Семантика Монтегю и синтаксическое исчисление Ламбека

Черновик

М. Р. Пентус

1 Введение в семантику Монтегю

Справка 1.1. Р. Монтегю (Richard Montague) (1930–1971) — американский математик и логик.
Справка 1.2. Б. Парти (Barbara Partee) — американский лингвист.
Справка 1.3. Г. Фреге (Gottlob Frege) (1848–1925) — немецкий математик и логик.
Справка 1.4. Н. Хомский (Noam Chomsky) (р. 1928) — американский лингвист.

Формальная семантика естественного языка выявляет логические связи между его предложениями.

Пример 1.5. В категориальной грамматике значением выражения *the box on the table* является терм $\textsc{the}(\textsc{on}(\textsc{the}(\textsc{table}))(\textsc{box}))$. Выражение *the pyramid near the box on the table* имеет два значения: $\textsc{the}(\textsc{near}(\textsc{the}(\textsc{on}(\textsc{the}(\textsc{table}))(\textsc{box})))(\textsc{pyr}))$ и $\textsc{the}(\textsc{on}(\textsc{the}(\textsc{table}))(\textsc{near}(\textsc{the}(\textsc{box}))(\textsc{pyr})))$

Пример 1.6. Другие примеры многозначных предложений: *John puts the block in the box on the table*, *John sees the astronomer with the telescope*.

Существует бесконечно много грамматически корректных предложений. Множество смыслов этих предложений также бесконечно.

Принцип композиционности (the principle of compositionality) (восходит к Готлобу Фреге): значение целого определяется значениями его составных частей и способом их комбинации.

Категориальная грамматика (categorial grammar) берёт начало в работах Ричарда Монтегю. В этом направлении работают Глин Моррилл, Барбара Парти и др.

Традиция различать смысл (sense) и значение (meaning) выражения языка восходит к Готлобу Фреге. Для математической формализации этого различия используется интенсиональная логика (intensional logic).

2 Лямбда-исчисление

[7, Ch. 2]

Справка 2.1. А. Чёрч (Alonzo Church) (1903–1995) — американский логик и математик.

2.1 Простая теория типов

[7, 2.1]

Определение 2.2. Множество *простейших типов* (basic types) $\mathbf{BasTyp}$ — произвольное непустое множество.

Определение 2.3. Множество *типов* (types) определяется индуктивно.

1. $\mathbf{BasTyp} \subseteq \mathbf{Typ}$.
2. Если $\sigma \in \mathbf{Typ}$ и $\tau \in \mathbf{Typ}$, то $(\sigma \to \tau) \in \mathbf{Typ}$.

Замечание 2.4. На интуитивном уровне каждому типу соответствует некоторое множество. Если типу σ соответствует множество S и типу τ соответствует множество T, то типу $(\sigma \to \tau)$ соответствует множество всех функций из S в T.

Пример 2.5. Пусть $\mathbf{BasTyp} = \{\mathbf{Real}, \mathbf{Bool}\}$. В подразумеваемой модели типу $\mathbf{Real}$ соответствует множество всех действительных чисел (обозначаемое, как обычно, $\mathbb{R}$), а типу $\mathbf{Bool}$ — множество истинностных значений, состоящее из двух элементов — лжи и истины. Для краткости будем их обозначать соответственно 0 и 1.

Пример 2.6. Если $\mathbf{Real} \in \mathbf{BasTyp}$, то $(\mathbf{Real} \to \mathbf{Real}) \in \mathbf{Typ}$. При этом типу $(\mathbf{Real} \to \mathbf{Real})$ соответствует множество всех функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$.

Пример 2.7. Если $\mathbf{Bool} \in \mathbf{BasTyp}$, то $(\mathbf{Bool} \to \mathbf{Bool}) \in \mathbf{Typ}$. Типу $(\mathbf{Bool} \to \mathbf{Bool})$ соответствует множество, содержащее четыре функции, которые можно схематически изобразить так:

$$\left[\begin{array}{l} 0 \mapsto 0 \\ 1 \mapsto 0, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 0 \mapsto 0 \\ 1 \mapsto 1, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 0 \mapsto 1 \\ 1 \mapsto 0, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 0 \mapsto 1 \\ 1 \mapsto 1. \end{array}\right.$$

Пример 2.8. Если $\{\mathbf{Real}, \mathbf{Bool}\} \subseteq \mathbf{BasTyp}$, то $(\mathbf{Real} \to (\mathbf{Real} \to \mathbf{Bool})) \in \mathbf{Typ}$. Этому типу соответствует множество двуместных предикатов на множестве $\mathbb{R}$.

Пример 2.9. Если $\mathbf{Real} \in \mathbf{BasTyp}$, то $((\mathbf{Real} \to \mathbf{Real}) \to (\mathbf{Real} \to \mathbf{Real})) \in \mathbf{Typ}$. Этому типу соответствует множество преобразований на множестве одноместных действительнозначных функций.

Замечание 2.10. Для удобства вводятся договорённости об опускании скобок при записи типов. Во-первых, самые внешние скобки можно опускать. Например, $\mathbf{Real} \to (\mathbf{Real} \to \mathbf{Bool})$ и $(\mathbf{Real} \to (\mathbf{Real} \to \mathbf{Bool}))$ обозначают один и тот же тип. Во-вторых, если рядом находятся две операции $\to$ и из-за отсутствия скобок неясно, какая из них внутренняя, а какая — внешняя, то внутренней считается та, которая находится правее. Другими словами, операция $\to$ считается *право-ассоциативной* (right-associative). Например, $\mathbf{Real} \to \mathbf{Real} \to \mathbf{Bool}$ и $\mathbf{Real} \to (\mathbf{Real} \to \mathbf{Bool})$ обозначают один и тот же тип. Однако в записи $(\mathbf{Real} \to \mathbf{Real}) \to \mathbf{Bool}$ ни одной скобки опускать нельзя.

Замечание 2.11. Во всех логических и лингвистических примерах присутствует тип истинностных значений, обычно обозначаемый $\mathbf{Bool}$. При этом $\mathbf{Bool} \in \mathbf{BasTyp}$.

Упражнение 2.12. Сколько элементов содержит множество, соответствующее типу
$((\mathbf{Bool} \to \mathbf{Bool}) \to \mathbf{Bool}) \to \mathbf{Bool}$?

2.2 Термы

[7, 2.2]

В примерах этого раздела используются простейшие типы из примера 2.5.

Определение 2.13. Для каждого $\tau \in \mathbf{Typ}$ имеется счётное множество *переменных* (variables) $\mathbf{Var}_\tau$ и произвольное множество *констант* (constants) $\mathbf{Con}_\tau$. Введём следующие обозначения для множества всех переменных и множества всех констант: $\mathbf{Var} \rightleftharpoons \bigcup_{\tau \in \mathbf{Typ}} \mathbf{Var}_\tau$, $\mathbf{Con} \rightleftharpoons \bigcup_{\tau \in \mathbf{Typ}} \mathbf{Con}_\tau$.

Замечание 2.14. На интуитивном уровне константы из $\mathbf{Con}_\tau$ обозначают конкретные элементы множества, соответствущего типу τ. Аналогично, значениями переменных из $\mathbf{Var}_\tau$ могут быть только элементы множества, соответствущего типу τ.

Определение 2.15. Множество *лямбда-термов* (lambda-terms) типа τ (обозначение $\mathbf{Term}_\tau$) определяется индуктивно.

1. $\mathbf{Var}_\tau \subseteq \mathbf{Term}_\tau$.
2. $\mathbf{Con}_\tau \subseteq \mathbf{Term}_\tau$.
3. Если $\alpha \in \mathbf{Term}_{\sigma \to \tau}$ и $\beta \in \mathbf{Term}_\sigma$, то $\alpha(\beta) \in \mathbf{Term}_\tau$.
4. Если $x \in \mathbf{Var}_\sigma$ и $\alpha \in \mathbf{Term}_\tau$, то $\lambda x.(\alpha) \in \mathbf{Term}_{\sigma \to \tau}$.

Замечание 2.16. Часто для краткости лямбда-термы называют *λ-термами* или просто *термами*. Способы образования сложных термов имеют следующие названия: $\alpha(\beta)$ называется *аппликацией* (application), $\lambda x.(\alpha)$ называется *лямбда-абстракцией* (lambda-abstraction) или просто *абстракцией*.

Замечание 2.17. На интуитивном уровне каждый терм типа τ обозначает некоторый элемент множества, соответствущего типу τ. Какой именно элемент данный терм обозначает, может зависеть от значений некоторых переменных, встречающихся в этом терме.

Если терм α обозначает функцию f, а терм β обозначает элемент b, то терм $\alpha(\beta)$ обозначает результат применения функции f к элементу b.

Пример 2.18. Пусть $0 \in \mathbf{Con}_{\mathbf{Real}}$ и $\cos \in \mathbf{Con}_{\mathbf{Real} \to \mathbf{Real}}$ (подразумеваемые значение ясны из обозначений). Тогда $\cos(0) \in \mathbf{Term}_{\mathbf{Real}}$. Как известно из школьной математики, значением этого терма является число один.

Константы и переменные из следующего примера будут использоваться во многих дальнейших примерах.

Пример 2.19. Пусть -1, 0, 1 и 2 принадлежат множеству $\mathbf{Con}_{\mathbf{Real}}$. Пусть $\sin$, $\cos$ и $\exp$ принадлежат множеству $\mathbf{Con}_{\mathbf{Real}\to\mathbf{Real}}$. Подразумеваемые значения $\sin$ и $\cos$ ясны из обозначений, $\exp$ обозначает функцию $x \mapsto e^x$. Пусть $\text{MINUS} \in \mathbf{Con}_{\mathbf{Real}\to\mathbf{Real}\to\mathbf{Real}}$ и значением $\text{MINUS}(\alpha)(\beta)$ является разность значений термов α и β. Другими словами, MINUS обозначает функцию, ставящую в соответствие каждому числу $a \in \mathbb{R}$ функцию $f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определённую формулой $f_a(b) \rightleftharpoons a - b$. Пусть $\text{PLUS}, \text{TIMES} \in \mathbf{Con}_{\mathbf{Real}\to\mathbf{Real}\to\mathbf{Real}}$, значением $\text{PLUS}(\alpha)(\beta)$ является сумма значений термов α и β, а значением $\text{TIMES}(\alpha)(\beta)$ — их произведение. Пусть $x, y, z \in \mathbf{Var}_{\mathbf{Real}}$ и $f, g \in \mathbf{Var}_{\mathbf{Real}\to\mathbf{Real}}$. Тогда $\text{MINUS}(x)(\text{TIMES}(f(\cos(y)))(g(\sin(z))))$ является термом типа **Real**, а значением этого терма является число, вычисляемое по формуле $x - f(\cos(y)) \cdot g(\sin(z))$.

Пусть, кроме того, $\text{LESS}, \text{EQ} \in \mathbf{Con}_{\mathbf{Real}\to\mathbf{Real}\to\mathbf{Bool}}$, $\text{NOT} \in \mathbf{Con}_{\mathbf{Bool}\to\mathbf{Bool}}$, $\text{AND}, \text{OR} \in \mathbf{Con}_{\mathbf{Bool}\to\mathbf{Bool}\to\mathbf{Bool}}$. Подразумеваемое значение $\text{LESS}(\alpha)(\beta)$ истинно тогда и только тогда, когда значение терма α меньше значения терма β. Значения остальных названных констант определяются аналогично, при этом EQ обозначает отношение равенства на множестве действительных чисел. Тогда $\text{AND}(\text{LESS}(-1)(1))(\text{NOT}(\text{EQ}(0)(2)))$ является термом типа **Bool**, а значением этого терма является истина.

Замечание 2.20. Как видно из предыдущего примера, значения констант из $\mathbf{Con}_{\sigma\to\tau}$ не обязаны быть постоянными функциями.

Замечание 2.21. Если $x \in \mathbf{Var}_\sigma$, α — терм типа τ, содержащий переменную x, и типу σ соответствует множество S, то терм $\lambda x.(\alpha)$ обозначает функцию, ставящую в соответствие каждому элементу $c \in S$ значение терма α при значении x, равным c. Аналогично задаётся значение терма $\lambda x.(\alpha)$, если α не содержит переменную x, просто в этом случае получается постоянная функция.

Пример 2.22. Согласно определению 2.15 $\lambda x.(\text{PLUS}(x)(1)) \in \mathbf{Term}_{\mathbf{Real}\to\mathbf{Real}}$ и $\lambda x.(2) \in \mathbf{Term}_{\mathbf{Real}\to\mathbf{Real}}$. Значением первого терма является функция, прибавляющая своему аргументу единицу. Значением второго терма является постоянная одноместная функция, всегда возвращающая число два.

Пример 2.23. Согласно определению 2.15 $\lambda x.(\lambda y.(\text{PLUS}(x)(\cos(y)))) \in \mathbf{Term}_{\mathbf{Real}\to\mathbf{Real}\to\mathbf{Real}}$ и $\lambda x.(\text{TIMES}(\text{PLUS}(x)(y))(\text{PLUS}(x)(z))) \in \mathbf{Term}_{\mathbf{Real}\to\mathbf{Real}}$.

Определение 2.24. Множество всех термов определяется так: $\mathbf{Term} \rightleftharpoons \bigcup_{\tau\in\mathbf{Typ}} \mathbf{Term}_\tau$.

Замечание 2.25. Для удобства записи термов договоримся, что у аппликации приоритет выше, чем у лямбда-абстракции. Таким образом, иногда можно в записи $\lambda x.(\alpha)$ скобки опускать. Например, $\lambda x.(\lambda y.(\text{DER}(\lambda z.(0))))$ и $\lambda x.\lambda y.\text{DER}(\lambda z.0)$ обозначают один и тот же терм (здесь $\text{DER} \in \mathbf{Con}_{(\mathbf{Real}\to\mathbf{Real})\to\mathbf{Real}\to\mathbf{Real}}$). Однако в записи $\lambda x.(x)(\text{PLUS}(y)(z))$ ни одной скобки опускать нельзя.

Пример 2.26. Запись $\lambda x.\cos(0)$ обозначает терм $\lambda x.(\cos(0))$, а не терм $\lambda x.(\cos)(0)$.

Упражнение 2.27. Восстановить все скобки в терме $\lambda z.\text{PLUS}(2)(z)$.

Упражнение 2.28. Восстановить все скобки в терме $\lambda x.\lambda y.\text{PLUS}(1)(2)$.

Упражнение 2.29. Восстановить все скобки в терме $\lambda x.\lambda y.(\text{PLUS})(1)(2)$.

Упражнение 2.30. Восстановить все скобки в терме $\lambda x.(\lambda y.\text{PLUS})(1)(2)$.

Упражнение 2.31. Записать терм $\lambda f.(f(f(f(2))))(\lambda z.(\text{TIMES}(z)(z)))$, экономя скобки.

Пример 2.32. Значения термов $\lambda x.(\text{MINUS}(x)(y))$ и $\lambda z.(\text{MINUS}(z)(y))$ совпадают.

Упражнение 2.33. Какие из термов $\lambda x.(\lambda y.(\text{MINUS}(x)(y)))$, $\lambda x.(\lambda y.(\text{MINUS}(y)(x)))$, $\lambda y.(\lambda x.(\text{MINUS}(y)(x)))$ имеют одинаковые значения?

Пример 2.34. Пусть $\text{DER} \in \mathbf{Con}_{(\mathbf{Real}\to\mathbf{Real})\to\mathbf{Real}\to\mathbf{Real}}$. Тогда $\lambda x.(\text{DER}(\cos)(x))(2) \in \mathbf{Term}_{\mathbf{Real}}$, $\lambda y.(\text{DER}(\cos)(y))(2) \in \mathbf{Term}_{\mathbf{Real}}$, $\text{DER}(\cos)(2) \in \mathbf{Term}_{\mathbf{Real}}$, $\text{DER}(\lambda z.(\cos(z)))(2) \in \mathbf{Term}_{\mathbf{Real}}$. В разделе 2.4 будет построено исчисление, в котором выводится эквивалентность приведённых четырёх термов (они равны независимо от того, каковы значения констант 0, 2, cos, DER).

Определение 2.35. Вхождение (occurrence) переменной x в терм α называется *свободным* (free), если оно не входит в область действия никакого квантора по переменной x в терме α. Вхождение переменной x в терм α называется *связаннным* (bound), если оно не является свободным.

Определение 2.36. Переменная x называется *свободной переменной* (free variable) терма α, если α содержит хотя бы одно свободное вхождение переменной x.

Дадим другое, более формальное определение свободной переменной (без привлечения понятий “вхождение” и “область действия”, которых мы не определяли).

Определение 2.37. *Множество свободных переменных терма* α (обозначение $\mathbf{Free}(\alpha)$) определяется индуктивно.

1. Если $x \in \mathbf{Var}$, то $\mathbf{Free}(x) \rightleftharpoons \{x\}$.
2. Если $c \in \mathbf{Con}$, то $\mathbf{Free}(c) \rightleftharpoons \varnothing$.
3. $\mathbf{Free}(\alpha(\beta)) \rightleftharpoons \mathbf{Free}(\alpha) \cup \mathbf{Free}(\beta)$.
4. $\mathbf{Free}(\lambda x.(\alpha)) \rightleftharpoons \mathbf{Free}(\alpha) - \{x\}$.

Пример 2.38. Согласно определению 2.37 $\mathbf{Free}(\cos(y)) = \{y\}$, $\mathbf{Free}(\text{PLUS}(x)(\cos(y))) = \{x, y\}$, $\mathbf{Free}(\lambda y.(\text{PLUS}(x)(\cos(y)))) = \{x\}$, $\mathbf{Free}(\lambda x.(\lambda y.(\text{PLUS}(x)(\cos(y))))) = \varnothing$.

Пример 2.39. Согласно определению 2.37 $\mathbf{Free}(\lambda x.(\text{TIMES}(\text{PLUS}(x)(y))(\text{PLUS}(x)(z)))) = \{y, z\}$.

Пример 2.40. Согласно определению 2.37 $\mathbf{Free}(\lambda x.(2)(\cos(y))) = \{y\}$. Значением этого терма является число два.

Упражнение 2.41. Пусть $P \in \mathbf{Var}_{(\mathbf{Real}\to\mathbf{Real})\to\mathbf{Real}}$ и $\alpha = \text{PLUS}(\text{TIMES}(x)(P(\lambda x.(\cos(x)))))(x)$. Найти $\mathbf{Free}(\alpha)$ и тип терма α.

Определение 2.42. Терм α называется *замкнутым* (closed), если $\mathbf{Free}(\alpha) = \varnothing$, то есть α не содержит свободных переменных.

Пример 2.43. Терм $\lambda x.(\text{TIMES}(\text{PLUS}(x)(-1))(\text{PLUS}(x)(2)))$ является замкнутым, а терм $\lambda x.(\text{TIMES}(\text{PLUS}(x)(y))(\text{PLUS}(x)(z)))$ не является замкнутым. Значением первого терма является одноместная функция $x \mapsto (x-1)(x+2)$. Значением второго терма также является одноместная функция, но не зная значений переменных y и z, невозможно указать, какая именно.

Пример 2.44. Введём константу $\text{DER} \in \mathbf{Con}_{(\mathbf{Real}\to\mathbf{Real})\to\mathbf{Real}\to\mathbf{Real}}$. Для любых $\varphi \in \mathbf{Term}_{\mathbf{Real}\to\mathbf{Real}}$ и $\alpha \in \mathbf{Term}_{\mathbf{Real}}$ значением терма $\text{DER}(\varphi)(\alpha)$ будем считать производную функции, обозначаемой термом φ, в точке, равной значению терма α. Если эта функция в данной точке недифференцируема, то значением терма $\text{DER}(\varphi)(\alpha)$ будем считать число ноль. Тогда значения термов $\text{DER}(\sin)$ и $\cos$ совпадают. Это можно записать как $\text{DER}(\sin) = \cos$, где знак $=$ следует понимать как равенство значений в подразумеваемой модели. Приведём ещё несколько равенств, выражающих свойства производной: $\text{DER}(\lambda x.(x)) = \lambda x.(1)$, $\text{DER}(\lambda x.(1)) = \lambda x.(0)$, $\text{DER}(\lambda x.(0)) = \lambda x.(0)$, $\text{DER}(\exp) = \exp$, $\text{DER}(\cos) = \lambda x.(\text{TIMES}(-1)(\sin(x)))$, $\text{DER}(\text{DER}(\text{DER}(\text{DER}(\cos)))) = \cos$. Закон о производной суммы двух функций можно записать так: $\text{DER}(\lambda x.(\text{PLUS}(f(x))(g(x)))) = \lambda x.(\text{PLUS}(\text{DER}(f)(x))(\text{DER}(g)(x)))$.

Упражнение 2.45. По аналогии с примером 2.44 выразить равенством лямбда-термов закон о производной произведения двух функций и закон о производной композиции двух функций.

Упражнение 2.46. Найти тип и свободные переменные терма $\text{DER}(\lambda x.(\sin(\exp(x))))(x)$

Упражнение 2.47. Найти тип и значение терма $\lambda x.(\lambda f.(\text{LESS}(f(x))(f(f(x))))(\lambda x.\text{TIMES}(x)(x)))$

2.3 Подстановка

[7, 2.2]

Определение 2.48. Для каждого типа $\tau \in \mathbf{Typ}$, терма α, переменной $x \in \mathbf{Var}_\tau$ и терма $\beta \in \mathbf{Term}_\tau$ определим *результат подстановки терма* β *в терм* α *вместо переменной* x (the result of the substitution of β for x in α) (обозначение $\alpha[x \mapsto \beta]$). Это понятие определяется индуктивно по построению терма α.

1. $x[x \mapsto \beta] \rightleftharpoons \beta$.
2. Если $y \in \mathbf{Var}$ и $y \neq x$, то $y[x \mapsto \beta] \rightleftharpoons y$.
3. Если $c \in \mathbf{Con}$, то $c[x \mapsto \beta] \rightleftharpoons c$.
4. $\gamma(\delta)[x \mapsto \beta] \rightleftharpoons \gamma[x \mapsto \beta](\delta[x \mapsto \beta])$.
5. $\lambda x.(\gamma)[x \mapsto \beta] \rightleftharpoons \lambda x.(\gamma)$.
6. Если $y \in \mathbf{Var}$ и $y \neq x$, то $\lambda y.(\gamma)[x \mapsto \beta] \rightleftharpoons \lambda y.(\gamma[x \mapsto \beta])$.

Пример 2.49. Согласно определению 2.48 $\lambda x.(\text{PLUS}(x)(x))[x \mapsto 2] = \text{PLUS}(2)(2)$ и $\text{DER}(\lambda x.(\sin(\exp(x))))(x)[x \mapsto \cos(y)] = \text{DER}(\lambda x.(\sin(\exp(x))))(\cos(y))$.

Лемма 2.50. *Пусть* $\sigma \in \mathbf{Typ}$, $\tau \in \mathbf{Typ}$, $\alpha \in \mathbf{Term}_\sigma$, $x \in \mathbf{Var}_\tau$, $\beta \in \mathbf{Term}_\tau$. *Тогда* $\alpha[x \mapsto \beta] \in \mathbf{Term}_\sigma$.

Лемма 2.51. *Если* $x \notin \mathbf{Free}(\alpha)$, *то* $\alpha[x \mapsto \beta] = \alpha$.

Лемма 2.52. *Если* $x \notin \mathbf{Free}(\beta)$, *то* $x \notin \mathbf{Free}(\alpha[x \mapsto \beta])$.

Пример 2.53. Согласно определению 2.48 $\lambda x.(\text{MINUS}(x)(y))[y \mapsto \sin(z)] = \lambda x.(\text{MINUS}(x)(\sin(z)))$. Аналогично $\lambda z.(\text{MINUS}(z)(y))[y \mapsto \sin(z)] = \lambda z.(\text{MINUS}(z)(\sin(z)))$, но такая подстановка не соответствует интуиции о желаемом значении результата подстановки. Говорят, что такая подстановка "не является свободной". Следующее определение вводит понятие, позволяющее дать формальное определение свободной подстановки.

Определение 2.54. Определим понятие "*терм β является свободным для переменной x в терме α*" (β is free for x in α) (обозначение $\mathbf{FreeFor}(\beta, x, \alpha)$) индуктивно по построению терма α.

1. Если $\alpha \in \mathbf{Var}$ или $\alpha \in \mathbf{Con}$, то утверждение $\mathbf{FreeFor}(\beta, x, \alpha)$ истинно.
2. $\mathbf{FreeFor}(\beta, x, \gamma(\delta)) \leftrightarrow \mathbf{FreeFor}(\beta, x, \gamma) \wedge \mathbf{FreeFor}(\beta, x, \delta)$.
3. $\mathbf{FreeFor}(\beta, x, \lambda y.(\gamma)) \leftrightarrow x = y \vee (\mathbf{FreeFor}(\beta, x, \gamma) \wedge (x \notin \mathbf{Free}(\gamma) \vee y \notin \mathbf{Free}(\beta)))$.

Определение 2.55. Подстановка $\alpha[x \mapsto \beta]$ называется *свободной* (free), если выполняется условие $\mathbf{FreeFor}(\beta, x, \alpha)$.

Упражнение 2.56. Верно ли $\mathbf{FreeFor}(y, x, \lambda y.y)$?

Упражнение 2.57. Верно ли $\mathbf{FreeFor}(f(y), x, \lambda y.x)$?

Упражнение 2.58. Верно ли $\mathbf{FreeFor}(y, x, \lambda y.x)$?

Упражнение 2.59. Верно ли $\mathbf{FreeFor}(y, x, \lambda y.f(x))$?

Упражнение 2.60. Верно ли $\mathbf{FreeFor}(y, x, \lambda y.(f)(x))$?

Упражнение 2.61. Верно ли $\mathbf{FreeFor}(y, x, \text{DER}(\lambda y.y)(x))$?

Упражнение 2.62. Верно ли $\mathbf{FreeFor}(\lambda y.y, f, \lambda y.\lambda f.\text{DER}(f)(y))$?

Упражнение 2.63. Верно ли $\mathbf{FreeFor}(y, x, \text{DER}(\lambda y.\sin(x))(\text{DER}(\lambda y.y)(x)))$?

Лемма 2.64. *Если $x \notin \mathbf{Free}(\alpha)$, то $\mathbf{FreeFor}(\beta, x, \alpha)$.*

Лемма 2.65. *Если $\mathbf{Free}(\beta) = \varnothing$, то $\mathbf{FreeFor}(\beta, x, \alpha)$.*

Лемма 2.66. *Если α не содержит связанных вхождений переменных, принадлежащих множеству $\mathbf{Free}(\beta)$, то $\mathbf{FreeFor}(\beta, x, \alpha)$.*

Лемма 2.67. *Если $x \in \mathbf{Free}(\alpha)$ и $\mathbf{FreeFor}(\beta, x, \alpha)$, то $\mathbf{Free}(\alpha[x \mapsto \beta]) = (\mathbf{Free}(\alpha) - \{x\}) \cup \mathbf{Free}(\beta)$.*

Лемма 2.68. *Если $y \notin \mathbf{Free}(\alpha)$, то $\mathbf{FreeFor}(x, y, \alpha[x \mapsto y])$.*

Лемма 2.69. *Если $y \notin \mathbf{Free}(\alpha)$ и $\mathbf{FreeFor}(y, x, \alpha)$, то $\alpha[x \mapsto y][y \mapsto x] = \alpha$.*

2.4 Исчисление

[7, 2.4]

В лямбда-исчислении (lambda-calculus) выводятся утверждения вида $\alpha \Rightarrow \beta$, где $\alpha \in \mathbf{Term}$ и $\beta \in \mathbf{Term}$. Если $\alpha \Rightarrow \beta$ выводимо, то пишут $\vdash \alpha \Rightarrow \beta$.

Лямбда-исчисление содержит следующие аксиомы и правила.

1. Если $y \notin \mathbf{Free}(\alpha)$ и $\mathbf{FreeFor}(y, x, \alpha)$, то $\vdash \lambda x.(\alpha) \Rightarrow \lambda y.(\alpha[x \mapsto y])$. Это аксиома α-редукции (α-reduction).
2. Если $\mathbf{FreeFor}(\beta, x, \alpha)$, то $\vdash \lambda x.(\alpha)(\beta) \Rightarrow \alpha[x \mapsto \beta]$. Это аксиома β-редукции (β-reduction).
3. Если $x \notin \mathbf{Free}(\alpha)$, то $\vdash \lambda x.(\alpha(x)) \Rightarrow \alpha$. Это аксиома η-редукции (η-reduction).
4. $\vdash \alpha \Rightarrow \alpha$.
5. Если $\vdash \alpha \Rightarrow \beta$ и $\vdash \beta \Rightarrow \gamma$, то $\vdash \alpha \Rightarrow \gamma$.
6. Если $\vdash \alpha \Rightarrow \alpha'$ и $\vdash \beta \Rightarrow \beta'$, то $\vdash \alpha(\beta) \Rightarrow \alpha'(\beta')$.
7. Если $\vdash \alpha \Rightarrow \alpha'$, то $\vdash \lambda x.(\alpha) \Rightarrow \lambda x.(\alpha')$.

Пример 2.70. По α-редукции $\lambda y.\text{DER}(\lambda y.\sin(\exp(y)))(y) \Rightarrow \lambda y_1.\text{DER}(\lambda y_2.\sin(\exp(y_2)))(y_1)$, где $y_1, y_2 \in \mathbf{Var}_{\mathbf{Real}}$.

Пример 2.71. По α-редукции

$$\lambda x.(\text{MINUS}(x)(\text{DER}(\lambda x.\text{TIMES}(x)(x))(z)) \Rightarrow \lambda x_1.(\text{MINUS}(x_1)(\text{DER}(\lambda x_2.\text{TIMES}(x_2)(x_2))(z)),$$

где $x_1, x_2 \in \mathbf{Var}_{\mathbf{Real}}$.

Пример 2.72. По β-редукции $\lambda x.(\text{PLUS}(x)(x))(2) \Rightarrow \text{PLUS}(2)(2)$.

Лемма 2.73. *Если $\vdash \beta \Rightarrow \beta'$, то $\alpha[x \mapsto \beta] \Rightarrow \alpha[x \mapsto \beta']$.*

Пример 2.74. Из примера 2.72 и леммы 2.73 следует, что

$$\text{TIMES}(\lambda x.(\text{PLUS}(x)(x))(2)) \Rightarrow \text{TIMES}(\text{PLUS}(2)(2)).$$

Пример 2.75. Пусть $u, v, w \in \mathbf{Var_{Real}}$. Тогда $\lambda u.(\lambda v.(\text{MINUS}(v)(u)))(w) \Rightarrow \lambda v.(\text{MINUS}(v)(w))$, но $\lambda u.(\lambda v.(\text{MINUS}(v)(u)))(v) \not\Rightarrow \lambda v.(\text{MINUS}(v)(v))$, так как не выполняется условие $\mathbf{FreeFor}(v, u, \lambda v.(\text{MINUS}(v)(u)))$.

Терм $\lambda u.(\lambda v.(\text{MINUS}(v)(u)))(v)$ всё же можно редуцировать, если исползовать сначала α-редукцию, а потом β-редукцию. По α-редукции получаем $\lambda v.(\text{MINUS}(v)(u)) \Rightarrow \lambda y.(\text{MINUS}(y)(u))$, $\lambda u.(\lambda v.(\text{MINUS}(v)(u))) \Rightarrow \lambda u.(\lambda y.(\text{MINUS}(y)(u)))$, $\lambda u.(\lambda v.(\text{MINUS}(v)(u)))(v) \Rightarrow \lambda u.(\lambda y.(\text{MINUS}(y)(u)))(v)$. По β-редукции имеем $\lambda u.(\lambda y.(\text{MINUS}(y)(u))(v) \Rightarrow \lambda y.(\text{MINUS}(y)(v))$. Следовательно, $\lambda u.(\lambda v.(\text{MINUS}(v)(u)))(v) \Rightarrow \lambda y.(\text{MINUS}(y)(v))$.

Пример 2.76. По β-редукции $\lambda f.(f(f(x)))(\cos) \Rightarrow \cos(\cos(x))$.

Пример 2.77. По β-редукции $\lambda x.(\lambda y.(\text{MINUS}(x)(y)))(1)(2) \Rightarrow \lambda y.(\text{MINUS}(1)(y))(2) \Rightarrow \text{MINUS}(1)(2)$.

Пример 2.78. По β-редукции $\lambda x.(\lambda y.(\text{MINUS}(x)(y))(1))(2) \Rightarrow \lambda y.(\text{MINUS}(2)(y))(1) \Rightarrow \text{MINUS}(2)(1)$. К тому же результату приводит и последовательность редукций $\lambda x.(\lambda y.(\text{MINUS}(x)(y))(1))(2) \Rightarrow \lambda x.(\text{MINUS}(x)(1))(2) \Rightarrow \text{MINUS}(2)(1)$.

Пример 2.79. По η-редукции $\lambda x. \cos(x) \Rightarrow \cos$ и $\lambda x.\text{MINUS}(y)(x) \Rightarrow \text{MINUS}(y)$.

Пример 2.80. К термам $\lambda x.\text{MINUS}(x)(1)$, $\lambda x. \cos(\exp(x))$, $\lambda x.\text{TIMES}(x)(x)$, $\lambda x.\lambda y.\text{MINUS}(x)(y)$ η-редукцию применить нельзя.

Определение 2.81. На множестве всех термов определено бинарное отношение $=_\alpha$ $\gamma =_\alpha \delta$ истинно тогда и только тогда, когда в лямбда-исчислении можно вывести $\gamma \Rightarrow \delta$ без применения β-редукции и η-редукции.

Теорема 2.82. *Отношение $=_\alpha$ является отношением эквивалентности (то есть оно рефлексивно, симметрично и транзитивно).*

Определение 2.83. Если $\gamma =_\alpha \delta$, то говорят, что термы γ и δ являются *α-эквивалентными* (α-equivalent; alphabetic variants)

Определение 2.84. Терм называется *η-редексом* (η-redex), если к нему применима η-редукция.

Определение 2.85. Терм называется *β-редексом* (β-redex), если он α-эквивалентен некоторому терму, к которому применима β-редукция.

Определение 2.86. Если терм не содержит в качестве подтерма ни одного β-редекса или η-редекса, то говорят, что этот терм находится в *β, η-нормальной форме* (β, η normal form) или просто в *нормальной форме*. Если $\alpha \Rightarrow \alpha'$ и терм α' находится в нормальной форме, то говорят, что α' является *нормальной формой*normal form терма α.

Упражнение 2.87. Привести к нормальной форме терм $\lambda x.(\lambda x.x)(f(x))$.

Упражнение 2.88. Привести к нормальной форме терм $\lambda x.(\lambda y.x)(\sin(y))$.

Упражнение 2.89. Привести к нормальной форме терм $\lambda x.(\text{DER}(\lambda y.y)(x))(y)$.

Константы из следующего примера будут использоваться во многих дальнейших примерах. При этом типы переменных не будут явно указываться, если они ясны из контекста.

Пример 2.90. Пусть $\mathbf{BasTyp} = \{\mathbf{Ind}, \mathbf{Bool}\}$, $\text{CHRIS} \in \mathbf{Con_{Ind}}$, $\text{RUN} \in \mathbf{Con_{Ind \to Bool}}$, $\text{SEE} \in \mathbf{Con_{Ind \to Ind \to Bool}}$. Тогда $\text{RUN} \in \mathbf{Term_{Ind \to Bool}}$ и $\text{SEE}(\text{CHRIS}) \in \mathbf{Term_{Ind \to Bool}}$.

В подразумеваемой модели типу **Ind** соответствует множество индивидов. Терм $\text{RUN}(\alpha)$ истинен, если индивид, обозначаемый термом α, бежит. Терм $\text{SEE}(\beta)(\alpha)$ истинен, если индивид, обозначаемый термом α, видит индивида, обозначаемого термом β.

Аналогичные подразумеваемые значения приписываются константам

$$\text{AFRICA}, \text{BILL}, \text{JOHN}, \text{MARY}, \text{VAL} \in \mathbf{Con_{Ind}},$$
$$\text{HESITATE}, \text{THINK}, \text{SING} \in \mathbf{Con_{Ind \to Bool}},$$
$$\text{LIKE}, \text{HATE}, \text{LOVE} \in \mathbf{Con_{Ind \to Ind \to Bool}},$$
$$\text{GIVE} \in \mathbf{Con_{Ind \to Ind \to Ind \to Bool}},$$
$$\text{EVERYWHERE} \in \mathbf{Con_{(Ind \to Bool) \to Ind \to Bool}}.$$

Упражнение 2.91. Найти тип λ-терма $\lambda x.(\lambda y.(\text{GIVE}(x)(y)(z)))(\text{JOHN})$, если $x \in \mathbf{Var_{Ind}}$, $y \in \mathbf{Var_{Ind}}$, $z \in \mathbf{Var_{Ind}}$, $\text{GIVE} \in \mathbf{Con_{Ind \to Ind \to Ind \to Bool}}$, $\text{JOHN} \in \mathbf{Con_{Ind}}$.

Упражнение 2.92. Привести к нормальной форме терм $(\lambda x.\text{SING}(x))(\text{JOHN})$.

Упражнение 2.93. Привести к нормальной форме терм $\lambda y.\text{LIKE}(x)(y)$.

Упражнение 2.94. Привести к нормальной форме терм $\lambda y.\text{LIKE}(y)(x)$.

Упражнение 2.95. Привести к нормальной форме терм $\lambda z.\text{HATE}(z)(z)$.

Упражнение 2.96. Привести к нормальной форме терм $\lambda x.(\lambda y.(\text{GIVE}(x)(x)(y)))$.
Упражнение 2.97. Привести к нормальной форме терм $(\lambda R.R(\text{MARY}))(\lambda y.\lambda x.\text{LIKE}(x)(y))$.
Упражнение 2.98. Привести к нормальной форме терм $(\lambda R.R(x))(\lambda y.\lambda x.\text{LIKE}(x)(y))$.
Упражнение 2.99. Привести к нормальной форме терм $\lambda f.(\lambda g.\lambda x.\text{AND}(f(x))(g(x)))(\text{SING})(\text{LIKE}(x))$.
Упражнение 2.100. Привести к нормальной форме терм $\lambda f.(\lambda x.\lambda y.f(y)(x))(\text{LIKE})$.
Упражнение 2.101. Привести к нормальной форме терм $\lambda f.(\lambda x.\lambda y.f(y)(x))(\lambda x.\lambda y.\text{LIKE}(y)(x))$.
Упражнение 2.102. Привести к нормальной форме терм $\lambda f.(\lambda x.\lambda y.\text{AND}(f(y)(x))(f(x)(y)))(\text{HATE})$.
Упражнение 2.103. Привести к нормальной форме терм $\lambda R.(\lambda f.R(R(f(\text{JOHN}))))(\text{NOT})(\text{RUN})$.
Упражнение 2.104. Привести к нормальной форме терм $\lambda x.(\text{LIKE}(x)(x))(\text{THE}(\lambda x.(\text{RUN}(x))))$.
Теорема 2.105 (свойство Чёрча—Россера (the Church—Rosser theorem), без доказательства). *Если $\vdash \delta \Rightarrow \alpha$ и $\vdash \delta \Rightarrow \beta$, то найдётся такой терм γ, что $\vdash \alpha \Rightarrow \gamma$ и $\vdash \beta \Rightarrow \gamma$.*
Определение 2.106. На множестве всех термов определено бинарное отношение $\Leftrightarrow$: $\alpha \Leftrightarrow \beta$ истинно тогда и только тогда, когда найдётся такой терм γ, что $\vdash \alpha \Rightarrow \gamma$ и $\vdash \beta \Rightarrow \gamma$. Запись $\alpha \Leftrightarrow \beta$ читается: "термы α и β доказуемо эквивалентны" (provably equivalent).
Пример 2.107. Все четыре терма из примера 2.34 эквивалентны.
Теорема 2.108. *Отношение $\Leftrightarrow$ является отношением эквивалентности (то есть оно рефлексивно, симметрично и транзитивно).*
Лемма 2.109. *Если $\vdash \alpha \Rightarrow \beta$, то найдётся такой тип $\tau \in \mathbf{Typ}$, что $\alpha \in \mathbf{Term}_\tau$ и $\beta \in \mathbf{Term}_\tau$.*
Лемма 2.110. *Если $\vdash \alpha \Rightarrow \beta$, то $\mathbf{Free}(\beta) \subseteq \mathbf{Free}(\alpha)$.*
Пример 2.111. По β-редукции $\lambda x.(\cos(0))(y) \Rightarrow \cos(0)$. Заметим, что $\mathbf{Free}(\cos(0)) \subsetneq \mathbf{Free}(\lambda x.(\cos(0))(y))$.
Теорема 2.112 (без доказательства). *Не существует такой бесконечной последовательности термов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, чтобы для каждого i выполнялось $\alpha_i \Rightarrow \alpha_{i+1}$ и $\alpha_i \neq_\alpha \alpha_{i+1}$.*
Лемма 2.113. *У каждого терма есть нормальная форма. Она определена однозначно с точностью до α-эквивалентности.*

3 Категориальная грамматика

[7, Ch. 4], [2, с. 123–136]

3.1 Синтаксические категории

[7, с. 112–113]

Определение 3.1. Множество *простейших категорий* (basic categories) $\mathbf{BasCat}$ — произвольное непустое конечное множество.
Пример 3.2. Во многих лингвистических примерах используется набор $\mathbf{BasCat} = \{np, n, s\}$, где np, n и s приблизительно соответствуют понятиям "именная группа" (noun phrase), "существительное" (noun) и "предложение" (sentence).
Определение 3.3. Множество *категорий* (categories) определяется индуктивно.
1. $\mathbf{BasCat} \subseteq \mathbf{Cat}$.
2. Если $A \in \mathbf{Cat}$ и $B \in \mathbf{Cat}$, то $(A/B) \in \mathbf{Cat}$ и $(A\backslash B) \in \mathbf{Cat}$.

Пример 3.4. Пусть $\mathbf{BasCat} = \{np, n, s\}$. Тогда $n \in \mathbf{Cat}$, $np/n \in \mathbf{Cat}$ и $(np\backslash s)/np \in \mathbf{Cat}$.
Лемма 3.5. *Мнодество $\mathbf{Cat}$ счётно.*

3.2 Типы категорий

[7, с. 114–115]

Определение 3.6. *Назначением типов* (type assignment) называется любая функция $\mathrm{Type}\colon \mathbf{Cat} \to \mathbf{Typ}$, удовлетворяющая условиям $\mathrm{Type}(A/B) = \mathrm{Type}(B) \to \mathrm{Type}(A)$ и $\mathrm{Type}(B\backslash A) = \mathrm{Type}(B) \to \mathrm{Type}(A)$.
Лемма 3.7. *Функция* Type *определена однозначно, если даны значения* $\mathrm{Type}(A)$ *для всех* $A \in \mathbf{BasCat}$.

Пример 3.8. Используем $\mathbf{BasCat}$ из примера 3.2. Пусть $\mathbf{BasTyp} = \{\mathbf{Bool}, \mathbf{Ind}\}$, $\mathrm{Type}(np) = \mathbf{Ind}$, $\mathrm{Type}(s) = \mathbf{Bool}$ и $\mathrm{Type}(n) = \mathbf{Ind} \to \mathbf{Bool}$. Тогда $\mathrm{Type}(np/n) = (\mathbf{Ind} \to \mathbf{Bool}) \to \mathbf{Ind}$ и $\mathrm{Type}((np\backslash s)/np) = \mathbf{Ind} \to \mathbf{Ind} \to \mathbf{Bool}$.
Упражнение 3.9. Пусть $\mathrm{Type}(np) = \mathbf{Ind}$, $\mathrm{Type}(s) = \mathbf{Bool}$, $\mathrm{Type}(n) = \mathbf{Ind} \to \mathbf{Bool}$. Найти $\mathrm{Type}(((np\backslash s)/np)/n)$.

3.3 Категориальный словарь

[7, с. 115]

Определение 3.10. Множество *простейших выражений* (basic expressions) $\mathbf{BasExp}$ — произвольное непустое конечное множество.
Пример 3.11. $\mathbf{BasExp} = \{John, Mary, likes\}$.
Определение 3.12. *Категориальным словарём* (categorial lexicon) называется любое конечное множество $\mathbf{Lex} \subseteq \mathbf{BasExp} \times (\mathbf{Cat} \times \mathbf{Term})$, в котором для любой тройки $\langle e, \langle A, \alpha \rangle \rangle \in \mathbf{Lex}$ выполняется условие $\alpha \in \mathbf{Term}_{\mathrm{Type}(A)}$. Обычно вместо $\langle e, \langle A, \alpha \rangle \rangle$ пишут $e \Rightarrow \alpha : A$.
Пример 3.13. Продолжим примеры 3.8 и 3.11. Пусть $\textsc{john} \in \mathbf{Con}_{\mathbf{Ind}}$, $\textsc{mary} \in \mathbf{Con}_{\mathbf{Ind}}$ и $\textsc{like} \in \mathbf{Con}_{\mathbf{Ind} \to \mathbf{Ind} \to \mathbf{Bool}}$. Тогда $\mathbf{Lex} = \{John \Rightarrow \textsc{john} : np,\ Mary \Rightarrow \textsc{mary} : np,\ likes \Rightarrow \textsc{like} : (np\backslash s)/np\}$ является категориальным словарём.

3.4 Базовая категориальная грамматика

[7, с. 119]

Справка 3.14. И. Бар-Хиллел (Yehoshua Bar-Hillel) — израильский математик.
Справка 3.15. Х. Гайфман (Chaim Gaifman) — израильский математик.
Определение 3.16. *Выражениями* (expressions) называются непустые конечные последовательности простейших выражений. Обозначим множество всех выражений $\mathbf{Exp}$.
Определение 3.17. Пусть дан категориальный словарь $\mathbf{Lex}$. *Множеством значений* (phrase-structure denotation) выражения e (обозначение $[\![e]\!]_{\mathbf{Lex}}$ или просто $[\![e]\!]$) является некоторое множество пар $\alpha : A$, где $\alpha \in \mathbf{Term}$ и $A \in \mathbf{Cat}$. Множество $[\![e]\!]$ определяется индуктивно следующим образом.

1. Если $(e \Rightarrow \alpha : A) \in \mathbf{Lex}$, то $\alpha : A \in [\![e]\!]$.
2. Если $\alpha : A/B \in [\![e_1]\!]$ и $\beta : B \in [\![e_2]\!]$, то $\alpha(\beta) : A \in [\![e_1 e_2]\!]$.
3. Если $\beta : B \in [\![e_1]\!]$ и $\alpha : B\backslash A \in [\![e_2]\!]$, то $\alpha(\beta) : A \in [\![e_1 e_2]\!]$.

Пример 3.18. Рассмотрим словарь из примера 3.13. Тогда

$$\textsc{like}(\textsc{mary})(\textsc{john}) : s \in [\![\textit{John likes Mary}]\!].$$

Лемма 3.19. *Если $\alpha : A \in [\![e]\!]$, то $\alpha \in \mathbf{Term}_{\mathrm{Type}(A)}$.*
Определение 3.20. *Базовая категориальная грамматика* (basic categorial grammar) состоит из категориального словаря $\mathbf{Lex}$ и выделенной категории H. Формальный язык, *порождаемый* базовой категориальной грамматикой $\langle \mathbf{Lex}, H \rangle$, состоит из всех выражений $e \in \mathrm{exp}$, для которых найдётся терм α, удовлетворяющий условию $\alpha : H \in [\![e]\!]$.
Замечание 3.21. Формальный язык, порождаемый базовой категориальной грамматикой, является подмножеством множества $\mathbf{BasExp}^+$.
Замечание 3.22. Категориальные грамматики с левым и правым делением были введены И. Бар-Хиллелом в [23]. В категориальных грамматиках информация о синтаксической сочетаемости содержится не в правилах грамматики, а в словаре [2, с. 152]. При этом правила едины для всех моделируемых языков.
Теорема 3.23 (без доказательства). *Рассмотрим алфавит $\mathbf{BasExp}$ и формальный язык $L \subseteq \mathbf{BasExp}^+$. Язык L порождается некоторой базовой категориальной грамматикой тогда и только тогда, когда он является контекстно-свободным.*
Замечание 3.24. Доказателсьво теоремы 3.23 можно найти в [24].

Пример 3.25. Расширим пример 3.13, положив в словарь следующие простейшие выражения.

категория	простейшие выражения
np	*John, Mary, Bill, Val, Africa, Europe, illiteracy*
$np\backslash s$	*runs, jumps, thinks, sings, protests, dances, falls,*
n	*man, job, bird, hat, boy, girl, flower, box, name, tourist*
np/n	*a, the, every*
n/n	*tall, honest, wicked, lazy, poor, little, brown*
$(n/n)/(n/n)$	*relatively*
$(np\backslash s)/np$	*likes, finds, hates, loves, touches, sees, elects*
$np\backslash(s/np)$	*likes, finds, hates, loves, touches, sees, elects*
$(np\backslash np)/np$	*with, without*
$s\backslash(s/s)$	*or, if*
$((np\backslash s)/np)/np$	*gives, shows*
$(np\backslash s)/s$	*believes*
$(np\backslash s)\backslash(np\backslash s)$	*slowly, charmingly, everywhere, outside*
$n\backslash n$	*outside*
$((np\backslash s)\backslash(np\backslash s))/np$	*in, on*
$(n\backslash n)/np$	*in, on*

В качестве лямбда-термов используются константы подходящего типа. Например, так как первая строка содержит элемент *Bill*, то в множество $\mathbf{Lex}$ добавляется элемент $Bill \Rightarrow \textsc{bill} : np$, где $\textsc{bill} \in \mathbf{Con_{Ind}}$.

Упражнение 3.26. Вычислить значение выражения *sings slowly*.

Упражнение 3.27. Вычислить значение выражения *the tall student loves Mary*.

3.5 Исчисление Ламбека без умножения

[7, 5.1]

Справка 3.28. И. Ламбек (Jim Lambek) (р. 1922) — канадский математик.

В 1958 г. канадский математик Джим Ламбек определил секвенциальное исчисление для математически строгого описания синтаксиса формальных и естественных языков. В 1983 г. голландский математик Йохан ван Бентем добавил к синтаксическому исчислению Ламбека семантическую составляющую, используя лямбда-термы. В этом разделе мы рассмотрим полученное таким образом исчисление, включающее как синтаксическую, так и семантическую составляющую.

В оригинальном исчислении Ламбека используются три бинарные операции — левое деление (\\), правое деление (/) и умножение (·). В этом разделе мы приведём определение фрагмента без умножения.

Определение 3.29. Определим исчисление L. Выводимыми объектами этого исчисления являются записи вида $\alpha_1 : A_1, \ldots, \alpha_n : A_n \to \beta : B$, где $n \geqslant 1$ (такая запись называется *секвенцией* (sequent)). Заглавными греческими буквами будем обозначать конечные последовательности пар вида $\alpha : A$.

Аксиомы исчисления L имеют вид $\alpha : A \to \alpha : A$. Выводы строятся с помощью следующих правил:

$$\frac{x : A, \Pi \to \beta : B}{\Pi \to \lambda x.(\beta) : A\backslash B}\ (\to \backslash),\ \text{где } \Pi \text{ непуста и } x \text{ — новая переменная из } \mathbf{Var}_{\mathrm{Type}(A)},$$

$$\frac{\Pi \to \alpha : A \quad \Gamma, \beta(\alpha) : B, \Delta \to \gamma : C}{\Gamma, \Pi, \beta : (A\backslash B), \Delta \to \gamma : C}\ (\backslash \to),$$

$$\frac{\Pi, x : A \to \beta : B}{\Pi \to \lambda x.(\beta) : B/A}\ (\to /),\ \text{где } \Pi \text{ непуста и } x \text{ — новая переменная из } \mathbf{Var}_{\mathrm{Type}(A)},$$

$$\frac{\Pi \to \alpha : A \quad \Gamma, \beta(\alpha) : B, \Delta \to \gamma : C}{\Gamma, \beta : (B/A), \Pi, \Delta \to \gamma : C}\ (/ \to).$$

Будем писать $\mathrm{L} \vdash \Pi \to \alpha : A$, если секвенция $\Pi \to \alpha : A$ выводима в исчислении L.

Пример 3.30. $\mathrm{L} \vdash \textsc{the} : (np/n), \textsc{man} : n \to \textsc{the}(\textsc{man}) : np$.

Упражнение 3.31. Выводима ли секвенция $\textsc{john} : np, \textsc{run} : (np\backslash s) \to \textsc{run}(\textsc{john}) : s$?

Упражнение 3.32. Выводима ли секвенция $\textsc{run} : (np\backslash s), \textsc{john} : np \to \textsc{run}(\textsc{john}) : s$?

Упражнение 3.33. Выводима ли секвенция
$\textsc{john} : np, \textsc{like} : ((np\backslash s)/np), \textsc{mary} : np \to \textsc{like}(\textsc{john})(\textsc{mary}) : s$?

Упражнение 3.34. Выводима ли секвенция
$\textsc{john} : np, \textsc{give} : (((np\backslash s)/np)/np), \textsc{mary} : np, \textsc{the} : (np/n), \textsc{flower} : n \to \textsc{give}(\textsc{mary})(\textsc{the}(\textsc{flower}))(\textsc{john}) : s$?

Упражнение 3.35. Найти лямбда-терм α, для которого выводима секвенция
$\mathrm{L} \vdash \textsc{tall} : (n/n), \textsc{hat} : n \to \alpha : n$.

Упражнение 3.36. Найти лямбда-терм α, для которого выводима секвенция
$\mathrm{L} \vdash \textsc{gives} : (((np\backslash s)/np)/np), \textsc{mary} : np, \textsc{the} : (np/n), \textsc{flower} : n \to \alpha : (np\backslash s)$.

Упражнение 3.37. Выводима ли секвенция
$\mathrm{L} \vdash \textsc{see} : ((np\backslash s)/np) \to \lambda x_1.\lambda x_2.\textsc{see}(x_2)(x_1) : (np\backslash(s/np))$?

Ответ 3.37. Да.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_2 : np \to x_2 : np \qquad \dfrac{x_1 : np \to x_1 : np \quad \textsc{see}(x_2)(x_1) : s \to \textsc{see}(x_2)(x_1) : s}{x_1 : np, \textsc{see}(x_2) : (np\backslash s) \to \textsc{see}(x_2)(x_1) : s}\,(\backslash \to)}{x_1 : np, \textsc{see} : ((np\backslash s)/np), x_2 : np \to \textsc{see}(x_2)(x_1) : s}\,(/ \to)}{x_1 : np, \textsc{see} : ((np\backslash s)/np) \to \lambda x_2.\textsc{see}(x_2)(x_1) : (s/np)}\,(\to /)}{\textsc{see} : ((np\backslash s)/np) \to \lambda x_1.\lambda x_2.\textsc{see}(x_2)(x_1) : (np\backslash(s/np))}\,(\to \backslash).
$$

3.6 Категориальные грамматики Ламбека

[7, 5.1]

Определение 3.38. Каждая категориальная грамматика Ламбека основана на категориальным словаре $\mathbf{Lex}$, определяемом так же, как в базовой категориальной грамматике. Но в грамматике Ламбека выражению $e_1 \ldots e_n$, где $e_i \in \mathbf{BasExp}$, ставится в соответствие значение $\alpha : A$ (обозначение $e_1 \ldots e_n \Rightarrow \alpha : A$), если $(e_1 \Rightarrow \alpha_1 : A_1) \in \mathbf{Lex}$, ..., $(e_n \Rightarrow \alpha_n : A_n) \in \mathbf{Lex}$ и $\mathrm{L} \vdash \alpha_1 : A_1, \ldots, \alpha_n : A_n \to \alpha : A$ для некоторых α_1, A_1, ..., α_n, A_n.

Пример 3.39. Значением выражения *the girl dances* является терм $\textsc{dance}(\textsc{the}(\textsc{girl}))$.

Пример 3.40. Пусть *whom* $\Rightarrow \lambda P.\lambda Q.\lambda x.\textsc{and}(P(x))(Q(x)) : (n\backslash n)/(s/np)$. Тогда значением выражения *the girl whom John likes hates John* является $\textsc{hate}(\textsc{john})(\textsc{the}(\lambda x.\textsc{and}(\textsc{like}(x)(\textsc{john}))(\textsc{girl}(x)))) : s$.

В следующих упражнениях используется словарь из примера 3.25.

Упражнение 3.41. Найти значения (с категорией s) выражения *Africa sings*.

Упражнение 3.42. Найти значения (с категорией s) выражения *Mary sings everywhere*.

Упражнение 3.43. Найти значения (с категорией s) выражения *Mary likes the flower*.

Упражнение 3.44. Найти значения (с категорией s) выражения *John shows Mary Africa*.

Упражнение 3.45. Найти значения (с категорией s) выражения
John shows the relatively honest professor a wicked little boy with a tall hat.

Упражнение 3.46. Найти значения (с категорией s) выражения *John likes the girl*.

4 Синтаксическое исчисление Ламбека

4.1 Определение

Рассмотрим синтаксическое исчисление L, введенное И. Ламбеком в 1958 г. Его принято называть *синтаксическим исчислением Ламбека* (Lambek syntactic calculus) или просто *исчислением Ламбека* (Lambek calculus). Предполагаем, что задано счетное множество $\mathrm{Pr} = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$, элементы которого будем называть *примитивными типами*. *Типы* исчисления Ламбека строятся из примитивных типов с помощью трех бинарных связок $\cdot$, $\backslash$, $/$. Обозначим множество всех типов, построенных таким образом, через Tp. Прописные буквы латинского алфавита будем использовать для обозначения типов исчисления Ламбека, а прописные греческие буквы — для обозначения конечных (не обязательно непустых) последовательностей типов. Символ Λ будет всегда обозначать пустую последовательность типов.

Выводимыми объектами исчисления Ламбека являются секвенции вида $\Gamma \to A$, где $\Gamma \neq \Lambda$. Аксиомы имеют вид $A \to A$. Выводы строятся с помощью следующих правил:

$$\frac{A, \Pi \to B}{\Pi \to A \backslash B}\ (\to \backslash),\ \text{где } \Pi \neq \Lambda, \qquad \frac{\Pi \to A \quad \Gamma, B, \Delta \to C}{\Gamma, \Pi, (A \backslash B), \Delta \to C}\ (\backslash \to),$$

$$\frac{\Pi, A \to B}{\Pi \to B / A}\ (\to /),\ \text{где } \Pi \neq \Lambda, \qquad \frac{\Pi \to A \quad \Gamma, B, \Delta \to C}{\Gamma, (B/A), \Pi, \Delta \to C}\ (/ \to),$$

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Delta \to B}{\Gamma, \Delta \to A \cdot B}\ (\to \cdot), \qquad \frac{\Gamma, A, B, \Delta \to C}{\Gamma, (A \cdot B), \Delta \to C}\ (\cdot \to),$$

$$\frac{\Pi \to B \quad \Gamma, B, \Delta \to A}{\Gamma, \Pi, \Delta \to A}\ (\mathrm{cut}).$$

Будем писать $\mathrm{L} \vdash \Gamma \to A$, если секвенция $\Gamma \to A$ выводима в исчислении Ламбека.
Пример 4.1. $\mathrm{L} \vdash ((p_1 \backslash p_2)/p_3) \to (p_1 \backslash (p_2/p_3))$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p_3 \to p_3 \quad \dfrac{p_1 \to p_1 \quad p_2 \to p_2}{p_1, (p_1 \backslash p_2) \to p_2}\ (\backslash \to)}{p_1, ((p_1 \backslash p_2)/p_3), p_3 \to p_2}\ (/ \to)}{p_1, ((p_1 \backslash p_2)/p_3) \to (p_2/p_3)}\ (\to /)}{((p_1 \backslash p_2)/p_3) \to (p_1 \backslash (p_2/p_3))}\ (\to \backslash).$$

Упражнение 4.2. Всегда ли в исчислении Ламбека выводима секвенция $\mathrm{L} \vdash A/B, B/C \to A/C$?
Ответ 4.2. Да.

$$\dfrac{\dfrac{C \to C \quad \dfrac{B \to B \quad A \to A}{A/B, B \to A}\ (/ \to)}{A/B, B/C, C \to A}\ (/ \to)}{A/B, B/C \to A/C}\ (\to /)$$

Упражнение 4.3. Всегда ли в исчислении Ламбека выводима секвенция $\mathrm{L} \vdash A \to (B/A) \backslash B$?
Ответ 4.3. Да.

$$\dfrac{\dfrac{A \to A \quad B \to B}{B/A, A \to B}\ (/ \to)}{A \to (B/A) \backslash B}\ (\to \backslash)$$

Определение 4.4. *Длина типа* A обозначается $\|A\|$ и определяется как суммарное количество вхождений примитивных типов и знаков бинарных операций в A:

$$\|p_i\| \rightleftharpoons 1,$$
$$\|A \cdot B\| \rightleftharpoons \|A\| + \|B\| + 1,$$
$$\|A \backslash B\| \rightleftharpoons \|A\| + \|B\| + 1,$$
$$\|A / B\| \rightleftharpoons \|A\| + \|B\| + 1.$$

4.2 Устранимость сечения

Приведём схему доказательства теоремы об устранимости сечения (см. [3]).
Теорема 4.5 (Ламбек). *Любую секвенцию, выводимую в исчислении Ламбека, можно вывести без использования правила* (cut).

Доказательство. Докажем индукцией по $\|\Phi\| + \|\Upsilon\| + \|\Psi\| + \|F\| + \|E\|$, что если секвенции $\Upsilon \to F$ и $\Phi F \Psi \to E$ выводимы в исчислении Ламбека без использования правила (cut), то секвенция $\Phi \Upsilon \Psi \to E$ тоже выводима без использования правила (cut). Надо рассмотреть несколько случаев.

Случай 1: $\Upsilon \to F$ является аксиомой.

Тогда заключение правила сечения совпадает с посылкой $\Phi F \Psi \to E$.

Случай 2: последним правилом в выводе секвенции $\Upsilon \to F$ является правило $(\backslash \to)$ и тип F не является главным типом этого правила.

Дано

$$\dfrac{\dfrac{\Pi \to A \quad \Gamma B \Delta \to F}{\Gamma \Pi (A\backslash B)\Delta \to F}\,(\backslash \to) \qquad \Phi F \Psi \to E}{\Phi \Gamma \Pi (A\backslash B)\Delta \Psi \to E}\,(\mathrm{cut}).$$

Перестроим вывод так:

$$\dfrac{\Pi \to A \qquad \dfrac{\Gamma B \Delta \to F \quad \Phi F \Psi \to E}{\Phi \Gamma B \Delta \Psi \to E}\,(\mathrm{cut})}{\Phi \Gamma \Pi (A\backslash B)\Delta \Psi \to E}\,(\backslash \to).$$

Случай 3: В последних правилах выводов секвенций $\Upsilon \to F$ и $\Phi F \Psi \to E$ вводится главная связка для типа $F = A\backslash B$.

Дано

$$\dfrac{\dfrac{A\Upsilon \to B}{\Upsilon \to A\backslash B}\,(\to \backslash) \qquad \dfrac{\Pi \to A \quad \Gamma B \Delta \to E}{\Gamma \Pi (A\backslash B)\Delta \to E}\,(\backslash \to)}{\Gamma \Pi \Upsilon \Delta \to E}\,(\mathrm{cut}).$$

Перестроим вывод так:

$$\dfrac{\Pi \to A \qquad \dfrac{A\Upsilon \to B \quad \Gamma B \Delta \to E}{\Gamma A \Upsilon \Delta \to E}\,(\mathrm{cut})}{\Gamma \Pi \Upsilon \Delta \to E}\,(\mathrm{cut}).$$

В остальных случаях вывод перестраивается аналогичным образом. □

Пример 4.6. Рассмотрим вывод

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{p/q, q/r \to p/r} \quad p \to p}{p/q, q/r, (p/r)\backslash p \to p}\,(\backslash \to) \qquad \dfrac{\vdots}{p \to (s/p)\backslash s}}{p/q, q/r, (p/r)\backslash p \to (s/p)\backslash s}\,(\mathrm{cut}),$$

где p, q, r, s — примитивные типы и многоточиями обозначены конструкции из ответов упражнений 4.2 и 4.3. Алгоритм из доказательства теоремы 4.5 применяется к этому выводу следующим образом. Преобразование из случая 2 приведёт к выводу

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{p/q, q/r \to p/r} \qquad \dfrac{p \to p \quad \dfrac{\vdots}{p \to (s/p)\backslash s}}{p \to (s/p)\backslash s}\,(\mathrm{cut})}{p/q, q/r, (p/r)\backslash p \to (s/p)\backslash s}\,(\backslash \to).$$

Далее, преобразование из случая 1 приведёт к искомому выводу

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{p/q, q/r \to p/r} \quad \dfrac{\vdots}{p \to (s/p)\backslash s}}{p/q, q/r, (p/r)\backslash p \to (s/p)\backslash s}\,(\backslash \to).$$

Пример 4.7. Рассмотрим вывод

$$\dfrac{\dfrac{t \to t \quad p/q \to p/q}{t, t\backslash(p/q) \to p/q}\,(\backslash \to) \qquad \dfrac{\vdots}{p/q, q/r, (p/r)\backslash p \to (s/p)\backslash s}}{t, t\backslash(p/q), q/r, (p/r)\backslash p \to (s/p)\backslash s}\,(\mathrm{cut}),$$

где p, q, r, s, t — примитивные типы и многоточием обозначен вывод без сечения, построенный в примере 4.6. Алгоритм из доказательства теоремы 4.5 применяется к этому выводу следующим образом. Преобразование из случая 2 приведёт к выводу

$$\dfrac{t \to t \qquad \dfrac{p/q \to p/q \quad \dfrac{\vdots}{p/q, q/r, (p/r)\backslash p \to (s/p)\backslash s}}{p/q, q/r, (p/r)\backslash p \to (s/p)\backslash s}\,(\mathrm{cut})}{t, t\backslash(p/q), q/r, (p/r)\backslash p \to (s/p)\backslash s}\,(\backslash \to).$$

Далее, преобразование из случая 1 приведёт к искомому выводу

$$\dfrac{t \to t \quad \dfrac{\vdots}{p/q, q/r, (p/r)\backslash p \to (s/p)\backslash s}}{t, t\backslash(p/q), q/r, (p/r)\backslash p \to (s/p)\backslash s}\ (\backslash \to).$$

Пример 4.8. Рассмотрим вывод

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{p/q, q/r \to p/r} \quad p \to p}{p/q, q/r, (p/r)\backslash p \to p}\ (\backslash \to)}{q/r, (p/r)\backslash p \to (p/q)\backslash p}\ (\to \backslash) \quad \dfrac{\dfrac{t \to t \quad p/q \to p/q}{t, t\backslash(p/q) \to p/q}\ (\backslash \to) \quad \dfrac{\vdots}{p \to (s/p)\backslash s}}{t, t\backslash(p/q), (p/q)\backslash p \to (s/p)\backslash s}\ (\backslash \to)}{t, t\backslash(p/q), q/r, (p/r)\backslash p \to (s/p)\backslash s}\ (\mathrm{cut}),$$

где p, q, r, s, t — примитивные типы и многоточиями обозначены конструкции из ответов упражнений 4.2 и 4.3. Алгоритм устранения сечения из доказателсьтва теоремы 4.5 применяется к этому выводу следующим образом. Преобразование из случая 3 приведёт к выводу

$$\dfrac{\dfrac{t \to t \quad p/q \to p/q}{t, t\backslash(p/q) \to p/q}\ (\backslash \to) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{p/q, q/r \to p/r} \quad p \to p}{p/q, q/r, (p/r)\backslash p \to p}\ (\backslash \to) \quad \dfrac{\vdots}{p \to (s/p)\backslash s}}{p/q, q/r, (p/r)\backslash p \to (s/p)\backslash s}\ (\mathrm{cut})}{t, t\backslash(p/q), q/r, (p/r)\backslash p \to (s/p)\backslash s}\ (\mathrm{cut}).$$

Остаётся устранить верхнее сечение (это сделано в примере 4.6), а затем нижнее сечение (это сделано в примере 4.7). В результате получим искомый вывод

$$\dfrac{t \to t \quad \dfrac{\dfrac{\vdots}{p/q, q/r \to p/r} \quad \dfrac{\vdots}{p \to (s/p)\backslash s}}{p/q, q/r, (p/r)\backslash p \to (s/p)\backslash s}\ (\backslash \to)}{t, t\backslash(p/q), q/r, (p/r)\backslash p \to (s/p)\backslash s}\ (\backslash \to).$$

4.3 Примеры выводов

Упражнение 4.9. Выводима ли секвенция $(p_2/p_1)p_1(p_1\backslash p_1) \to p_2$?
Упражнение 4.10. Всегда ли в исчислении Ламбека выводима секвенция $(A \cdot B) \cdot C \to A \cdot (B \cdot C)$?
Упражнение 4.11. Всегда ли в исчислении Ламбека выводима секвенция $(A \cdot B)\backslash C \to A\backslash(B\backslash C)$?
Упражнение 4.12. Всегда ли в исчислении Ламбека выводима секвенция $(B \cdot A)\backslash C \to A\backslash(B\backslash C)$?
Упражнение 4.13. Всегда ли в исчислении Ламбека выводима секвенция $A\backslash(B\backslash C) \to (B \cdot A)\backslash C$?
Определение 4.14. Если $\mathrm{L} \vdash A \to B$ и $\mathrm{L} \vdash B \to A$, то пишем $A \leftrightarrow B$.
Упражнение 4.15. Верно ли, что $A\backslash(B\backslash C) \leftrightarrow (B \cdot A)\backslash C$?
Упражнение 4.16. Верно ли, что $A\backslash(B/C) \leftrightarrow (A\backslash B)/C$?
Упражнение 4.17. Всегда ли в исчислении Ламбека выводима секвенция $(A\backslash B) \cdot C \to A\backslash(B \cdot C)$?
Упражнение 4.18. Всегда ли в исчислении Ламбека выводима секвенция $A\backslash(B \cdot C) \to (A\backslash B) \cdot C$?
Упражнение 4.19. Всегда ли в исчислении Ламбека выводима секвенция $A/(B\backslash C) \to (A/B)\backslash C$?
Упражнение 4.20. Всегда ли в исчислении Ламбека выводима секвенция $A \to B/(A\backslash B)$?
Упражнение 4.21. Всегда ли в исчислении Ламбека выводима секвенция $B/(A\backslash B) \to A$?
Упражнение 4.22. Всегда ли верно, что $A \cdot (A\backslash(A \cdot B)) \leftrightarrow A \cdot B$?
Упражнение 4.23. Верно ли, что $\mathrm{L} \vdash p_1/p_1, p_1, p_1\backslash p_1 \to p_1$?
Упражнение 4.24. Верно ли, что $\mathrm{L} \vdash p_1/p_1, p_2, p_2\backslash p_1 \to p_1$?
Упражнение 4.25. Верно ли, что $\mathrm{L} \vdash p_1/p_3, p_3, p_1\backslash p_1 \to p_1$?
Упражнение 4.26. Верно ли, что $\mathrm{L} \vdash p_1/p_1, p_1, p_1\backslash p_2 \to p_2$?
Упражнение 4.27. Верно ли, что $\mathrm{L} \vdash ((p_1/p_1)\backslash p_1)\backslash p_1 \to p_1\backslash p_1$?
Упражнение 4.28. Верно ли, что $\mathrm{L} \vdash p_1/((p_1/p_1)\backslash p_1) \to p_1/p_1$?

Упражнение 4.29. Верно ли, что $\mathrm{L} \vdash ((p_2/p_1)\backslash p_2)\backslash p_3 \to p_1\backslash p_3$?
Упражнение 4.30. Верно ли, что $\mathrm{L} \vdash p_1/((p_4/p_3)\backslash p_4) \to p_1/p_3$?
Упражнение 4.31. Верно ли, что $\mathrm{L} \vdash (p_2/(p_4\backslash p_2))\backslash p_3 \to p_4\backslash p_3$?
Упражнение 4.32. Верно ли, что $\mathrm{L} \vdash p_2/(p_1/(p_3\backslash p_1)) \to p_2/p_3$?
Упражнение 4.33. Верно ли, что $\mathrm{L} \vdash p_1/p_2 \to (p_1/(p_3\backslash p_2))/p_3$?
Упражнение 4.34. Верно ли, что $\mathrm{L} \vdash p_1\backslash p_2 \to p_3\backslash((p_1/p_3)\backslash p_2)$?
Упражнение 4.35. Верно ли, что $\mathrm{L} \vdash p_2/p_2 \to (p_2/(p_2\backslash p_2))/p_2$?
Упражнение 4.36. Верно ли, что $\mathrm{L} \vdash p_3\backslash p_3 \to p_3\backslash((p_3/p_3)\backslash p_3)$?
Упражнение 4.37. Верно ли, что $\mathrm{L} \vdash p_3/p_3 \to p_3/((p_3/p_3)\backslash p_3)$?
Упражнение 4.38. Верно ли, что $\mathrm{L} \vdash p_3/((p_3/p_3)\backslash p_3) \to p_3/p_3$?
Упражнение 4.39. Верно ли, что $\mathrm{L} \vdash p_1\backslash p_1 \to (p_1/(p_1\backslash p_1))\backslash p_1$?
Упражнение 4.40. Верно ли, что $\mathrm{L} \vdash (p_1/(p_1\backslash p_1))\backslash p_1 \to p_1\backslash p_1$?
Упражнение 4.41. Верно ли, что $\mathrm{L} \vdash p_1/(p_1 \cdot p_2), p_1, p_2, p_1\backslash p_1 \to p_1$?
Упражнение 4.42. Верно ли, что $\mathrm{L} \vdash p_1, p_1/p_1, p_2, p_2\backslash p_1 \to p_1 \cdot p_1$?
Упражнение 4.43. Верно ли, что $\mathrm{L} \vdash p_3, p_1/p_3, p_3, p_1\backslash p_1 \to p_3 \cdot p_1$?
Упражнение 4.44. Верно ли, что $\mathrm{L} \vdash p_1/p_1, p_1, p_1\backslash(p_2 \cdot (p_2\backslash p_2)) \to p_2$?
Упражнение 4.45. Верно ли, что $\mathrm{L} \vdash ((p_1/p_1)\backslash p_1)\backslash p_1, p_2 \to p_1\backslash(p_1 \cdot p_2)$?
Упражнение 4.46. Верно ли, что $\mathrm{L} \vdash p_1, p_1/((p_1/p_1)\backslash p_1) \to (p_1 \cdot p_1)/p_1$?
Упражнение 4.47. Верно ли, что $\mathrm{L} \vdash ((p_2/p_1)\backslash p_2)\backslash p_3 \to (p_1\backslash p_1)\backslash(p_1\backslash p_3)$?
Упражнение 4.48. Верно ли, что $\mathrm{L} \vdash p_2, p_1/((p_4/p_3)\backslash p_4) \to p_2 \cdot (p_1/p_3)$?
Упражнение 4.49. Верно ли, что $\mathrm{L} \vdash (p_2/(p_1\backslash(p_4\backslash p_2)))\backslash p_3 \to (p_4 \cdot p_1)\backslash p_3$?
Упражнение 4.50. Верно ли, что $\mathrm{L} \vdash p_2/((p_1/(p_1\backslash p_1))/(p_3\backslash p_1)) \to p_2/p_3$?
Упражнение 4.51. Верно ли, что $\mathrm{L} \vdash p_1, p_1/p_2 \to ((p_1 \cdot p_1)/(p_3\backslash p_2))/p_3$?
Упражнение 4.52. Верно ли, что $\mathrm{L} \vdash p_1\backslash(p_1 \cdot p_2) \to p_3\backslash((p_1/p_3)\backslash(p_1 \cdot p_2))$?
Упражнение 4.53. Верно ли, что $\mathrm{L} \vdash p_1, p_2/p_2 \to (p_1 \cdot (p_2/(p_2\backslash p_2)))/p_2$?
Упражнение 4.54. Верно ли, что $\mathrm{L} \vdash p_3\backslash p_3, p_3 \to (p_3\backslash((p_3/p_3)\backslash p_3)) \cdot p_3$?
Упражнение 4.55. Верно ли, что $\mathrm{L} \vdash p_3/p_3, p_2 \to (p_3/((p_3/p_3)\backslash p_3)) \cdot p_2$?
Упражнение 4.56. Верно ли, что $\mathrm{L} \vdash p_1, p_3/((p_3/p_3)\backslash p_3) \to (p_1 \cdot p_3)/p_3$?
Упражнение 4.57. Верно ли, что $\mathrm{L} \vdash (p_1\backslash p_1) \cdot p_2 \to (p_1/(p_1\backslash p_1))\backslash(p_1 \cdot p_2)$?
Упражнение 4.58. Верно ли, что $\mathrm{L} \vdash ((p_1/(p_1\backslash p_1))\backslash p_1) \cdot p_3 \to p_1\backslash(p_1 \cdot p_3)$?
Упражнение 4.59. Следует ли из $\mathrm{L} \vdash A \to B$ и $\mathrm{L} \vdash B \to C$, что $\mathrm{L} \vdash A/((B/p_1)\backslash C) \to (A/(B/p_1))\backslash C$?

4.4 Обратимость правил $(\to \backslash)$, $(\to /)$ и $(\cdot \to)$

Лемма 4.60. *Если* $\mathrm{L} \vdash \Pi \to A\backslash B$, *то* $\mathrm{L} \vdash A, \Pi \to B$.

Доказательство.

$$\dfrac{\Pi \to A\backslash B \qquad \dfrac{A \to A \quad B \to B}{A, (A\backslash B) \to B}\,(\backslash \to)}{A, \Pi \to B}\,(\mathrm{cut}).$$

□

Лемма 4.61. *Если* $\mathrm{L} \vdash \Pi \to B/A$, *то* $\mathrm{L} \vdash \Pi, A \to B$.

Доказательство.

$$\dfrac{\Pi \to B/A \qquad \dfrac{A \to A \quad B \to B}{(B/A), A \to B}\,(/ \to)}{\Pi, A \to B}\,(\mathrm{cut}).$$

□

Лемма 4.62. *Если* $\mathrm{L} \vdash \Gamma, (A \cdot B), \Delta \to C$, *то* $\mathrm{L} \vdash \Gamma, A, B, \Delta \to C$.

Доказательство.

$$\cfrac{\cfrac{A \to A \quad B \to B}{A, B \to A \cdot B}\ (\to \cdot) \qquad \Gamma, (A \cdot B), \Delta \to C}{\Gamma, A, B, \Delta \to C}\ (\text{cut}).$$

□

4.5 Двойственность

Определение 4.63. Определим отображение $\mathrm{dual}\colon \mathrm{Tp} \to \mathrm{Tp}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{dual}(p_i) &\rightleftharpoons p_i \\
\mathrm{dual}(A \cdot B) &\rightleftharpoons \mathrm{dual}(B) \cdot \mathrm{dual}(A) \\
\mathrm{dual}(A \backslash B) &\rightleftharpoons \mathrm{dual}(B) / \mathrm{dual}(A) \\
\mathrm{dual}(A / B) &\rightleftharpoons \mathrm{dual}(B) \backslash \mathrm{dual}(A)
\end{aligned}$$

Упражнение 4.64. Вычислить $\mathrm{dual}(p_1/p_2)$.
Упражнение 4.65. Вычислить $\mathrm{dual}(p_4 \cdot (p_1 \backslash p_1))$.
Упражнение 4.66. Всегда ли верно $\mathrm{dual}(\mathrm{dual}(A)) = A$?
Лемма 4.67. *Если* $\mathrm{L} \vdash \Gamma \to A$, *то* $\mathrm{L} \vdash \mathrm{dual}(\Gamma) \to \mathrm{dual}(A)$.

Доказательство. Заменим в выводе каждую секвенцию $\Phi \to B$ на $\mathrm{dual}(\Phi) \to \mathrm{dual}(B)$. □

Упражнение 4.68. Всегда ли в исчислении Ламбека выводима секвенция $C/(A \cdot B) \to (C/B)/A$?
Упражнение 4.69. Всегда ли в исчислении Ламбека выводима секвенция $A \to (B/A) \backslash B$?

4.6 Несколько допустимых правил

Лемма 4.70.

1. *Если* $\mathrm{L} \vdash A \to B$, *то* $\mathrm{L} \vdash A \cdot C \to B \cdot C$.
2. *Если* $\mathrm{L} \vdash A \to B$, *то* $\mathrm{L} \vdash C \cdot A \to C \cdot B$.
3. *Если* $\mathrm{L} \vdash A \to B$, *то* $\mathrm{L} \vdash A/C \to B/C$.
4. *Если* $\mathrm{L} \vdash A \to B$, *то* $\mathrm{L} \vdash C \backslash A \to C \backslash B$.
5. *Если* $\mathrm{L} \vdash A \to B$, *то* $\mathrm{L} \vdash C/B \to C/A$.
6. *Если* $\mathrm{L} \vdash A \to B$, *то* $\mathrm{L} \vdash B \backslash C \to A \backslash C$.

Упражнение 4.71. Всегда ли верно, что $B/((B/A)\backslash B) \leftrightarrow B/A$?
Упражнение 4.72. Существуют ли такие типы A, B и C, что $\mathrm{L} \vdash A/(B \backslash C) \to (A/B) \backslash C$?
Упражнение 4.73. Допустимо ли правило “если $\mathrm{L} \vdash C \cdot A \to C \cdot B$, то $\mathrm{L} \vdash A \to B$”?
Упражнение 4.74. Верно ли, что $\mathrm{L} \vdash ((p_1/p_2)\backslash p_1)\backslash p_3 \to (p_1 \backslash p_2)\backslash(p_1 \backslash p_3)$?
Упражнение 4.75. Верно ли, что $\mathrm{L} \vdash ((p_1/p_2)\backslash p_1)\backslash p_3 \to (p_1 \backslash p_1)\backslash(p_2 \backslash p_3)$?

5 Грамматики Ламбека без семантической составляющей

5.1 Определение

Определение 5.1. *Грамматика Ламбека* есть тройка $\langle \Sigma, H, \triangleright \rangle$, где Σ — некоторое конечное множество (алфавит), H — тип исчисления Ламбека и $\triangleright$ — некоторое конечное бинарное отношение $\triangleright \subset \mathrm{Tp} \times \Sigma$.
Определение 5.2. *Язык, порождаемый грамматикой Ламбека* $\langle \Sigma, H, \triangleright \rangle$, определяется как множество всех непустых слов $t_1 \ldots t_n$ в алфавите Σ, для которых существует такая выводимая в исчислении Ламбека секвенция $B_1, \ldots, B_n \to H$, что для любого $i \le n$ выполняется $B_i \triangleright t_i$. Обозначим этот язык через $\mathcal{L}_L(\Sigma, H, \triangleright)$.

5.2 Грамматика Ламбека для фрагмента английского языка

[3], [20, с. 125–137]

Пример 5.3.

$$\begin{aligned}
np &\triangleright John\\
np &\triangleright Mary\\
(np\backslash s)/np &\triangleright likes\\
(s\backslash s)/s &\triangleright or\\
(np\backslash np)/np &\triangleright or\\
np\backslash s &\triangleright works\\
np/np &\triangleright poor\\
s\backslash s &\triangleright here\\
(np\backslash s)/(np\backslash s) &\triangleright never\\
(s\backslash s)/np &\triangleright for
\end{aligned}$$

Упражнение 5.4. Соответствует ли приведённой грамматике фраза “John never likes Mary”?

5.3 Математические примеры грамматик Ламбека

Упражнение 5.5. Рассмотрим грамматику $\langle \Sigma, H, \triangleright\rangle$, где $\Sigma = \{a, b, c\}$, $H = p_1$, $p_2/p_1 \triangleright a$, $p_2\backslash p_1 \triangleright b$, $p_1 \triangleright c$. Является ди бесконечным язык $\mathcal{L}_L(\Sigma, H, \triangleright)$?
Упражнение 5.6. Найти грамматику Ламбека для языка a^*b.
Упражнение 5.7. Найти грамматику Ламбека для языка $a(bc)^*$.
Упражнение 5.8. Найти порождающую грамматику, эквивалентную грамматике Ламбека $\langle \Sigma, H, \triangleright\rangle$, где $\Sigma = \{a, b\}$, $H = p_1\backslash p_1$, $p_1 \triangleright a$, $(p_1 \cdot p_1)\backslash p_1 \triangleright b$.
Упражнение 5.9. Найти порождающую грамматику, эквивалентную грамматике Ламбека $\langle \Sigma, H, \triangleright\rangle$, где $\Sigma = \{a, b\}$, $H = np$, $(np/n) \triangleright a$, $(np/n) \triangleright \mathit{the}$, $(n/n) \triangleright \mathit{green}$, $(n/n) \triangleright \mathit{furious}$, $n \triangleright \mathit{table}$, $n \triangleright \mathit{idea}$.

6 Модели исчисления Ламбека

6.1 Полугруппы, моноиды и группы

Определение 6.1. Группоид — $\langle M, *\rangle$, где M — непустое множество и $*\colon M \times M \to M$.
Определение 6.2. Полугруппа — группоид $\langle M, *\rangle$, где операция $*$ ассоциативна (т. е. $(\forall a, b, c \in M)\, (a * b) * c = a * (b * c)$).
Упражнение 6.3. Является ли полугруппой $\langle \mathbb{R}, \star\rangle$, где $x \star y \rightleftharpoons 2xy$?
Упражнение 6.4. Является ли полугруппой $\langle \mathbb{R}, \star\rangle$, где $x \star y \rightleftharpoons \frac{xy}{3}$?
Упражнение 6.5. Является ли полугруппой $\langle \mathbb{R}, \star\rangle$, где $x \star y \rightleftharpoons \frac{5}{xy}$?
Определение 6.6. Единицей в полугруппе $\langle M, *\rangle$ называется такой элемент e, что $(\forall a \in M)\, e * a = a = a * e$.
Определение 6.7. Моноид — $\langle M, *, e\rangle$, где $\langle M, *\rangle$ — полугруппа и e — единица в этой полугруппе.
Определение 6.8. Группа — $\langle M, *, e, (\ )^{-1}\rangle$, где $\langle M, *, e\rangle$ — моноид, $(\ )^{-1}\colon M \to M$ и $(\forall a \in M)\, a^{-1} * a = e = a * a^{-1}$.
Упражнение 6.9. Является ли полугруппой $\langle \Sigma^+, \circ\rangle$?
Определение 6.10. Свободная полугруппа — $\langle \Sigma^+, \circ\rangle$.
Упражнение 6.11. Является ли полугруппой $\langle \Sigma^*, \circ\rangle$?
Определение 6.12. Свободный моноид — $\langle \Sigma^*, \circ, \varepsilon\rangle$.
Упражнение 6.13. Является ли полугруппой $\langle \mathbb{R}, \star\rangle$, где $x \star y \rightleftharpoons \frac{xy}{3}$?
Упражнение 6.14. Является ли полугруппой $\langle \mathbb{R}, \star\rangle$, где $x \star y \rightleftharpoons \frac{5}{xy}$?
Упражнение 6.15. Является ли полугруппой $\langle \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \star\rangle$, где $\langle a, b\rangle \star \langle c, d\rangle \rightleftharpoons \langle ac - bd, ad + bc\rangle$?
Упражнение 6.16. Является ли полугруппой $\langle \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \star\rangle$, где $\langle a, b\rangle \star \langle c, d\rangle \rightleftharpoons \langle ac - bd, ad - bc\rangle$?

Ответ 6.16. Нет.

$$\begin{aligned}\langle 0,1\rangle \star \langle 1,0\rangle &= \langle 0,-1\rangle\\ \langle 0,-1\rangle \star \langle 0,1\rangle &= \langle 1,0\rangle\\ (\langle 0,1\rangle \star \langle 1,0\rangle) \star \langle 0,1\rangle &= \langle 1,0\rangle\\ \langle 1,0\rangle \star \langle 0,1\rangle &= \langle 0,1\rangle\\ \langle 0,1\rangle \star \langle 0,1\rangle &= \langle -1,0\rangle\\ \langle 0,1\rangle \star (\langle 1,0\rangle \star \langle 0,1\rangle) &= \langle -1,0\rangle\end{aligned}$$

Упражнение 6.17. Является ли полугруппой $\langle \mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\star\rangle$, где $\langle a,b\rangle \star \langle c,d\rangle \rightleftharpoons \langle ac+bd, ad+bc\rangle$?
Упражнение 6.18. Является ли полугруппой $\langle \mathbb{Q},\star\rangle$, где $a\star b \rightleftharpoons a$?

6.2 Умножение и деление формальных языков

Определение 6.19. Пусть $\mathcal{A},\mathcal{B}\subseteq\Sigma^+$.

$$\mathcal{A}\cdot\mathcal{B} \rightleftharpoons \{u\circ v \mid u\in\mathcal{A},\ v\in\mathcal{B}\}$$

Упражнение 6.20. Вычислить $\{a^n b^m \mid m\geq n\geq 1\}\cdot\{b^k \mid k\geq 1\}$.
Упражнение 6.21. Вычислить $\{a^n b^m \mid m\geq n\geq 1\}\cdot\{a^k \mid k\geq 1\}$.
Упражнение 6.22. Вычислить $\mathcal{A}\cdot\varnothing$.
Определение 6.23. Пусть $\mathcal{A},\mathcal{B}\subseteq\Sigma^+$.

$$\mathcal{A}\backslash\mathcal{B} \rightleftharpoons \{v\in\Sigma^+ \mid (\forall u\in\mathcal{A})\, u\circ v\in\mathcal{B}\}$$

Определение 6.24. Пусть $\mathcal{A},\mathcal{B}\subseteq\Sigma^+$.

$$\mathcal{B}/\mathcal{A} \rightleftharpoons \{v\in\Sigma^+ \mid (\forall u\in\mathcal{A})\, v\circ u\in\mathcal{B}\}$$

Упражнение 6.25. Пусть $\Sigma=\{a,b\}$. Вычислить $\{ba,baa,bba,bbaa\}/\{a,aa\}$.
Упражнение 6.26. Пусть $\Sigma=\{a,b\}$. Вычислить $\{ba,baa,bba,bbaa,bbbaa\}/\{a,aa\}$.
Упражнение 6.27. Пусть $\Sigma=\{a,b\}$. Вычислить $\{b,bb\}\backslash\{ba,baa,bba,bbaa,bbbaa\}$.
Упражнение 6.28. Пусть $\Sigma=\{a,b\}$. Вычислить $\{aa,aba,abba\}/\{a,ba\}$.
Упражнение 6.29. Пусть $\Sigma=\{a,b\}$. Вычислить $\{aa,aba,abba\}/\{a,ab\}$.
Упражнение 6.30. Пусть $\Sigma=\{a,b\}$. Вычислить $\{aa,aba,abba\}/\varnothing$.
Упражнение 6.31. Всегда ли верно $(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})\cdot\mathcal{C}=\mathcal{A}\cdot(\mathcal{B}\cdot\mathcal{C})$?
Упражнение 6.32. Всегда ли верно $(\mathcal{B}/\mathcal{A})\cdot\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$?
Упражнение 6.33. Всегда ли верно $\mathcal{B}\subseteq(\mathcal{B}/\mathcal{A})\cdot\mathcal{A}$?
Упражнение 6.34. Всегда ли верно $(\mathcal{A}\backslash\mathcal{B})\cdot\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$?
Упражнение 6.35. Всегда ли верно $(\mathcal{B}/\mathcal{A})\backslash\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A}$?
Упражнение 6.36. Всегда ли верно $\mathcal{B}\subseteq(\mathcal{A}\backslash\mathcal{A})\backslash\mathcal{B}$?
Упражнение 6.37. Всегда ли верно $\mathcal{A}\subseteq(\mathcal{A}/(\mathcal{A}/\mathcal{A}))/(\mathcal{A}/\mathcal{A})$?

6.3 Свойства умножения и деления формальных языков

Лемма 6.38. $(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})\cdot\mathcal{C}=\mathcal{A}\cdot(\mathcal{B}\cdot\mathcal{C})$
Лемма 6.39.

1. *Если $\mathcal{A}_1\subseteq\mathcal{A}_2$, то $\mathcal{A}_1\cdot\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A}_2\cdot\mathcal{B}$.*
2. *Если $\mathcal{B}_1\subseteq\mathcal{B}_2$, то $\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}_1\subseteq\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}_2$.*

Лемма 6.40. *Если $\mathcal{A}_1\subseteq\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{B}_1\subseteq\mathcal{B}_2$, то $\mathcal{A}_1\cdot\mathcal{B}_1\subseteq\mathcal{A}_2\cdot\mathcal{B}_2$.*
Лемма 6.41.

1. *$\mathcal{C}\subseteq\mathcal{B}/\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{C}\cdot\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$.*
2. *$\mathcal{C}\subseteq\mathcal{A}\backslash\mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}\cdot\mathcal{C}\subseteq\mathcal{B}$.*

Доказательство.

$$\mathcal{C}\subseteq\mathcal{B}/\mathcal{A} \iff \mathcal{C}\subseteq\{v\in\Sigma^+ \mid (\forall u\in\mathcal{A})\, u\circ v\in\mathcal{B}\} \iff (\forall v\in\mathcal{C})\,(\forall u\in\mathcal{A})\, u\circ v\in\mathcal{B}\} \iff \mathcal{C}\cdot\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$$

□

Лемма 6.42.
1. $(\mathcal{B}/\mathcal{A}) \cdot \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$
2. $\mathcal{A} \cdot (\mathcal{A}\backslash\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{B}$

Доказательство. По лемме 6.41 из $\mathcal{B}/\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}/\mathcal{A}$ следует, что $(\mathcal{B}/\mathcal{A}) \cdot \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. □

Лемма 6.43. *Если* $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$, *то* $\mathcal{B}_1/\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}_2/\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{A}\backslash\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{A}\backslash\mathcal{B}_2$.
Лемма 6.44. *Если* $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$, *то* $\mathcal{B}/\mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{B}/\mathcal{A}_1$ *и* $\mathcal{A}_2\backslash\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}_1\backslash\mathcal{B}$.
Лемма 6.45. $(\mathcal{A}\backslash\mathcal{B})/\mathcal{C} = \mathcal{A}\backslash(\mathcal{B}/\mathcal{C})$
Лемма 6.46.
1. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}/(\mathcal{A}\backslash\mathcal{B})$
2. $\mathcal{A} \subseteq (\mathcal{B}/\mathcal{A})\backslash\mathcal{B}$

6.4 Определение языковой модели

Определение 6.47. L-*модель* (языкова́я модель) — $\langle\Sigma, v\rangle$, где Σ — произвольное непустое множество, $v\colon \mathrm{Pr} \to \mathcal{P}(\Sigma^+)$.

Для данной L-модели определим функции $\bar{v}\colon \mathrm{Tp} \to \mathcal{P}(\Sigma^+)$ и $\vec{v}\colon \mathrm{Tp}^+ \to \mathcal{P}(\Sigma^+)$ следующим образом.

$$\begin{aligned}
\bar{v}(p_i) &\rightleftharpoons v(p_i) \\
\bar{v}(A \cdot B) &\rightleftharpoons \bar{v}(A) \cdot \bar{v}(B) \\
\bar{v}(A\backslash B) &\rightleftharpoons \bar{v}(A)\backslash\bar{v}(B) \\
\bar{v}(A/B) &\rightleftharpoons \bar{v}(A)/\bar{v}(B) \\
\vec{v}(A_1, \ldots, A_n) &\rightleftharpoons \bar{v}(A_1) \cdot \ldots \cdot \bar{v}(A_n)
\end{aligned}$$

Упражнение 6.48. Обозначим $s \rightleftharpoons p_1$, $np \rightleftharpoons p_2$. Найти $\bar{v}(np\backslash s)$, если $\Sigma = \{j, m, l\}$, $v(s) = \{jlm, mlm, jlj, mlj\}$, $v(np) = \{j, m\}$.

Вместо $\bar{v}$ и $\vec{v}$ будем писать просто v.
Упражнение 6.49. Найти $v(np\backslash s)$, если $\Sigma = \{j, m, h, l\}$, $v(s) = \{jlm, mlm, hlm, jlj, mlj, hlj\}$, $v(np) = \{j, m\}$.
Упражнение 6.50. Найти $v(np\backslash s)$, если $\Sigma = \{j, m, h, l\}$, $v(s) = \{jlm, hlm, mlj, mlm\}$, $v(np) = \{j, m\}$.
Упражнение 6.51. Найти $v(s/(np\backslash s))$, если $\Sigma = \{j, m, h, l\}$, $v(s) = \{jlm, mlm, hlm, jlj, mlj, hlj\}$, $v(np) = \{j, m\}$.
Определение 6.52. Секвенция $\Gamma \to A$ является *истинной* в L-модели $\langle\Sigma, v\rangle$, если $v(\Gamma) \subseteq v(A)$.
Упражнение 6.53. Истинна ли секвенция $s/(np\backslash s) \to np$ в модели $\langle\Sigma, v\rangle$, если $\Sigma = \{j, m, l\}$, $v(s) = \{jlj, jlm, mlj, mlm\}$, $v(np) = \{j, m\}$?
Упражнение 6.54. Истинна ли секвенция $s/(np\backslash s) \to np$ в модели $\langle\Sigma, v\rangle$, если $\Sigma = \{j, m, h, l\}$, $v(s) = \{jlm, mlm, hlm, jlj, mlj, hlj\}$, $v(np) = \{j, m\}$?
Упражнение 6.55. Истинна ли секвенция $(s/np)\backslash s \to np$ в модели $\langle\Sigma, v\rangle$, если $\Sigma = \{j, m, h, l\}$, $v(s) = \{jlm, mlm, hlm, jlj, mlj, hlj\}$, $v(np) = \{j, m\}$?

6.5 Корректность исчисления Ламбека

Теорема 6.56 (О корректности). *Если* $\mathrm{L} \vdash \Gamma \to A$, *то секвенция* $\Gamma \to A$ *истинна в каждой* L-*модели.*

Пусть $\langle\Sigma, v\rangle$ — неоторая L-модель. Продолжим функцию v на множество Tp^*, положив $v(\Lambda) \rightleftharpoons \{\varepsilon\}$.
Лемма 6.57. *Для любых последовательностей* $\Gamma \in \mathrm{Tp}^*$ *и* $\Delta \in \mathrm{Tp}^*$ *имеет место равенство* $v(\Gamma) \cdot v(\Delta) = v(\Gamma, \Delta)$.

Доказательство теоремы 6.56. Индукция по длине вывода. □

6.6 Полнота исчисления Ламбека

Теорема 6.58 (о полноте, без доказательства). *Если секвенция* $\Gamma \to A$ *истинна в каждой* L-*модели, то* $\mathrm{L} \vdash \Gamma \to A$.

6.7 Каноническая модель исчисления $\mathrm{L}(\backslash, /)$

Определение 6.59. Обозначим через $\mathrm{Tp}(\backslash, /)$ множество всех типов, не содержащих операцию $\cdot$.
Определение 6.60. *Исчислением Ламбека без умножения* (обозначение — $\mathrm{L}(\backslash, /)$) называется результат исключения операции $\cdot$ из исчисления L.
Лемма 6.61. *Пусть* $\Gamma \in \mathrm{Tp}(\backslash, /)^+$ *и* $A \in \mathrm{Tp}(\backslash, /)$. *Тогда утверждения* $\mathrm{L} \vdash \Gamma \to A$ *и* $\mathrm{L}(\backslash, /) \vdash \Gamma \to A$ *равносильны.*

Доказательство. Следует из устранимости сечения. □

Определение 6.62. Канонической моделью исчисления $\mathrm{L}(\backslash, /)$ называется L-модель $\langle \Sigma, v \rangle$, где $\Sigma = \mathrm{Tp}(\backslash, /)$ и $u(p_i) = \{\Gamma \in \mathrm{Tp}(\backslash, /)^+ \mid \mathrm{L} \vdash \Gamma \to p_i\}$.
Лемма 6.63. *Пусть* $\Gamma \in \mathrm{Tp}(\backslash, /)^+$ *и* $A \in \mathrm{Tp}(\backslash, /)$. *Тогда утверждения* $\Gamma \in u(A)$ *и* $\mathrm{L} \vdash \Gamma \to A$ *равносильны.*

Доказательство. Индукция по длине типа A. □

Лемма 6.64. *Для любого типа* $A \in \mathrm{Tp}(\backslash, /)$ *имеет место включение* $A \in u(A)$.

6.8 Доказательство полноты исчисления $\mathrm{L}(\backslash, /)$

Теорема 6.65. *Если* $A \in \mathrm{Tp}(\backslash, /)$, $\Gamma \in \mathrm{Tp}(\backslash, /)^+$ *и секвенция* $\Gamma \to A$ *истинна в каждой* L*-модели, то* $\mathrm{L}(\backslash, /) \vdash \Gamma \to A$.

Доказательство. Пусть секвенция $B_1, \ldots, B_n \to A$ истинна в каждой L-модели, $A \in \mathrm{Tp}(\backslash, /)$ и $B_i \in \mathrm{Tp}(\backslash, /)$ для каждого $i \leq n$. Тогда секвенция $B_1, \ldots, B_n \to A$ истинна в канонической модели, т. е., $u(B_1) \cdot \ldots \cdot u(B_n) \subseteq u(A)$. По предыдущей лемме $B_1, \ldots, B_n \in u(B_1) \cdot \ldots \cdot u(B_n) \subseteq u(A)$. В силу леммы 6.63 $\mathrm{L}(\backslash, /) \vdash B_1, \ldots, B_n \to A$. □

7 Алгебраические инварианты в исчислении Ламбека

7.1 Счётчики

Определение 7.1. Для каждого $p_i \in \mathrm{Pr}$ определим функцию $\#_{p_i} : \mathrm{Tp} \to \mathbb{Z}$, положив

$$\begin{aligned}
\#_{p_i}(p_i) &\rightleftharpoons 1, \\
\#_{p_i}(p_j) &\rightleftharpoons 0, \text{ если } i \neq j, \\
\#_{p_i}(A \cdot B) &\rightleftharpoons \#_{p_i}(A) + \#_{p_i}(B), \\
\#_{p_i}(A \backslash B) &\rightleftharpoons \#_{p_i}(B) - \#_{p_i}(A), \\
\#_{p_i}(B / A) &\rightleftharpoons \#_{p_i}(B) - \#_{p_i}(A).
\end{aligned}$$

Упражнение 7.2. Вычислить $\#_n(n \backslash np)$, где $n, np \in \mathrm{Pr}$.
Упражнение 7.3. Вычислить $\#_n(((n \backslash np) \backslash s) \cdot np)$.
Упражнение 7.4. Вычислить $\#_{np}(((n \backslash np) \backslash s) \cdot np)$.
Упражнение 7.5. Вычислить $\#_s(((n \backslash np) \backslash s) \cdot np)$.
Определение 7.6. $\#_{p_i}(A_1, \ldots, A_n) \rightleftharpoons \#_{p_i}(A_1) + \ldots + \#_{p_i}(A_n)$.
Теорема 7.7. *Если* $\mathrm{L} \vdash \Gamma \to A$, *то* $\#_{p_i}\Gamma = \#_{p_i}A$ *для каждого* $p_i \in \mathrm{Pr}$.
Упражнение 7.8. Проверить теорему 7.7 на примере секвенции $s/(np \backslash s), (np \backslash s)/np, (s/np) \backslash s \to s$.
Упражнение 7.9. Пусть $\langle \Sigma, H, \triangleright \rangle$ — грамматика из упражнения 5.5. Пусть $w \in \mathcal{L}_L(\Sigma, H, \triangleright)$.
Доказать, что тогда $|w|_a = |w|_b$.
Упражнение 7.10. Пусть $\langle \Sigma, H, \triangleright \rangle$ — грамматика из упражнения 5.5. Пусть $w \in \mathcal{L}_L(\Sigma, H, \triangleright)$.
Доказать, что тогда $|w|_c = 1$.
Упражнение 7.11. Найти такую секвенцию $\Gamma \to A$, что $\#_{p_i}\Gamma = \#_{p_i}A$ для каждого $p_i \in \mathrm{Pr}$, но $\mathrm{L} \nvdash \Gamma \to A$.

7.2 Определение свободной группы

Под свободной группой будем понимать следующую конкретную ее реализацию. Рассмотрим расширенный алфавит Pr', полученный из множества Pr добавлением для каждого $p_i \in \mathrm{Pr}$ новой буквы p_i^{-1}. В этом расширенном алфавите будем рассматривать приведенные слова. Слово u в алфавите Pr' называется *приведенным*, если в нем нет букв p_i и p_i^{-1}, стоящих рядом. Пустое слово также рассматривается как приведенное слово. Элементы FG — все приведенные слова.

Определим умножение на этом множестве рекурсивно по длине слов.

- Если $u = u'p_i$ и $v = p_i^{-1}v'$ для некоторого индекса i, то $u \cdot v \rightleftharpoons u' \cdot v'$.
- Если $u = u'p_i^{-1}$ и $v = p_i v'$ для некоторого индекса i, то $u \cdot v \rightleftharpoons u' \cdot v'$.
- Иначе $u \cdot v$ получается обычным приписыванием слов.

Очевидно, что произведение приведенных слов является приведенным.

Упражнение 7.12. Вычислить $p_1p_2 \cdot p_2^{-1}p_3p_2^{-1} \cdot p_2p_3^{-1}p_1^{-1} \cdot p_1$.

Упражнение 7.13. Вычислить $p_1p_2^{-1} \cdot p_1^{-1}$.

Единицей свободной группы FG является пустое слово ε.

Определим операцию взятия обратного рекурсивно по длине слова так:

$$(\varepsilon)^{-1} \rightleftharpoons \varepsilon,$$
$$(up_i)^{-1} \rightleftharpoons p_i^{-1}(u)^{-1},$$
$$(up_i^{-1})^{-1} \rightleftharpoons p_i(u)^{-1}.$$

Упражнение 7.14. Вычислить $(p_3p_2p_2)^{-1}$.

Упражнение 7.15. Вычислить $p_3p_2p_2 \cdot p_2^{-1}p_2^{-1}p_3^{-1}$.

7.3 Интерпретация исчисления Ламбека в свободной группе

Определение 7.16. Определим функцию $[\![\ ]\!]\colon \mathrm{Tp} \to FG$, положив

$$[\![p_i]\!] \rightleftharpoons p_i,$$
$$[\![A \bullet B]\!] \rightleftharpoons [\![A]\!] \cdot [\![B]\!],$$
$$[\![A \backslash B]\!] \rightleftharpoons [\![A]\!]^{-1} \cdot [\![B]\!],$$
$$[\![B / A]\!] \rightleftharpoons [\![B]\!] \cdot [\![A]\!]^{-1}.$$

Упражнение 7.17. Вычислить $[\![((p_1/p_2)\backslash p_1)\backslash p_3]\!]$.

Упражнение 7.18. Вычислить $[\![(p_1\backslash p_2)\backslash(p_1\backslash p_3)]\!]$.

Определение 7.19. $[\![A_1, \ldots, A_n]\!] \rightleftharpoons [\![A_1]\!] \cdot \ldots \cdot [\![A_n]\!]$.

Теорема 7.20. *Если* $\mathrm{L} \vdash \Gamma \to A$, *то* $[\![\Gamma]\!] = [\![A]\!]$.

Упражнение 7.21. Верно ли, что $\mathrm{L} \vdash np \bullet n \to ((s/np)/n)\backslash s$?

Упражнение 7.22. Верно ли, что $\mathrm{L} \vdash (s/np)\backslash s \to np$?

Упражнение 7.23. Верно ли, что $\mathrm{L} \vdash ((p_1\backslash p_2)/p_1)/p_3 \to ((p_1\backslash p_2)/p_3)/p_1$?

Упражнение 7.24. Верно ли, что
$\mathrm{L} \vdash p_1, p_1\backslash p_1, p_1/p_1, p_1, p_1\backslash p_1, ((p_2/p_1)\backslash p_2)\backslash(p_3/p_1), (p_3/p_1)\backslash(p_3/p_1), \to ((p_2/p_1)/(p_1\backslash p_3))\backslash p_2$?

Упражнение 7.25. Найти такую секвенцию $\Gamma \to A$, что $[\![\Gamma]\!] = [\![A]\!]$, но $\mathrm{L} \not\vdash \Gamma \to A$.

Упражнение 7.26. Найти такие типы A и B, что $[\![A]\!] = [\![B]\!]$, $\mathrm{L} \not\vdash A \to B$ и $\mathrm{L} \not\vdash B \to A$.

Теорема 7.27. *Следующие три утверждения равносильны:*

1) $[\![A]\!] = [\![B]\!]$;
2) *найдется такой тип* C, *что* $\mathrm{L} \vdash A \to C$ *и* $\mathrm{L} \vdash B \to C$;
3) *найдется такой тип* D, *что* $\mathrm{L} \vdash D \to A$ *и* $\mathrm{L} \vdash D \to B$.

Упражнение 7.28. Найти такой тип C, что $p_2 \bullet p_3 \bullet (p_3\backslash p_4) \to C$ и $p_1 \bullet (p_1\backslash p_2) \bullet p_4 \to C$.

Упражнение 7.29. Найти такой тип D, что $D \to p_2 \bullet p_3 \bullet (p_3\backslash p_4)$ и $D \to p_1 \bullet (p_1\backslash p_2) \bullet p_4$.

Упражнение 7.30. Найти такой тип D, что $D \to p_1 \bullet (p_1\backslash p_1)$ и $D \to (p_1/p_1) \bullet p_1$.

Доказательство 3⟶2 из теоремы 7.27. Положим $C \rightleftharpoons (D/A)\backslash D/(B\backslash D)$. □

Доказательство 2⟶3 из теоремы 7.27. Положим $D \rightleftharpoons (A/C) \bullet C \bullet (C\backslash B)$. □

8 Моделирование лингвистических явлений

8.1 Союзы

[7, 6.1]

Определение 8.1. Определим индуктивно множество $\mathbf{BoolTyp}$.

1. $\mathbf{Bool} \in \mathbf{BoolTyp}$.
2. Если $\sigma \in \mathbf{Typ}$ и $\tau \in \mathbf{BoolTyp}$, то $(\sigma \to \tau) \in \mathbf{BoolTyp}$.

Замечание 8.2. Очевидно, $\mathbf{BoolTyp} \subseteq \mathbf{Typ}$.

Пример 8.3. Очевидно, $\mathbf{Ind} \to \mathbf{Ind} \to \mathbf{Bool} \in \mathbf{BoolTyp}$ и $(\mathbf{Ind} \to \mathbf{Ind}) \to \mathbf{Bool} \in \mathbf{BoolTyp}$, но $(\mathbf{Ind} \to \mathbf{Bool}) \to \mathbf{Ind} \notin \mathbf{BoolTyp}$.

Определение 8.4. *Полиморфным сочинительным комбинатором* (polymorphic coordination combinator) называется семейство лямбда-термов $\mathbf{Coor}_\rho$, определённых для каждого $\rho \in \mathbf{BoolTyp}$ следующим образом.

1. $\mathbf{Coor}_{\mathbf{Bool}} \rightleftharpoons \lambda u.\lambda v_1.\lambda v_2.u(v_1)(v_2)$, где $u \in \mathbf{Var}_{\mathbf{Bool}\to\mathbf{Bool}\to\mathbf{Bool}}$, $v_1 \in \mathbf{Var}_{\mathbf{Bool}}$, $v_2 \in \mathbf{Var}_{\mathbf{Bool}}$.
2. Если $\sigma \in \mathbf{Typ}$ и $\tau \in \mathbf{BoolTyp}$, то $\mathbf{Coor}_{\sigma\to\tau} \rightleftharpoons \lambda u.\lambda v_1.\lambda v_2.\lambda w.\mathbf{Coor}_\tau(u)(v_1(w))(v_2(w))$, где $u \in \mathbf{Var}_{\mathbf{Bool}\to\mathbf{Bool}\to\mathbf{Bool}}$, $v_1 \in \mathbf{Var}_{\sigma\to\tau}$, $v_2 \in \mathbf{Var}_{\sigma\to\tau}$, $w \in \mathbf{Var}_\sigma$.

Пример 8.5. Согласно определению $\mathbf{Coor}_{\mathbf{Ind}\to\mathbf{Bool}} = \lambda u.\lambda v_1.\lambda v_2.\lambda w.(\lambda u.\lambda v_1.\lambda v_2.(u(v_1)(v_2))(u)(v_1(w))(v_2(w)))$. Можно доказать, что $\mathbf{Coor}_{\mathbf{Ind}\to\mathbf{Bool}} \Rightarrow \lambda u.\lambda v_1.\lambda v_2.\lambda w.u(v_1(w))(v_2(w))$.

Пример 8.6. Можно доказать, что $\mathbf{Coor}_{\mathbf{Ind}\to\mathbf{Ind}\to\mathbf{Bool}} \Rightarrow \lambda u.\lambda v_1.\lambda v_2.\lambda w.\lambda z.u(v_1(w)(z))(v_2(w)(z))$.

Лемма 8.7. *Для каждого $\rho \in \mathbf{BoolTyp}$ имеет место включение*

$$\mathbf{Coor}_\rho \in \mathbf{Term}_{(\mathbf{Bool}\to\mathbf{Bool}\to\mathbf{Bool})\to\rho\to\rho\to\rho}.$$

Пример 8.8. Для анализа сочинительного союза *or* добавим в категориальный словарь $\mathbf{Lex}$ записи *or* $\Rightarrow$ $\mathbf{Coor}_{\mathrm{Type}(A)}(\text{OR})$: $A\backslash(A/A)$ для каждой категории A, удовлетворяющей условию $\mathrm{Type}(A) \in \mathbf{BoolTyp}$.

При этом мы отказываемся от сформулированного в определении 3.12 требования конечности множества $\mathbf{Lex}$. Но это не значит, что разрешены любые бесконечные категориальные словари. При новом подходе множество $\mathbf{Lex}$ должно состоять из конечного числа "обычных" элементов и конечного числа серий, подобных указанной в этом примере (например, серия для *or* и серия для *and*). Можно доказать, что при этом проблема выводимости остаётся разрешимой (схему доказательства можно найти в [7, с. 186]).

Упражнение 8.9. Найти значения (с категорией s) выражения *John runs or Bill thinks*.

Упражнение 8.10. Найти значения (с категорией s) выражения *John runs or jumps*.

Упражнение 8.11. Найти значения (с категорией s) выражения *John or Bill runs*.

Упражнение 8.12. Найти значения (с категорией np) выражения *the hat in or on the box*.

Пример 8.13. Пусть категориальный словарь содержит записи *vegetarian* $\Rightarrow$ VEGETARIAN : n, *socialist* $\Rightarrow$ SOCIALIST : n, *studied* $\Rightarrow$ STUDY : $np\backslash s$. Тогда выражение

the vegetarian and socialist studied

имеет два значения с категорией s, а именно

$$\text{STUDY}(\text{THE}(\lambda x.\text{AND}(\text{VEGETARIAN}(x))(\text{SOCIALIST}(x)))) : s$$

и

$$\text{AND}(\text{STUDY}(\text{THE}(\text{VEGETARIAN})))(\text{STUDY}(\text{THE}(\text{SOCIALIST}))) : s.$$

Упражнение 8.14. Найти значения (с категорией s) выражения *Mary likes and Bill hates John*.

Упражнение 8.15. Найти значения (с категорией s) выражения
Mary likes and Val believes Bill hates John.

Упражнение 8.16. Найти значения (с категорией s) выражения
John sees the big red or small white balloon.

Упражнение 8.17. Найти значения (с категорией s) выражения
Mary sings slowly in Africa and charmingly in Europe.

Упражнение 8.18. Найти значения (с категорией s) выражения
the flower in the box or the hat on the box is brown.

Упражнение 8.19. Найти значения (с категорией s) выражения
the flower in or the hat on the box is brown.
Упражнение 8.20. Найти значения (с категорией s) выражения
the flower in or hat on the box is brown.
Упражнение 8.21. Найти значения (с категорией s) выражения
John shows and Bill gives Mary the flower and Val the hat.
Пример 8.22. Пусть категориальный словарь содержит записи *didn't* $\Rightarrow \lambda P.\lambda x.\textsc{not}(P(x)) : (np\backslash s)/(np\backslash s)$, *run* $\Rightarrow$ $\textsc{run} : np\backslash s$, *jump* $\Rightarrow$ $\textsc{jump} : np\backslash s$. Тогда выражение *John didn't run and jump* имеет два значения с категорией s, а именно $\textsc{not}(\textsc{and}(\textsc{run}(\textsc{john}))(\textsc{jump}(\textsc{john}))) : s$ и $\textsc{and}(\textsc{not}(\textsc{run}(\textsc{john})))(\textsc{not}(\textsc{jump}(\textsc{john}))) : s$.
Пример 8.23. В приведённой выше системе выражение *John runs and or or Bill jumps* получает значение $\textsc{or}(\textsc{and}(\textsc{run}(\textsc{john}))(\textsc{jump}(\textsc{bill})))(\textsc{or}(\textsc{run}(\textsc{john}))(\textsc{jump}(\textsc{bill}))) : s$, но на самом деле это выражение не является предложением. Следовательно категориальный словарь, построенный в примере 8.8, слишком либерален. В работах М. Мооргата показано, как блокировать подобные нежелательные выводы.

8.2 Кванторы

[7, 7.3, 7.4, 3.3]

Определение 8.24. Для описания лингвистических кванторов вводится ещё один двуместный оператор $\Uparrow$, действующий на категориях. В определение множества $\mathbf{Cat}$ добавляется пункт “если $A \in \mathbf{Cat}$ и $B \in \mathbf{Cat}$, то $(A \Uparrow B) \in \mathbf{Cat}$”.

В определение функции Type: $\mathbf{Cat} \to \mathbf{Typ}$ добавляется пункт

$$\mathrm{Type}(A \Uparrow B) = (\mathrm{Type}(A) \to \mathrm{Type}(B)) \to \mathrm{Type}(B).$$

В исчисление Ламбека добавляются следующие правила:

$$\frac{\Pi \to \beta : B \quad \Gamma, \beta : B, \Delta \to \alpha : A}{\Gamma, \Pi, \Delta \to \alpha : A}\ (\mathrm{cut}),$$

$$\frac{\Gamma, x : A, \Delta \to \beta : B}{\Gamma, \alpha : A \Uparrow B, \Delta \to \alpha(\lambda x.\beta) : B}\ (\Uparrow\to),\ \text{где } x \text{ — новая переменная из } \mathbf{Var}_{\mathrm{Type}(A)},$$

$$\frac{\Pi \to \alpha : A}{\Pi \to \lambda x.x(\alpha) : A \Uparrow B}\ (\to\Uparrow),\ \text{где } x \text{ — новая переменная из } \mathbf{Var}_{\mathrm{Type}(B)\to\mathrm{Type}(A)}.$$

Пример 8.25. $\mathrm{Type}(np \Uparrow s) = (\mathbf{Ind} \to \mathbf{Bool}) \to \mathbf{Bool}$.
Определение 8.26. Для каждого типа $\tau \in \mathbf{Typ}$ введём константы $\textsc{every}_\tau \in \mathbf{Con}_{(\tau\to\mathbf{Bool})\to\mathbf{Bool}}$ и $\textsc{some}_\tau \in \mathbf{Con}_{(\tau\to\mathbf{Bool})\to\mathbf{Bool}}$. Терм $\textsc{every}_\tau(\alpha)$ истинен тогда и только тогда, когда значением терма α является тождественно истинная функция. Терм $\textsc{some}_\tau(\alpha)$ истинен тогда и только тогда, когда значением терма α не является тождественно ложная функция.
Пример 8.27. Значение терма $\textsc{every}_{\mathbf{Real}}(\lambda x.\textsc{less}(-1)(\textsc{times}(x)(x)))$ — истина.
Пример 8.28. Значение терма $\textsc{some}_{\mathbf{Real}}(\lambda x.\textsc{less}(1)(x))$ — ложь.
Пример 8.29. Значение терма $\textsc{every}_{\mathbf{Real}}(\lambda y.\textsc{some}_{\mathbf{Real}}(\lambda x.\textsc{less}(y)(x)))$ — истина.
Пример 8.30. Добавим в категориальный словарь записи *everyone* $\Rightarrow \textsc{every}_{\mathbf{Ind}} : np \Uparrow s$ и *someone* $\Rightarrow \textsc{some}_{\mathbf{Ind}} : np \Uparrow s$.
Упражнение 8.31. Найти значения (с категорией s) выражения *someone runs*.
Упражнение 8.32. Найти значения (с категорией s) выражения *everyone defends someone*.
Определение 8.33. Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\textsc{some}^2 &\rightleftharpoons \lambda P.\lambda Q.\textsc{some}_{\mathbf{Ind}}(\lambda x.(\textsc{and}(P(x))(Q(x)))),\\
\textsc{every}^2 &\rightleftharpoons \lambda P.\lambda Q.\textsc{every}_{\mathbf{Ind}}(\lambda x.(\textsc{or}(\textsc{not}(P(x)))(Q(x)))),\\
\textsc{no}^2 &\rightleftharpoons \lambda P.\lambda Q.\textsc{not}(\textsc{some}_{\mathbf{Ind}}(\lambda x.(\textsc{and}(P(x))(Q(x))))).
\end{aligned}$$

Пример 8.34. Добавим в категориальный словарь записи

$$\begin{aligned}&\textit{every} \Rightarrow \text{EVERY}^2 : (np \Uparrow s)/n,\\ &\textit{some} \Rightarrow \text{SOME}^2 : (np \Uparrow s)/n,\\ &\textit{no} \Rightarrow \text{NO}^2 : (np \Uparrow s)/n.\end{aligned}$$

Упражнение 8.35. Найти значения (с категорией s) выражения *every white dog barks*.
Упражнение 8.36. Найти значения (с категорией s) выражения *John and every kid ran*.
Пример 8.37. Введём константу $\text{IN}_2 \in \mathbf{Con}_{\mathbf{Ind}\to\mathbf{Ind}}$. Терм $\text{IN}_2(\beta)(\alpha)$ истинен, если индивид, обозначаемый термом α, находится в индивиде, обозначаемом термом β. Например $\text{IN}_2(\text{AFRICA})(\text{JOHN})$ означает, что Джон находится в Африке. Введём обозначение $\text{IN} \rightleftharpoons \lambda u.\lambda P.\lambda x.\text{AND}(P(x))(u(\lambda y.\text{IN}_2(y)(x)))$, где $u \in \mathbf{Var}_{(\mathbf{Ind}\to\mathbf{Bool})\to\mathbf{Bool}}$. Добавим в категориальный словарь запись *in* $\Rightarrow \text{IN} : (n\backslash n)/(np \Uparrow s)$.
Упражнение 8.38. Найти значения (с категорией s) выражения
someone likes every toy in some store.
Упражнение 8.39. Найти значения (с категорией s) выражения *every kid in no class smiled*.

8.3 Модальная, временная и интенсиональная логика

[7, Ch. 10–12]

Пример 8.40. Используем **BasCat** из примера 3.2. Пусть $\mathbf{BasTyp} = \{\mathbf{Bool}, \mathbf{Ind}, \mathbf{World}\}$. В подразумеваемой модели типу **World** соответствует множество так называемых *возможных миров* (possible worlds). Введём обозначение $\mathbf{Prop} \rightleftharpoons \mathbf{World} \to \mathbf{Bool}$. Тип **Prop** называется типом *пропозиций* (propositions). Пусть $\text{Type}(np) = \mathbf{Ind}$, $\text{Type}(s) = \mathbf{Prop}$ и $\text{Type}(n) = \mathbf{Ind} \to \mathbf{Prop}$. Введём константу $\mathbf{actualWorld} \in \mathbf{Con}_{\mathbf{World}}$. Будем использовать простейшие выражения из примера 3.25, но с константами других типов (из-за изменения функции Type). Например, $\text{RUN} \in \mathbf{Con}_{\mathbf{Ind}\to\mathbf{Prop}}$. Тогда смыслом предложения *John runs* является терм $\text{RUN}(\text{JOHN})$ типа **Prop**. Денотатом предложения *John runs* является терм $\text{RUN}(\text{JOHN})(\mathbf{actualWorld})$ типа **Bool**.
Пример 8.41. Добавим в категориальный словарь записи *believes* $\Rightarrow$ $\text{BELIEVE} : (np\backslash s)/s$, *knows* $\Rightarrow \text{KNOW} : (np\backslash s)/s$, *a* $\Rightarrow \text{SOME}^2_{\text{p}} : (np \Uparrow s)/n$.
Упражнение 8.42. Найти значения (с категорией s) выражения *John believes Mary loves Bill*.
Упражнение 8.43. Найти значения (с категорией s) выражения *John believes a student is shouting*.

9 Примеры зачётных задач

Упражнение 9.1. Верно ли, что $\mathrm{L} \vdash p_1\backslash(p_2/p_3) \to p_1/(((p_1\backslash p_2)/p_3)\backslash p_1)$?
Упражнение 9.2. Верно ли, что $\mathrm{L} \vdash p_1\backslash p_1, ((p_2/p_1)\backslash p_2)\backslash p_3 \to p_1\backslash p_3$?
Упражнение 9.3. Верно ли, что $\mathrm{L} \vdash ((p_1\backslash p_2)\backslash p_3)\backslash p_4 \to p_3\backslash((p_2\backslash p_1)\backslash p_4)$?
Упражнение 9.4. Верно ли, что $\mathrm{L} \vdash p_3\backslash((p_2\backslash p_1)\backslash p_4) \to ((p_1\backslash p_2)\backslash p_3)\backslash p_4$?
Упражнение 9.5. Верно ли, что $\mathrm{L} \vdash (p_2\backslash p_3)\backslash(p_1\backslash p_4) \to ((p_2/p_1)\backslash p_3)\backslash p_4$?
Упражнение 9.6. Всегда ли верно $(\mathcal{A}/\mathcal{B})\backslash\mathcal{C} = \mathcal{A}/(\mathcal{B}\backslash\mathcal{C})$?
Упражнение 9.7. Всегда ли верно $(\mathcal{A}/\mathcal{B})/\mathcal{C} = \mathcal{A}/(\mathcal{B}\cdot\mathcal{C})$?
Упражнение 9.8. Всегда ли верно $(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})\backslash\mathcal{C} = \mathcal{B}\backslash(\mathcal{A}\backslash\mathcal{C})$?
Упражнение 9.9. Вычислить $\{a, ab\}\backslash\{ab, abb, abbb, aba, abba\}$.
Упражнение 9.10. Вычислить
$\{ab, ba, abba\}\backslash\{aba, abb, baa, abaa, baaa, abbab, abbaaa, babaaa, abbabaaa\}$.
Упражнение 9.11. Вычислить $\{a^{2n}b^n \mid n \geq 1\}/\{a^{2n}b^n \mid n \geq 1\}$.
Упражнение 9.12. Существуют ли такие типы A, B и D, что $\mathrm{L} \vdash D \to B$ и
$\mathrm{L} \nvdash A \to ((D/A)\backslash D)/(B\backslash D)$?
Упражнение 9.13. Существуют ли такие типы A, B и C, что $\mathrm{L} \vdash A\cdot C \to B\cdot C$ и $\mathrm{L} \nvdash A \to B$?
Упражнение 9.14. Существуют ли такие типы A, B, A_1 и B_1, что $\mathrm{L} \vdash A_1\cdot B \to A\cdot B$,
$\mathrm{L} \vdash A\cdot B_1 \to A\cdot B$ и $\mathrm{L} \nvdash A_1\cdot B_1 \to A\cdot B$?
Упражнение 9.15. Вычислить $\#_n((np/n)\cdot(n/n)\cdot n\cdot((np\backslash s)/np))$.
Упражнение 9.16. Вычислить $[\![((p_1\backslash p_2)\backslash p_3)\backslash p_1]\!]$.
Упражнение 9.17. Найти нормальную форму λ-терма $(\lambda R.\lambda y.\lambda x.\text{AND}(R(x))(R(y)))(\text{RUN})(\text{A})(\text{B})$.

Упражнение 9.18. Вычислить $[[\textit{pyramid near the box on the table}]]_{\mathbf{Lex}}$, если

$$\begin{aligned}\mathbf{Lex} = \{&\textit{pyramid} \Rightarrow \text{PYRAMID} : n,\\ &\textit{box} \Rightarrow \text{BOX} : n,\\ &\textit{table} \Rightarrow \text{TABLE} : n,\\ &\textit{near} \Rightarrow \text{NEAR} : (n\backslash n)/np,\\ &\textit{on} \Rightarrow \text{ON} : (n\backslash n)/np,\\ &\textit{the} \Rightarrow \iota_{\mathbf{Ind}} : np/n\}.\end{aligned}$$

Литература

Основная литература

[1] *Бушковский В.* Синтаксическое исчисление Ламбека и его семантика // Логические исследования. Вып. 1. — М.: Наука, 1993. — С. 77–96.
[2] *Гладкий А. В., Мельчук И. А.* Элементы математической лингвистики. М.: Наука, 1969. — 192 с.
[3] *Ламбек И.* Математическое исследование структуры предложения // Математическая лингвистика: Сборник переводов / Под ред. Ю. А. Шрейдера и др. — М.: Мир, 1964. — С. 47–68.
[4] Логический подход к искусственному интеллекту: От классической логики к логическому программированию / Тейз А., Грибомон П., Луи Ж. и др. — М.: Мир, 1990.
[5] Логический подход к искусственному интеллекту: От модальной логики к логике баз данных / Тейз А., Грибомон П., Юлен Г. и др. — М.: Мир, 1998. — 494 с.
[6] *Тестелец Я. Г.* Введение в общий синтаксис. М.: Российск. гос. гуманит. ун-т, 2001. — 800 с.
[7] *Carpenter B.* Type-Logical Semantics. — Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 1997. — xxi, 575 p. — (Language, Speech, and Communication).
[8] Categorial Grammars and Natural Language Structures / Editors R. T. Oehrle, E. Bach, and D. Wheeler. — Dordrecht: Reidel, 1988.
[9] *Dowty D. R.* Word Meaning and Montague Grammar. — Dordrecht, 1979.
[10] *Dowty D. R., Wall R. E., and Peters S.* Introduction to Montague Semantics. — Kluwer Academic Publishers, 1992.
[11] *Janssen T. M. V.* Foundations and Applications of Montague Grammar. — Amsterdam, 1986.

Литература, доступная в электронном виде

[12] *Карпенко А. С.* Логика на рубеже тысячелетий. // Логические исследования. Вып. 7. — М.: Наука, 2000. — С. 7–60. — `http://www.philosophy.ru/library/logic/karpenko/01.html` или `http://www.LOGIC.ru/Russian/LogStud/05/LS_5_r_Karpenko.pdf` (2004-10-19).
[13] *Barker Ch.* 2003-10-17. A gentle introduction to Type Logical Grammar, the Curry-Howard correspondence, and cut-elimination. `http://semanticsarchive.net/Archive/DMzOTFiN/barker.gentle.tlg.pdf` (2004-10-19).
[14] *Barker Ch.* Lambda Tutorial. `http://ling.ucsd.edu/~barker/Lambda/` (2004-09-01).
[15] *Carpenter B.* Type-Logical Grammar Theorem Prover. `http://www.colloquial.com/tlg/parser.html`
[16] *Ranta A.* 2001-04-27. Grammatical Framework Tutorial. `http://www.cs.chalmers.se/~aarne/GF0/doc/tutorial/gf-tutorial.html` (2004-09-01).
[17] Research papers of CoGenTex. `http://www.cogentex.com/research/papers.shtml`

Дополнительная литература

[18] *Барендрегт Х.* Ламбда-исчисление. Его синтаксис и семантика. — М.: Мир, 1985. — 606 с.
[19] *Герасимова И. А.* Формальные грамматики и интенсиональная логика. — М., 2000. — 156 с.
[20] *Маркус С.* Теоретико-множественные модели языков / Пер. с англ. М. В. Арапова. — М.: Наука, 1970. — 332 с.
[21] *Ружа И.* Интенсиональная логика без интенсиональных переменных // Модальные и интенсиональные логики и их применение к проблемам методологии науки / Редкол. Смирнов В. А., Карпенко А. С., Сидоренко Е. А. — М.: Наука, 1984. — С. 220–245.
[22] Семантика модальных и интенсиональных логик. — М.: Прогресс, 1981.
[23] *Bar-Hillel Y.* A quasi-arithmetical notation for syntactic description // Langugage. — 1953. — Vol. 29. — P. 47–58.
[24] *Bar-Hillel Y., Gaifman C., Shamir E.* On categorial and phrase-structure grammars // Bull. Res. Council Israel Sect. F. — 1960. — Vol. 9F. — P. 1–16.
[25] *Frege G.* Über Sinn und Bedeutung // Zeitschrift für Philosophie und Philosophische Kritik. — 1892. — B. 100. — S. 25–50.
[26] Handbook of Logic and Language / Editors J. van Benthem and A. ter Meulen. — 1997. — 1272 p.
[27] *Lambek J.* Contributions to a mathematical analysis of the English verb phrase // J. Canadian Linguistic Assoc. — 1959. — Vol. 5. — P. 83–89.
[28] *Lambek J.* Grammar as mathematics // Canadian Mathematical Bulletin. — 1989. — Vol. 32, no. 3. — P. 257–273.
[29] *Montague R.* The proper treatment of quantification in ordinary English // Approaches to Natural Language: Proceedings of the 1970 Stanford Workshop on Grammar and Semantics / Editors J. Hintikka, J. Moravcsik, and P. Suppes. — Dordrecht: Reidel, 1973.
[30] *Partee B., Meulen A. ter, and Wall R. E.* Mathematical Methods in Linguistics. — Kluwer, 1993.
[31] Formal Semantics: The Essential Readings. — / Editors P. Portner and B. H. Partee. — Blackwell, 2002. — 486 p.

Оглавление