# Алгебра

(план курса)

М. Р. Пентус

## 1 Множества, отображения, факторизация

### 1.1 *Ложная посылка

Релятивизованный квантор по пустому множеству.

### 1.2 *Математическая индукция

[7, 21], [3, 1.7]

Наименьшее натуральное число — 0.
Возвратная индукция.

### 1.3 Множества и операции над ними

**[3, 1.5.1]**, **[20, 4.1—4.4]**, [7, 7, 11—14], [11, 1.1.1—1.1.3, 1.1.8.1—1.1.8.26], [12, II.1—II.5], [19, 1.1—1.3]

*Упорядоченная пара*, *декартово произведение*.

### 1.4 Отображения и их свойства

**[5, 1.4—1.6]**, **[3, 1.5.2]**, **[20, 5.9, 5.10]**, [7, 15—19], [21, II.1], [11, 1.1.4, 1.1.8.36—1.1.8.38], [19, 1.6], [10, 9]

Соответствие, область отправления, область прибытия. Функция.

Инъективность, сюръективность. Биекция. Образ и прообраз множества при отображении. Композиция отображений. Сохранение свойств инъективности и сюръективности при композиции. Обратное отображение.

*Бинарная операция* (на непустом множестве), *унарная операция*.

### 1.5 *Мощность множества

[20, 6.1—6.6], [7, 8—10], [11, 1.1.5, 1.1.8.39, 1.1.8.42]

Сравнение мощностей. Теорема Кантора—Бернштейна (без доказательства). Счётные множества, их свойства. Теорема Кантора. Примеры несчётных множеств.

### 1.6 Бинарные отношения

**[20, 5.1, 5.2, 5.4, 5.5, 5.7]**, **[11, 1.1.3, 1.1.4, 1.1.8.27—1.1.8.35]**, [3, 1.6.1, 1.6.4], [22, I.1—I.6], [19, 1.5, 1.8, 1.9], [7, 20, 21]

Рефлексивные, симметричные, транзитивные отношения.
Строгий/нестрогий частичный/линейный порядок.
Предикаты как подмножества и как отображения в $\{\text{И}, \text{Л}\}$.

### 1.7 Отношение эквивалентности

**[20, 5.4, 5.6]**, **[11, 1.1.4]**, [3, 1.6.2], [22, II.1—II.4], [19, 1.7]

Отношение равнообразности как общий вид отношения эквивалентности. Фактор-множество и фактор-функция.

# 2 Простейшие алгебраические структуры

## 2.1 Алгебраические структуры (алгебраические системы)

**[3, 4.1.1]**, [5, 1.1], [19, 2.1.1], [7, 4], [10, 1]

Количество $n$-местных операций на $m$-элементном множестве. 0-местная операция. $n$-местное отношение.

## 2.2 Полугруппы и моноиды

**[3, 4.1.2—4.1.4]**, [5, 1.2, 1.3, 1.7], [21, II.2], [19, 2.3.1, 2.3.2]

*Коммутативность*, *ассоциативность*, *полугруппа*.

Пример полугруппы: $\langle\{1,3,7\},\circ\rangle$, где $x \circ y = x$.

Пример полугруппы: $\langle\{1,3,7\},\circ\rangle$, где $x \circ y = x$.

Рассмотрим полугруппу $\langle A,\circ\rangle$.

Элемент $e$ называется *левой единицей*, если $(\forall x \in A)\, e \circ x = x$.

Элемент $o$ называется *левым нулём*, если $(\forall x \in A)\, o \circ x = o$.

*Правая единица*, *двусторонняя единица* (обычно просто *единица* или *нейтральный элемент*), *Правый нуль*, *двусторонний нуль* (обычно просто *нуль*).

Если $e_1$ — левая единица и $e_2$ — правая единица, то $e_1 = e_2$.

Если существует двусторонняя единица, то она единственна.

Если существует двусторонний нуль, то он единствен.

*Моноидом* называется полугруппа с единицей.

Элемент $a$ называется *идемпотентом*, если $a \circ a = a$.

Если $e$ — единица и $a \circ b = e$, то $a$ называется *левым обратным элементом* для $b$ и $b$ называется *правым обратным элементом* для $a$.

Если $e$ — единица, $a \circ b = e$ и $b \circ a = e$, то $b$ называется *обратным элементом* для $a$.

Элемент $a$ называется *обратимым*, если существует обратный элемент для $a$.

Обратимый слева и справа является обратимым (с доказательством).

## 2.3 Свободные полугруппы и моноиды

[21, II.2]

Слово над алфавитом, пустое слово.

# 3 Группы

## 3.1 Группы

**[3, 4.2.1, 4.2.2]**, [5, 1.9], [21, II.3], [10, 2—5, 8], [12, V.12, V.13], [18, IV.1.1, IV.1.4], [19, 2.3.3], [7, 59]

*Группой* называется моноид, в котором каждый элемент обратим.

*Абелева группа*.

Пример неабелевой группы: биекции фиксированного множества и композиция.

Единственность нейтрального и обратных элементов в группе. Порядок группы. Подгруппы.

## 3.2 Группа движений

[3, с. 309]

## 3.3 Группа симметрий правильного многоугольника (группа диэдра)

[3, с. 327—329], [10, с. 76—77]

## 3.4 Возможность деления слева и справа в группе

**[18, IV.1.1]**, [5, с. 17], [19, 2.3.3]

Законы сокращения слева и справа. Эквивалентные определения группы.

## 3.5 Степень и порядок элемента группы

[3, 4.2.3], [5, с. 21—22], [18, IV.1.4], [10, 4, 5]

Тождества в группах. Свойства элементов конечного порядка.

## 3.6 Группа преобразований множества

**[3, 4.2.4]**, [5, 5.0, 5.1], [12, V.12], [21, II.3], [10, 9, 10], [18, I.1.1, IV.1.1, IV.1.9]

Биекции на фиксированном множестве образуют группу.

Группа подстановок $n$ элементов (симметрическая группа). Мощность группы подстановок $n$ элементов. Некоммутативность группы $S_n$ при $n > 2$.

## 3.7 Разложение подстановок в произведение независимых циклов

**[5, 5.3]**, **[3, 4.2.4]**, [21, II.3], [18, IV.1.9], [10, 10]

Единственность разложения подстановок в произведение независимых циклов.

## 3.8 Разложение подстановок в произведение транспозиций

**[5, 5.2]**, **[3, 4.2.4]**, [21, II.3], [10, 13], [18, IV.1.9]

## 3.9 Чётные и нечётные подстановки

**[5, 5.4, 5.5]**, **[3, 4.2.4]**, [21, II.3], [10, 13]

Инверсии.

## 3.10 Знакопеременная группа (группа чётных подстановок)

**[5, 5.5]**, [21, II.3], [10, 13]

Порядок знакопеременной группы.

## 3.11 Изоморфизм групп

**[3, 4.3.1]**, [5, 1.9], [10, 9], [18, IV.1.2], [19, 2.2.2]

Биекция, сохраняющая бинарную операцию. Биекция, сохраняющая унарную операцию, нульарную операцию.

Свойства изоморфизмов групп. Сохранение нейтрального и обратных элементов при изоморфизме. *Автоморфизм*.

## 3.12 Вложение группы в группу преобразований

**[3, 4.3.1]**, [21, II.3], [10, 10]

Любая группа изоморфна некоторой подгруппе группы преобразований (её носителя). Теорема Кэли.

### 3.13 Циклические группы

[3, 4.2.3], [5, с. 18—19, 24], [12, V.13], [21, II.3], [10, 5], [18, IV.1.4]

Определение циклической группы и её порождающего элемента. Любая подгруппа циклической группы является циклической. Группа вычетов по некоторому модулю. Классификация циклических групп. Описание порождающих элементов в конечных и бесконечных циклических группах.

### 3.14 Смежные классы по подгруппе

**[5, 4.3.4]**, [21, II.3], [10, 11], [18, IV.1.6]

Разбиение группы на смежные классы по подгруппе. Теорема Лагранжа. Любая группа простого порядка является циклической. Индекс подгруппы.

### 3.15 Нормальная подгруппа

[21, II.3], [18, IV.1.7], [10, 11], [3, 4.3.2]

Понятие сопряжённости элементов группы. Сопряжённая подгруппа. Эквивалентные определения нормальной подгруппы. Подгруппа индекса два нормальна. Центр группы является нормальной подгруппой. Знакопеременная группа является нормальной подгруппой группы подстановок.

### 3.16 Гомоморфизм групп

[3, 4.3.2, 4.3.3], [5, 1.9], [21, II.3], [10, 9], [18, IV.1.3], [19, 2.2.1]

### 3.17 Факторгруппа

[3, 1.6.3, 4.3.2, 4.4.4], [21, II.3], [10, 11], [18, IV.1.8]

Факторгруппы по нормальной подгруппе. Ядро и образ гомоморфизма. Ядро гомоморфизма является нормальной подгруппой.

### 3.18 Теорема о гомоморфизме

[3, 7.3.1], [21, II.3]

Естественный гомоморфизм.

### 3.19 *Свободные группы

[11, 2.2.5]

## 4 Кольца и поля

### 4.1 Кольца

**[5, 1.10]**, **[3, 4.4.1]**, [21, II.4], [18, IV.2.1], [19, 2.4.1]

Определение и простейшие свойства колец.

### 4.2 Поля

**[5, 1.11]**, [3, 4.4.5], [21, II.4], [18, IV.3.1], [19, 2.4.3]

Числовые кольца и поля.

### 4.3 Поле комплексных чисел

[3, 5.1], [5, 2.0—2.11], [21, II.4], [15, 10.1]

### 4.4 Кольца многочленов

[3, 5.2], [5, 1.13]

### 4.5 Кольцо вычетов

**[3, 4.4.2]**, [5, 1.10], [21, II.4]

### 4.6 Поле вычетов по простому модулю

[3, 4.4.6], [5, 1.11], [21, II.4]

### 4.7 Малая теорема Ферма

[3, 4.4.6]

## 5 *Другие алгебраические структуры

### 5.1 *Полукольца

### 5.2 *Решётки

[21, II.8], [18, IV.5.1—IV.5.4], [19, 2.6]

## 6 Элементы линейной алгебры

### 6.1 Векторное пространство (арифметическое линейное пространство)

[3, 2.1.1—2.1.3], [5, 4.0, 4.1, 9.1]

### 6.2 Линейная зависимость векторов

[3, 2.1.4], [5, 9.2]

### 6.3 Базис и размерность векторного пространства

[3, 2.1.5], [5, 9.3]

### 6.4 Линейные преобразования

[3, 2.3.1], [12, V.11]

### 6.5 Матрицы, действия над ними

[3, 1.3.1, 2.3], [11, 1.1.5], [5, 8.1, 8.2, 8.4, 8.5], [12, V.1—V.4], [21, I.1, I.3], [18, II.1.1], [15, 1.1]

## 6.6 Формула для вычисления элементов обратной матрицы

[5, 8.7], [3, 3.3.1], [21, I.3]

## 6.7 Ранг матрицы

[5, 9.16], [3, 2.2.2, 2.4.3, 3.3.2], [21, I.3], [18, I.2.4], [15, 1.3]

## 6.8 Приведение матрицы к ступенчатому виду

[5, 3.4, 3.5], [21, I.1], [18, I.2.4]

Элементарные преобразования строк матрицы.

## 6.9 Нахождение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований

[5, 8.8], [21, I.3], [18, II.1.2]

## 6.10 Определители квадратных матриц

**[5, 6.1—6.6]**, [3, 1.4, 3.1, 3.2], [21, I.2], [18, I.1.2, I.1.3], [15, 1.2]

## 6.11 Вычисление определителей

**[5, 6.8]**, [3, 4.3.5], [21, I.2], [18, I.1.4—I.1.6]

Вычисление определителей разложением по строке или столбцу и с помощью элементарных преобразований.

## 6.12 Системы линейных уравнений

[5, 3.0—3.2], [3, 1.3], [12, V.5], [21, I.1], [18, I.2.1], [15, 2.1]

## 6.13 Метод Гаусса решения систем

[5, 3.3, 3.6—3.8], [3, 1.3.4], [21, I.1], [18, I.2.2], [15, 2.1]

## 6.14 Метод Крамера решения систем

[21, I.1], [18, I.2.3], [15, 2.2]

## 6.15 Теорема Кронекера—Капелли

[3, 2.2.3], [21, I.3], [18, I.2.5], [15, 2.1]

## 6.16 Теорема об общем решении однородной и неоднородной систем

[5, 4.2, 9.17], [3, 2.4.1, 2.4.2], [18, I.2.6, I.2.7], [15, 2.3]

## Основная литература


[1] *Александров П. С.* Введение в теорию групп. Библиотека “Квант”, выпуск 7. М.: Наука, 1980. [С. 5—65, 85—115.]

[2] *Алексеев В. Б.* Теорема Абеля в задачах и решениях. М.: Наука, 1976.

[3] *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. М.: Наука, 1977. [С. 38—47, 133—167, 171—181.]

[4] *Ляпин Е. С, Айзенштат А. Я, Лесохин М. М.* Упражнения по теории групп. М.: Наука, 1976. [С. 9—81, 98—111.]

[5] *Михалёв А. А., Михалёв А. В.* Начала алгебры, часть I. — М.: ИНТУИТ, 2005. — 258 с.

[6] *Фрид Э.* Элементарное введение в абстрактную алгебру. М.: Наука, 1979. [С. 11—81, 92—99.]


## Дополнительная литература


[7] *Болтянский В. Г., Савин А. П.* Беседы о математике. Книга 1. Дискретные объекты. — М.: ФИМА, МЦНМО, 2002. — 368 с.

[8] *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. М.: Наука, 1976. [С. 15—55.]

[9] *Виленкин Н. Я.* Алгебра и теория чисел. М.: Наука, 1984. [С. 63—73, 102—117.]

[10] *Гроссман И., Магнус В.* Группы и их графы. — М.: Мир, 1971. — 248 с.

[11] *Капитонова Ю. В. и др.* Лекции по дискретной математике / Авторы: Ю. В. Капитонова, С. Л. Кривой, А. А. Летичевский, Г. М. Луцкий. — СПб.: БХВ-Петербург, 2004. — 624 с.

[12] *Кемени Дж., Снелл Дж., Томпсон Дж.* Введение в конечную математику. — М.: Мир, 1965. — 486 с.

[13] *Курош А. Г.* Лекции по общей алгебре. М.: Наука, 1973. [С. 11—20, 33—58, 72—78.]

[14] *Ленг С. Е.* Алгебра. М.: Мир, 1968. [С. 21—31.]

[15] *Лунгу К. Н. и др.* Сборник задач по высшей математике / Авторы: К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. — М.: Айрис-пресс, 2003. — 576 с.

[16] *Ляпин Е. С., Евсеев А. Е.* Алгебра и теория чисел. М.: Просвещение, 1974. [С. 337—361, 365—370.]

[17] *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1975. [С. 10—123.]

[18] *Мишина А. П., Проскуряков И. В.* Высшая алгебра. — М.: Физматлит, 1962. — 300 с.

[19] *Новиков Ф. А.* Дискретная математика для программистов. — СПб.: Питер, 2000. — 304 с.

[20] *Пентус М. Р.* Язык математики: Учебно-методическое пособие. — М.: Диалог-МГУ, 1999. — 28 с.

[21] *Скорняков Л. А.* Элементы алгебры. 2-е изд. — М.: Наука, 1986. — 240 с.

[22] *Шрейдер Ю. А.* Равенство, сходство, порядок. — М.: Наука, 1971. — 256 с.