

Математический анализ

Задачи для зачёта (ОТиПЛ, 2-й курс, осень 2003)

М. Р. Пентус

Задача 1. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - n^2}{3 - n^2}$.

Задача 2. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 - 4n^2} - n)$.

Задача 3. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{1 + n} \right)^n$.

Задача 4. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n + 2}{2n + 1} \right)^n$.

Задача 5. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n + 1}{2n + 2} \right)^n$.

Задача 6. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln n}$.

Задача 7. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\pi - 2)^n}{n^{2\pi}}$.

Задача 8. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(e - 2)^n}{n^{-e}}$.

Задача 9. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{an} \cdot n^b$, если $a \neq 0$.

Задача 10. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln n}{\ln n}$.

Задача 11. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n + 1) \ln \frac{n + 1}{n}$.

Задача 12. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - (2n + 1) \ln \frac{n + 1}{n} \right) n^2$.

Задача 13. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}$.

Задача 14. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{n!}$.

Задача 15. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{n!}$.

Задача 16. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\ln(n!)}$.

Задача 17. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln(n!)}{\sqrt{n}}$.

Задача 18. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_n \ln(n!)$.

Задача 19. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n!)}{n}$.

Задача 20. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_n \sqrt[n]{n!}$.

- Задача 21.** Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_n \ln \left(\frac{n^n}{n!} \right)$.
- Задача 22.** Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n!) - n \ln n}{\ln n}$.
- Задача 23.** Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.
- Задача 24.** Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \ln(n!)}{\ln n}$.
- Задача 25.** Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \ln(n!)}{\ln n} - 2n$.
- Задача 26.** Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \ln(n!)}{\ln n} - n$.
- Задача 27.** Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 \ln(n!) + 2n - (2n + 1) \ln n)$.
- Задача 28.** Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{C_{2n}^n}$.
- Задача 29.** Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{C_{2n}^n}$.
- Задача 30.** Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}$.
- Задача 31.** Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} n$.
- Задача 32.** Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_n \left(\frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} \right)$.
- Задача 33.** Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} \sqrt{n}$.
- Задача 34.** Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16^n}{n \cdot (C_{2n}^n)^2}$.
- Задача 35.** Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{6n}}{n \cdot 2^{4n} \cdot (C_{3n}^n)^2}$.
- Задача 36.** Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n^2}}{n \cdot C_{2n^2}^{n^2}}$.
- Задача 37.** Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_n C_{n+k}^k$.
- Задача 38.** Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[k]{C_{n+k}^k}}$.
- Задача 39.** Вычислить производную функции $f(x) = \sqrt{\ln x}$.
- Задача 40.** Вычислить производную функции $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^k}$, где $k \in \mathbb{N}$.
- Задача 41.** Вычислить производную функции $f(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^k}$, где $k \in \mathbb{N}$.
- Задача 42.** Вычислить производную функции $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x$.

Задача 43. Вычислить производную функции $f(x) = \frac{(x-1)^3 \sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$.

Задача 44. Вычислить производную функции $f(x) = x \sqrt{\frac{x - \ln(x+1)}{x^2}}$.

Задача 45. Вычислить производную функции $y = \frac{ax+b}{4x^3-c}$ при $x \neq \sqrt[3]{\frac{c}{4}}$.

Задача 46. Вычислить производную функции $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Задача 47. Вычислить производную функции $y = xe^{-x^2}$.

Задача 48. Вычислить производную функции $y = x^3 \log_2 x$.

Задача 49. Вычислить производную функции $y = \frac{1+e^x}{1-e^x}$.

Задача 50. Вычислить производную функции $y = \frac{x+e^{3x}}{x-e^{3x}}$.

Задача 51. Вычислить производную функции $y = \frac{1}{\ln x}$.

Задача 52. Вычислить левую производную функции $y = |x-3|$ в точке 3.

Задача 53. Вычислить вторую производную функции $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$, где $a > 0$.

Задача 54. Вычислить вторую производную функции $f(x) = e^{\sqrt{x}}$.

Задача 55. Вычислить вторую производную функции $f(x) = x^x$.

Задача 56. Вычислить n -ю производную функции $f(x) = xe^x$.

Задача 57. Вычислить n -ю производную функции $f(x) = x^2 e^x$.

Задача 58. Выразить $\operatorname{sh}(x+y)$ через $\operatorname{sh}(x)$, $\operatorname{sh}(y)$, $\operatorname{ch}(x)$, $\operatorname{ch}(y)$.

Задача 59. Выразить $\operatorname{sh}(x-y)$ через $\operatorname{sh}(x)$, $\operatorname{sh}(y)$, $\operatorname{ch}(x)$, $\operatorname{ch}(y)$.

Задача 60. Выразить $\operatorname{ch}(x+y)$ через $\operatorname{sh}(x)$, $\operatorname{sh}(y)$, $\operatorname{ch}(x)$, $\operatorname{ch}(y)$.

Задача 61. Выразить $\operatorname{ch}(x-y)$ через $\operatorname{sh}(x)$, $\operatorname{sh}(y)$, $\operatorname{ch}(x)$, $\operatorname{ch}(y)$.

Задача 62. Выразить $\operatorname{sh}^2(x)$ через $\operatorname{ch}(x)$.

Задача 63. Выразить $\operatorname{th}^2(x)$ через $\operatorname{ch}(x)$.

Задача 64. Выразить $\operatorname{sh}(x)'$ через $\operatorname{sh}(x)$ и $\operatorname{ch}(x)$.

Задача 65. Выразить $\operatorname{ch}(x)'$ через $\operatorname{sh}(x)$ и $\operatorname{ch}(x)$.

Задача 66. Выразить $\operatorname{th}(x)'$ через $\operatorname{sh}(x)$ и $\operatorname{ch}(x)$.

Задача 67. Выразить $\operatorname{cth}(x)'$ через $\operatorname{sh}(x)$ и $\operatorname{ch}(x)$.

Задача 68. Существуют ли такие чётные функции f , g , h , что функция $f(x) + g'(x) + h(x)$ определена на \mathbb{R} и является нечётной?

Задача 69. Вычислить $\lim_{y \rightarrow 1} \frac{\sqrt{y+8} - 3}{y-1}$.

Задача 70. Вычислить $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{2y} - 1}{7y}$.

- Задача 71.** Вычислить $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{3y} - 1}{\sin y}$.
- Задача 72.** Вычислить $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - e^{x-1}}{1 - \sqrt{x}}$.
- Задача 73.** Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos(2x)}{x^2}$.
- Задача 74.** Вычислить $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[5]{x}}{1 - \sqrt[3]{x}}$.
- Задача 75.** Вычислить $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{e^x \sin(\pi x)}{\ln x}$.
- Задача 76.** Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.
- Задача 77.** Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.
- Задача 78.** Вычислить $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (\operatorname{tg} x)^{2 \cos x}$.
- Задача 79.** Вычислить $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^3 - 4x^2 + 3}$.
- Задача 80.** Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}$.
- Задача 81.** Вычислить $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}$.
- Задача 82.** Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x - \ln(x+1)}{x^2}$.
- Задача 83.** Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{x - \ln(x+1)}{x^2}$.
- Задача 84.** Вычислить $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^{\frac{1}{x}}$.
- Задача 85.** Вычислить $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{\frac{1}{x}}$.
- Задача 86.** Вычислить $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x+1) - \ln x)$.
- Задача 87.** Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{4}{x}$.
- Задача 88.** Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{9}{x^2}}$.
- Задача 89.** Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^x$.
- Задача 90.** Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2}$.
- Задача 91.** Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$.
- Задача 92.** Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x - x}{x^4}$.
- Задача 93.** Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln |x|$.

- Задача 94.** Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0+0} x e^{-\frac{7}{x}}$.
- Задача 95.** Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x} - 1}{9x}$.
- Задача 96.** Вычислить $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{\sin x}$.
- Задача 97.** Вычислить $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x - 1}$.
- Задача 98.** Вычислить $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - x^2}$.
- Задача 99.** Вычислить $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 - 7x^2 + 11x - 5}$.
- Задача 100.** Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x - \sin 4x}{x^3}$.
- Задача 101.** Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3}$.
- Задача 102.** Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 5x}{\operatorname{arctg} 9x}$.
- Задача 103.** Вычислить $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x - 2^3}{\ln(x - 3)}$.
- Задача 104.** Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin \frac{x}{2}}$.
- Задача 105.** Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{(\sin 2)x}$.
- Задача 106.** Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2}$.
- Задача 107.** Вычислить $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^{\pi-3}}$.
- Задача 108.** Вычислить $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^{5x}}$.
- Задача 109.** Вычислить $\lim_{x \rightarrow 1-0} (\ln(x) \cdot \ln(1-x))$.
- Задача 110.** Вычислить $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$.
- Задача 111.** Вычислить $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$.
- Задача 112.** Вычислить $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^x - x^3}{x - 3}$.
- Задача 113.** Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$.
- Задача 114.** Вычислить $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 - \frac{1}{\ln(x+1) - \ln x} \right)$.
- Задача 115.** Проанализировать график функции $y = \frac{1}{x^2 + 1}$.

- Задача 116.** Проанализировать график функции $y = \operatorname{arctg} x$.
- Задача 117.** Проанализировать график функции $y = e^{-3x^2}$.
- Задача 118.** Проанализировать график функции $y = x^3 - 9x^2 + 15x$.
- Задача 119.** Проанализировать график функции $y = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2}$.
- Задача 120.** Проанализировать график функции $y = \frac{\ln x^2}{|x|}$.
- Задача 121.** Проанализировать график функции $y = e^{-\frac{5}{x^2}}$.
- Задача 122.** Проанализировать график функции $y = xe^{-x}$.
- Задача 123.** Проанализировать график функции $y = x^2 e^{-x}$.
- Задача 124.** Проанализировать график функции $y = xe^{-7x^2}$.
- Задача 125.** Проанализировать график функции $y = \sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{3}$.
- Задача 126.** Проанализировать график функции $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$.
- Задача 127.** Проанализировать график функции $y = x + \sqrt{x^2 + 1}$.
- Задача 128.** Проанализировать график функции $y = e^{\frac{1}{x+2}}$.
- Задача 129.** Проанализировать график функции $y = \frac{(x+1)^2}{x-2}$.
- Задача 130.** Проанализировать график функции $y = \frac{x^3}{3-x^2}$.
- Задача 131.** Проанализировать график функции $y = \frac{\ln x}{x}$.
- Задача 132.** Проанализировать график функции $y = \sqrt[4]{x} - x$.
- Задача 133.** Проанализировать график функции $y = -x \ln x$.
- Задача 134.** Вычислить $\int e^{x^3} \cdot x^2 dx$.
- Задача 135.** Вычислить $\int \frac{(\ln x)^5}{x} dx$.
- Задача 136.** Вычислить $\int \frac{x^2}{x^3 + 1} dx$.
- Задача 137.** Вычислить $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$.
- Задача 138.** Вычислить $\int \frac{e^x}{e^{2x} + 9} dx$.
- Задача 139.** Вычислить $\int \frac{\ln(5x)}{x} dx$.
- Задача 140.** Вычислить $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$.
- Задача 141.** Вычислить $\int e^{\sqrt{x}} dx$.

- Задача 142.** Вычислить $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$.
- Задача 143.** Вычислить $\int \frac{7x + 4}{(x + 2)(x - 3)} dx$.
- Задача 144.** Вычислить $\int \frac{x^2 + 5x - 2}{(x^2 - 1)(x + 1)} dx$.
- Задача 145.** Вычислить $\int \frac{x^5 - 1}{x^3 + x^2 + x} dx$.
- Задача 146.** Вычислить $\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx$.
- Задача 147.** Вычислить $\int e^{-x} dx$.
- Задача 148.** Вычислить $\int x e^{-x} dx$.
- Задача 149.** Вычислить $\int x^2 e^{-x} dx$.
- Задача 150.** Вычислить $\int x^3 e^x dx$.
- Задача 151.** Вычислить $\int \cos 5x dx$.
- Задача 152.** Вычислить $\int (3x - 7)^{100} dx$.
- Задача 153.** Вычислить $\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 25}$.
- Задача 154.** Вычислить $\int x^n \ln x dx$.
- Задача 155.** Вычислить $\int x \operatorname{arctg} x dx$.
- Задача 156.** Вычислить $\int x^2 \cos x dx$.
- Задача 157.** Вычислить $\int e^{2x} \cos x dx$.
- Задача 158.** Вычислить $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^5}{1 + x^2} dx$.
- Задача 159.** Вычислить $\int e^{\cos x} \sin x dx$.
- Задача 160.** Вычислить $\int \frac{1}{1 - x} \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} dx$.
- Задача 161.** Вычислить $\int \frac{dx}{x \ln x}$.
- Задача 162.** Вычислить $\int \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} dx$.

Задача 163. Вычислить $\int \frac{dx}{1 + e \cos x}$.

Задача 164. Вычислить $\int \frac{2t}{1 + t^2} dt$.

Задача 165. Вычислить $\int \frac{dx}{x(x + 1)}$.

Задача 166. Вычислить $\int \frac{2t}{(1 + t^2)^n} dt$, где $n \geq 2$.

Задача 167. Вычислить $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$.

Задача 168. Вычислить $\int_0^{2\pi} \sin x \, dx$.

Задача 169. Вычислить $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$.

Задача 170. Вычислить $\int_0^{2\pi} |\sin x| \, dx$.

Задача 171. Вычислить $\int_n^{2n} \frac{dx}{x}$, где $n \in \mathbb{Z}_+$.

Задача 172. Вычислить $\int_0^n [x] \, dx$, где $n \in \mathbb{N}$.

Задача 173. Вычислить $\int_0^e [x] \, dx$.

Задача 174. Вычислить $\int_0^b [x] \, dx$, где $b > 0$.

Задача 175. Вычислить $\int_1^b \ln x \, dx$, где $b \geq 1$.

Задача 176. Вычислить $\int_1^n \ln [x] \, dx$, где $n \in \mathbb{Z}_+$.

Задача 177. Вычислить $\int_n^{n+1} (\ln x - \ln n) \, dx$, где $n \in \mathbb{Z}_+$.

Задача 178. Вычислить $\int_0^b e^{-x} dx$.

Задача 179. Вычислить $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$.

Задача 180. Вычислить $\int_0^b x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

Задача 181. Вычислить $\int_{13}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$.

Задача 182. Вычислить $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x}$.

Задача 183. Вычислить $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + 1}$.

Задача 184. Вычислить $\int_0^1 \ln x dx$.

Задача 185. Вычислить $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$, где $0 < q < 1$.

Задача 186. Вычислить $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$.

Задача 187. Вычислить $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$.

Задача 188. Вычислить $\frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \frac{1}{625} + \dots$

Задача 189. Вычислить $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 - 1}$.

Задача 190. Вычислить $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2^{k+2}}}{2^{k-1}}$.

Задача 191. Вычислить $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k+2} - 2\sqrt{k+1} + \sqrt{k})$.

Задача 192. Вычислить $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{3^k - 2^{k+1}}{k \cdot 4^k}$.

Задача 193. Вычислить $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^i}$.

Задача 194. Вычислить $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{2^k}$.

Задача 195. Является ли положительным значение $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3^k}{7^k} - \frac{1}{k^2} \right)$?

Задача 196. Сходится ли ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, где $0 < \alpha \leq 1$?

Задача 197. Сходится ли ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, где $\alpha > 1$?

Задача 198. Сходится ли ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}^k}{k!}$?

Задача 199. Сходится ли ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i}$?

Задача 200. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

Задача 201. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2k}$.

Задача 202. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2k+1}$.