—171.

[55] Kanovich M. I. Horn programming in linear logic is NP-complete // Proceedings of the 7th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science: June 22—25, 1992. Santa Cruz, California, USA. — Los Alamitos, California: IEEE Computer Society Press, 1992. — P. 200—210.

[56] Kuznetsov S. L. Lambek calculus with one division and one primitive type permitting empty antecedents // Moscow University Mathematics Bulletin. — 2009. — Vol. 64, № 2. — P. 76—79.

[57] Lallement G. Semigroups and Combinatorial Applications. — New York etc.: John Wiley & Sons, 1979. — Русский перевод: Лаллеман Ж. Полугруппы и комбинаторные приложения / Пер. с англ. И. О. Корякова. — М.: Мир, 1985. — 440 с.: ил.

[58] Lambek J. The mathematics of sentence structure // American Mathematical Monthly. — 1958. — Vol. 65, № 3. — P. 154—170. — Русский перевод: Ламбек И. Математическое исследование структуры предложений // Математическая лингвистика: Сборник переводов / Под ред. Ю. А. Шрейдера и др. — М.: Мир, 1964. — С. 47—68.

[59] Lambek J. On the calculus of syntactic types // Structure of Language and Its Mathematical Aspects / Editor R. Jakobson. — Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1961. — (Proc. Symposia Appl. Math.; vol. 12). — P. 166—178.

[60] Lambek J. Lectures on Rings and Modules. — Waltham, Massachusetts, etc.: Blaisdell, 1966. — Русский перевод: Ламбек И. Кольца и модули / Пер. с англ. А. В. Михалёва. — М.: Мир, 1971. — 280 с.

[61] Lambek J. Deductive systems and categories I. Syntactic calculus and residuated categories // Math. Systems Theory. — 1968. — Vol. 2, № 4. — P. 287—318.

[62] Lambek J. Deductive systems and categories II. Standard constructions and closed categories // Category Theory, Homology Theory and Their Applications I: Proceedings of the Conference held at the Seattle Research Center of the Battelle Memorial Institute, June 24–July 19, 1968 / Editor P. Hilton. — Berlin: Springer, 1969. — P. 76—122. — (Springer Lecture Notes in Mathematics; vol. 86).

[63] Lambek J. Deductive systems and categories III. Cartesian closed categories, intuitionist propositional calculus, and combinatory logic // Toposes, Algebraic Geometry, and Logic: Proceedings of the Conference held at the Dalhousie University, Halifax, Nova Scotia, January 16–19, 1971 / Editor F. Lawvere. — ?Berlin: ?Springer, 1972. — P. 57—82. — (Springer Lecture Notes in Mathematics; vol. 274).

[64] Lambek J. From categorial grammar to bilinear logic // Substructural Logics / Editors K. Došen, P. Schroeder-Heister. — Oxford: Clarendon Press, 1993. — P. 207—237. — (Studies in Logic and Computation; vol. 2).

[65] Lecomte A. Proof-nets and dependencies // Proceedings of COLING 1992, 14th International Conference on Computational Linguistics, August 23–28, 1992, Nantes, France. — 1992. — P. 394—400.

[66] Lecomte A. Towards efficient parsing with proof-nets // EACL 1993, 6th Conference of the European Chapter of the Association for Computational Linguistics, April 21-23, 1993. — Utrecht: OTS — Research Institute for Language and Speech, Utrecht University, 1993. — P. 269—276.

[67] MacCaull W. Relational proof systems for linear and other substructural logics // Logic Journal of the IGPL. — 1997. — Vol. 5, № 5?. — P. 673—697.

[68] MacCaull W. Realtional semantics and a relational proof system for full Lambek calculus // Journal of Symbolic Logic. — 1998. — Vol. 63, № 2. — P. 623—637.

[69] MacCaull W., Orlowska E. Correspondence results for relational proof systems with application to the Lambek calculus // Studia Logica. — 2002. — Vol. 71, № 3. — P. 389—414.

[70] Marcus S. Algebraic Linguistics: Analytical Models. — New York, London: Academic Press, 1967. — (Mathematics in Science and Engineering; vol. 29). — Русский перевод: Маркус С. Теоретико-множественные модели языков / Пер. с англ. М. В. Арапова. — М.: Наука, 1970. — 332 с.

[71] Métayer F. Polynomial equivalence among systems LLNC, LLNC_a and LLNC_0. // Theoretical Computer Science. — 1999. — Vol. 227, No 1. — P. 221–229. — URL: `http://www.pps.jussieu.fr/~metayer/PDF/poleq.pdf` (дата обращения: 28.03.2011).

[72] Mikulás Sz. The Completeness of the Lambek Calculus with respect to Relational Semantics. — Amsterdam: Institute for Logic, Language and Computation, University of Amsterdam, 1992. — 21 p. — (ILLC Prepublication Series; LP—92—03).

[73] Mikulás Sz. Taming Logics: Ph.D. thesis. — Amsterdam, 1995. — 123 p. — (ILLC Dissertation Series; 1995-12).

[74] Mikulás Sz. On representable ordered residuated semigroups. — To appear in Logic Journal of the IGPL.

[75] Moortgat M. Categorial Investigations. Logical and Linguistic Aspects of the Lambek Calculus: Ph.D. thesis. — Dordrecht: Foris, 1988. — XVII, 270 p.

[76] Ono H. Semantics for substructural logics // Substructural Logics / Editors K. Došen, P. Schroeder-Heister. — Oxford: Clarendon Press, 1993. — P. 259—291. — (Studies in Logic and Computation; vol. 2).

[77] Orlowska E. Relational interpretation of modal logics // Polish Acad. Sci. Inst. Philos. Sociol. Bull. Sect. Logic. — 1988. — Vol. 17, № 1. — P. 2—14.

[78] Pankratiev N. On the completeness of the Lambek calculus with respect to relativized relational semantics // Journal of Logic, Language and Information. — 1994. — Vol. 3, № 3. — P. 233—246.

[79] Pentus M. Equivalent types in Lambek calculus and linear logic. — Серия Математическая логика и теоретическая информатика, № 2: [Препринт] / РАН, Математический институт им. В. А. Стеклова, отдел математической логики. — М., 1992. — 21 с. URL: http://lpcs.math.msu.su/~pentus/ftp/papers/lcs2.pdf (дата обращения: 20.11.2010).

[80] Pentus M. Lambek grammars are context free. — Серия Математическая логика и теоретическая информатика, № 8: [Препринт] / РАН, Математический институт им. В. А. Стеклова, отдел математической логики. — М., 1992. — 10 с.

[81] Pentus M. Lambek calculus is L-complete. — ILLC Prepublication Series, LP-93-14. — Amsterdam: Institute for Logic, Language and Computation, University of Amsterdam, 1993. — 36 p.

[82] Pentus M. Lambek grammars are context free // Proceedings of the 8th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science: June 19—23, 1993. Montreal, Canada. — Los Alamitos, California: IEEE Computer Society Press, 1993. — P. 429—433.

[83] Pentus M. The conjoinability relation in Lambek calculus and linear logic. — ILLC Prepublication Series, ML-93-03. — Amsterdam: Institute for Logic, Language and Computation, University of Amsterdam, 1993. — 20 p.

[84] Pentus M. Language completeness of the Lambek calculus // Proceedings of the 9th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science: July 4—7, 1994. Paris, France. — Los Alamitos, California: IEEE Computer Society Press, 1994. — P. 487—496.

[85] Pentus M. The conjoinability relation in Lambek calculus and linear logic // Journal of Logic, Language and Information. — 1994. — Vol. 3, № 2. — P. 121—140.

[86] Pentus M. Models for the Lambek calculus // Annals of Pure and Applied Logic. — 1995. — Vol. 75, № 1—2. — P. 179—213.

[87] Pentus M. Product-free Lambek calculus and context-free grammars // Journal of Symbolic Logic. — 1997. — Vol. 62, № 2. — P. 648—660.

[88] Pentus M. Free monoid completeness of the Lambek calculus allowing empty premises // Logic Colloquium '96: Proceedings of the colloquium held in San Sebastian, Spain, July 9—15, 1996 / Editors J. M. Larrazabal, D. Lascar, G. Mints. — Berlin: Springer, 1998. — P. 171—209. — (Lecture Notes in Logic; vol. 12).

[89] Pentus M. Lambek calculus and formal languages // Logic Colloquium '95: Proceedings of the Annual European Summer Meeting of the Association of Symbolic Logic, held in Haifa, Israel, August 9—18, 1995 / Editors J. A. Makowsky, E. V. Ravve. — Berlin: Springer, 1998. — P. 269—272. — (Lecture Notes in Logic; vol. 11).

[90] Pentus M. Lambek calculus and formal grammars // Provability, Complexity, Grammars / L. D. Beklemishev, M. Pentus, N. K. Vereshchagin. — American Mathematical Society, 1999. — P. 57—86. — (American Mathematical Society Translations. Series 2; vol. 192).

[91] Pentus M. Lambek calculus is NP-complete [Электронный ресурс]. — Technical Report TR-2003005 / CUNY Ph.D. Program in Computer Science. — New York: CUNY Graduate Center, 2003. — 20 p. — URL: `http://www.cs.gc.cuny.edu/tr/techreport.php?id=79` (дата обращения: 29.11.2006).

[92] Pentus M. Characterization of atomicity in Lambek calculus and bilinear logic // Language and Grammar: Studies in Mathematical Linguistics and Natural Language / Editors C. Casadio, P. J. Scott, R. A. G. Seely. — CSLI Publications, 2005. — P. 55—76. — (CSLI Lecture Notes; vol. 160).

[93] Pentus M. Lambek calculus is NP-complete // Theoretical Computer Science. — 2006. — Vol. 357, № 1/3. — P. 186—201.

[94] Pentus M. A Polynomial-Time Algorithm for Lambek Grammars of Bounded Order // Linguistic Analysis. — 2010. — Vol. 36, № 1—4. — P. 441—471.

[95] Pentus M. Complexity of the Lambek Calculus and Its Fragments // Advances in Modal Logic, Volume 8 / Editors L. Beklemishev, V. Goranko and V. Shehtman. — College Publications, 2010. — P. 310—329. – URL: `http://aiml.net/volumes/volume8/Pentus.pdf` (дата обращения: 18.11.2010).

[96] Roorda D. Resource Logics: Proof-theoretical Investigations: Ph.D. thesis. — Amsterdam, 1991. — 138 p.

[97] Roorda D. Interpolation in fragments of classical linear logic // Journal of Symbolic Logic. — 1994. — Vol. 59, № 2. — P. 419—444.

[98] Savateev Y. The derivability problem for Lambek calculus with one division [Электронный ресурс]. — Preprint 56 / Artificial Intelligence Preprint Series. — Utrecht University, 2006. — 8 p. — URL: `http://www.phil.uu.nl/preprints/ckipreprints/PREPRINTS/preprint056.pdf` (дата обращения: 13.12.2006).

[99] Savateev Y. Lambek grammars with one division are decidable in polynomial time // Computer Science — Theory and Applications / Editors E.A. Hirsch et al.. — Berlin: Springer, 2008. — P. 273—282. — (Lecture Notes in Computer Science; vol. 5010).

[100] Savateev Y. Product-free Lambek Calculus is NP-complete [Электронный ресурс]. — Technical Report TR-2008012 / CUNY Ph.D. Program in Computer Science. — New York: CUNY Graduate Center, 2008. — 15 p. — URL: `http://www.cs.gc.cuny.edu/tr/techreport.php?id=363` (дата обращения: 08.04.2009).

[101] Savateev Y. Product-free Lambek calculus is NP-complete // Logical Foundations of Computer Science, International Symposium, LFCS 2009, Deerfield Beach, FL, USA, January 3—6, 2009. Proceedings / Editors S. N. Artemov and A. Nerode. — Berlin: Springer, 2009. — P. 380—394. — (Lecture Notes in Computer Science; vol. 5407).

[102] Savateev Y. Unidirectional Lambek Grammars in Polynomial Time // Theory of Computing Systems. — 2009. — Vol. 46, № 4. — P. 662—672.

[103] Savateev Y. Recognition of derivability for the Lambek calculus with one division // Moscow University Mathematics Bulletin. — 2009. — Vol. 64, № 2. — P. 73—75.

[104] Schütte K. Der Interpolationssatz der intuitionistischen Prädikatenlogik // Mathematische Annalen. — 1962. — Vol. 148. — P. 192—200.

[105] Terui K. Labelled tableau calculi generating simple models for substructural logics. — Amsterdam: Institute for Logic, Language and Computation, University of Amsterdam, 1999. — 19 p. — (ILLC Prepublication Series; PP—1999—04). — URL: http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~terui/lintab.pdf (дата обращения: 22.03.2011).

[106] Van Benthem J. The semantics of variety in categorial grammar: Report 83—26. — Department of Mathematics, Simon Fraser University, 1983. — Reprinted in Categorial Grammar / Editors W. Buszkowski, W. Marciszewski, J. van Benthem. — Amsterdam: John Benjamin, 1988. — P. 37—55.

[107] Van Benthem J. Semantic parallels in natural language and computation. — Amsterdam: Institute for Logic, Language and Computation, University of Amsterdam, 1988. — 45 p. — (ILLC Prepublication Series; LP—88—06).

[108] Van Benthem J. Language in action // Journal of Philosophical Logic. — 1989. — Vol. 20. — P. 225—263.

[109] Van Benthem J. Semantic parallels in natural language and computation // Logic Colloquium. Granada 1987 / Editors H.-D. Ebbinghaus et al. — Amsterdam: North-Holland, 1989. — P. 331—375.

[110] Van Benthem J. Language in Action: Categories, Lambdas and Dynamic Logic. — Amsterdam etc.: North-Holland, 1991. — X, 350 p. — (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics; vol. 130).

[111] Yetter D. N. Quantales and noncommutative linear logic // Journal of Symbolic Logic. — 1990. — Vol. 55, № 1. — P. 41—64.

[112] Zielonka W. Axiomatizability of Ajdukiewicz–Lambek calculus by means of cancellation schemes // Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. — 1981. — Vol. 27, № 3. — P. 215—224.

[113] Zielonka W. Weak implicational logics related to the Lambek calculus — Gentzen versus Hilbert formalisms // Towards mathematical philosophy. Papers from the Studia Logica conference Trends in Logic IV / Editors D. Makinson, J. Malinowski, H. Wansing. — Springer, 2009. — P. 201—212. — (Trends in Logic; vol. 28).

Содержание