МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

УДК 510.662

Саватеев Юрий Вячеславович

Алгоритмическая сложность фрагментов исчисления Ламбека

Специальность 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., доцент Мати Рейнович Пентус

МОСКВА — 2009

Оглавление

Введение **3**

1 Исчисление Ламбека L **10**

1.1 Аксиомы и правила исчисления Ламбека 10

1.2 Фрагменты исчисления Ламбека 11

1.3 Грамматики на основе исчисления Ламбека 12

1.4 Структурно эквивалентные секвенции 12

2 Построение сетей доказательства **14**

2.1 Представление секвенций 14

2.2 Критерий выводимости 22

3 Левосторонний фрагмент исчисления Ламбека **35**

3.1 Сведение задачи SAT к задаче выводимости для $L(\cdot, \backslash)$ . . 36

3.2 Доказательство корректности сведения 37

4 Фрагмент исчисления Ламбека без умножения **44**

4.1 Сведение задачи SAT к задаче выводимости для $L(\backslash, /)$ . . 45

4.2 Доказательство корректности сведения 47

5 Фрагмент исчисления Ламбека с одним делением **60**

5.1 Критерий выводимости 60

5.2 Алгоритм распознавания принадлежности 66

Литература **73**

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Диссертация посвящена исследованию алгоритмической сложности фрагментов исчисления Ламбека.

Исчисление Ламбека L было введено в [5]. Оно активно используется в качестве основы для создания категориальных грамматик, описывающих синтаксические структуры естественных языков (см. например [9] и [10]). Категориальные грамматики имеют ряд преимуществ перед другими способами, такими как контекстно-свободные грамматики, ввиду лексикализации — вся необходимая информация хранится в лексиконе, поэтому нет необходимости использовать всю имеющуюся информацию — достаточно только той, что относится к данному случаю. Также это позволяет параллельно с анализом синтаксической структуры вести семантический анализ, используя, например, грамматику Монтегю.

Класс языков, порождаемых категориальными грамматиками, основанными на исчислении Ламбека, в точности совпадает с классом контекстно-свободных языков (см. [13]). Исчисление Ламбека также тесно связано с линейной логикой Жирара (см. [3]) — оно эквивалентно интуиционистскому некоммутативному фрагменту мультипликативной линейной логики.

В исчислении Ламбека используются синтаксические типы, построенные из примитивных с помощью трех бинарных связок — умножения, левого деления и правого деления. Естественно рассматривать

фрагменты исчисления Ламбека с ограниченным набором связок. В настоящей работе будут рассмотрены так называемый левосторонний фрагмент $L(\cdot, \backslash)$, фрагмент без умножения $L(\backslash, /)$, который является особенно важным для лингвистических приложений (большинство грамматик, описывающих естественные языки, основаны именно на этом фрагменте), и фрагмент исчисления Ламбека с одним делением $L(\backslash)$. Также рассматриваются их варианты — фрагменты исчисления Ламбека с разрешенными пустыми антецедентами $L^*(\cdot, \backslash)$, $L^*(\backslash, /)$, и $L^*(\backslash)$.

В категориальных грамматиках синтаксический разбор предложения сводится к поиску вывода в исчислении, лежащем в их основе. Поэтому вопрос об алгоритмической сложности задачи распознавания выводимости особенно важен для лингвистических приложений, так как напрямую связан с эффективностью работы ситаксических анализаторов, основанных на категориальных грамматиках.

Для неассоциативного варианта исчисления Ламбека было показано, что задача распознавания выводимости может быть решена за полиномиальное время (см. [4], для фрагмента неассоциативного исчисления без умножения это было доказано раньше — в [1]). Для самого исчисления Ламбека (где умножение является ассоциативным), а также для его варианта L^*, разрешающего пустые антецеденты, была доказана NP-полнота задачи распознавания выводимости (см. [12]).

Мы докажем, что классическая NP-полная задача SAT (о выполнимости булевых формул в конъюнктивной нормальной форме) за полиномиальное время может быть сведена к задачам распознавания выводимости в $L(\cdot, \backslash)$, $L(\backslash, /)$, $L^*(\cdot, \backslash)$ и $L^*(\backslash, /)$, и тем самым покажем, что задача распознавания выводимости для этих фрагментов NP-полна. Все конструкции и доказательства, которые мы используем при рассмотрении $L(\cdot, \backslash)$ и $L^*(\cdot, \backslash)$, могут быть явно переписаны для правостороннего фрагмента $L(\cdot, /)$. Таким образом задача распознавания выводимости для $L(\cdot, /)$ и $L^*(\cdot, /)$ также является NP-полной.

Для фрагмента с одним делением мы строим полиномиальный алгоритм, решающий более общую задачу, а именно, задачу распознавания принадлежности данного слова языку, порождаемому данной грамматикой, основанной на этом фрагменте. Это возможно благодаря более простой струтуре секвенций, выводимых в этом исчислении.

Таким образом, теперь для всех фрагментов исчисления Ламбека, заданных ограничениями набора связок, установлены точные оценки алгоритмической сложности задачи распознавания выводимости.

В качестве основной техники для исследования выводимости во фрагментах ассоциативного исчисления Ламбека мы используем так называемые сети доказательства — метод, позволяющий наглядно и компактно представлять вывод формулы в данном исчислении, полностью передавая его принципиальную структуру (аналоги использовались в [14], [7]). Этот метод успешно применялся в [12], [15] и [16]. Также в 2005 году в [11] была попытка применить данный метод для исследования выводимости во фрагменте исчисления Ламбека без умножения, однако там не было получено никаких результатов, связанных с алгоритмической сложностью. Еще один критерий (близкий к критерию из [16], однако формально неверный) для этого фрагмента был предложен в [6].

Открытый вопрос об NP-полноте задачи распознавания выводимости во фрагменте исчисления Ламбека без умножения упоминается в статьях многих математиков и лингвистов, изучающих исчисление Ламбека (см. например [1],[4],[11],[12]).

Цель работы.

Целью работы является получение оценок алгоритмической сложности задач распознавания выводимости и распознавания принадлежности данного слова языку, порождаемому данной категориальной грамматикой, для различных фрагментов исчисления Ламбека.

Методы исследования.

В работе применяются методы теории доказательств. Основным инструментом исследования выводимости является построение так называемых сетей доказательства с различными свойствами, отвечающими конкретному фрагменту исчисления Ламбека.

Научная новизна.

Результаты диссертации являются новыми, среди них:

1. Задачи распознавания выводимости в исчислении NP-полны для $\mathrm{L}(\cdot, \backslash), \mathrm{L}(\backslash, /), \mathrm{L}(\cdot, /), \mathrm{L}^*(\cdot, \backslash), \mathrm{L}^*(\backslash, /), \mathrm{L}^*(\cdot, /)$.

2. Задачи распознавания принадлежности данного слова языку, порождаемому данной категориальной грамматикой, NP-полны для $\mathrm{L}(\cdot, \backslash), \mathrm{L}(\backslash, /), \mathrm{L}(\cdot, /), \mathrm{L}^*(\cdot, \backslash), \mathrm{L}^*(\backslash, /), \mathrm{L}^*(\cdot, /)$.

3. Задачи распознавания выводимости в исчислении разрешимы за полиномиальное время для $\mathrm{L}(\backslash), \mathrm{L}^*(\backslash), \mathrm{L}(/), \mathrm{L}^*(/)$.

4. Задачи распознавания принадлежности данного слова языку, порождаемому данной категориальной грамматикой, разрешимы за полиномиальное время для $\mathrm{L}(\backslash), \mathrm{L}^*(\backslash), \mathrm{L}(/), \mathrm{L}^*(/)$.

Теоретическая и практическая ценность.

Работа носит теоретический характер. Результаты, полученные в диссертационной работе, представляют интерес для математической лингвистики. Полученные результаты могут быть полезны специалистам, работающим в МГУ им. М. В. Ломоносова, МИ РАН им. В. А. Стеклова, ПОМИ РАН им. В. А. Стеклова, Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН, ИППИ РАН и др.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

- На международном семинаре “Вычислительные интерпретации доказательств” (Computational Interpretations of Proofs), Париж, Франция, 29–30 ноября 2007 года.
- На международной конференции “Логические модели доказательств и вычислений” (LMRC-2008) Москва, Россия, 5–8 мая 2008 года.
- На международной конференции “Компьютерные науки в России” (CSR-2008), Москва, Россия, 7–12 июня 2008 года.
- На семинаре “Алгоритмические вопросы алгебры и логики” под руководством академика РАН С.И. Адяна (2008, 2009).
- На международной конференции “Логические основы компьютерных наук” (LFCS-2009), Дирфилд Бич, США, 3–6 января 2009 года.
- На Европейской летней школе по логике, лингвистике и информатике (ESSLLI-2009), Бордо, Франция, 20–31 июля 2009 года.
- На научно-исследовательском семинаре кафедры математической логики и теории алгоритмов под руководством академика РАН С. И. Адяна, члена-корреспондента РАН Л. Д. Беклемишева и профессора В. А. Успенского (2009).

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [15]–[17].

Структура работы.

Работа состоит из введения, 5 глав, содержащих 12 разделов, и списка литературы. Библиография содержит 17 наименований. Текст диссертации изложен на 75 страницах.

Краткое содержание диссертации

В **главе 1** вводятся нужные нам понятия и обозначения. В **разделе 1.1** формулируются аксиомы и правила исчисления Ламбека. В **разделе 1.2** описываются интересующие нас фрагменты исчисления Ламбека. В **разделе 1.3** показывается как строятся грамматики на основе исчисления Ламбека и какие языки они порождают. В **разделе 1.4** вводится понятие структурно эквивалентных секвенций, которое потребуется нам при доказательстве критерия выводимости.

В **главе 2** вводится понятие сети доказательства. В **разделе 2.1** описывается представление секвенций исчисления Ламбека как множества начал некоторого слова и доказываем свойства этого представления. В этом же разделе вводится понятие сети доказательства и формулируются так называемые доказательные условия — свойства сетей доказательства, которые будут использоваться для определения выводимости исходной секвенции. В **разделе 2.2** формулируется и доказывается критерий выводимости секвенций на основе доказательных условий.

В **главе 3** доказывается NP-полнота задачи распознавания выводимости для левостороннего фрагмента исчисления Ламбека и его варианта, допускающего пустые антецеденты. В **разделе 3.1** приводится конструкция, с помощью которой сводится известная NP-полная задача SAT к задаче распознавания выводимости в данном фрагменте. По данной булевой формуле в конъюнктивной нормальной форме строится секвенция, выводимая в левостороннем фрагменте исчисления Ламбека, если и только если исходная формула была выполнима. Эта же конструкция работает и для варианта, допускающего пустые антецеденты. Для правостороннего фрагмента работает конструкция, симметричная построенной. В **разделе 3.2** доказывается корректность этого сведения.

Задача распознавания принадлежности данного слова языку, порожденному данной категориальной грамматикой, основанной на этих

фрагментах, с одной стороны очевидно лежит в классе NP, а с другой стороны, задача распознавания выводимости тривиально сводится к задаче распознавания принадлежности слова языку. Таким образом, эта задача является NP-полной.

В **главе 4** доказывается NP-полнота задачи распознавания выводимости для фрагмента исчисления Ламбека без умножения и его варианта, допускающего пустые антецеденты, так же с помощью сведения задачи SAT к задаче распознавания выводимости в этих фрагментах. В **разделе 4.1** приводится конструкция, необходимая для такого сведения, а в **разделе 4.2** доказывается корректность этого сведения.

В **главе 5** рассматривается фрагмент исчисления Ламбека с одним делением. В **разделе 5.1** доказывается новый критерий выводимости для этого фрагмента с использованием другого представления секвенций и других доказательных условий. В **разделе 5.2** строится полиномиальный алгоритм, позволяющий определять принадлежность слова языку, порожденному данной грамматикой, за полиномиальное время, и доказывается его корректность.

Благодарности.

Автор благодарит своего научного руководителя профессора М. Р. Пентуса за постановку задачи, поддержку и внимание к работе.

Глава 1

Исчисление Ламбека L

Ассоциативное исчисление Ламбека можно построить следующим образом. Пусть задано счетное множество *примитивных типов* $\mathbf{P} = \{p_0, p_1, \ldots\}$. Определим множество Tp L-типов (также называемых L-термами): (1) $\mathbf{P} \subset \mathrm{Tp}$; (2) если $A, B \in \mathrm{Tp}$, то $(A/B), (A\backslash B), (A \cdot B) \in \mathrm{Tp}$.

Примитивные типы будем обозначать строчными латинскими буквами $(p, q, r, \ldots)$, L-типы — заглавными латинскими буквами $(A, B, C \ldots)$. Заглавными греческими буквами $(\Pi, \Gamma, \Delta, \ldots)$ будем обозначать последовательности (возможно пустые) L-типов. Выражения вида $\Pi \to A$, где Π непусто, называются L-формулами или секвенциями. Конечную последовательность L-типов $A_1, \ldots, A_n$ условимся обозначать $A_1 \ldots A_n$.

1.1 Аксиомы и правила исчисления Ламбека

Аксиомы и правила вывода в L таковы:

$$A \to A, \qquad \frac{\Phi \to B \quad \Gamma B \Delta \to A}{\Gamma \Phi \Delta \to A}\ (\mathrm{CUT}),$$

$$\frac{\Pi A \to B}{\Pi \to (B/A)}\ (\to /), \qquad \frac{\Phi \to A \quad \Gamma B \Delta \to C}{\Gamma (B/A) \Phi \Delta \to C}\ (/ \to),$$

$$\frac{A \Pi \to B}{\Pi \to (A\backslash B)}\ (\to \backslash), \qquad \frac{\Phi \to A \quad \Gamma B \Delta \to C}{\Gamma \Phi (A\backslash B) \Delta \to C}\ (\backslash \to),$$

$$\frac{\Pi \to A \quad \Phi \to B}{\Pi\Phi \to (A \cdot B)}\ (\to \cdot), \qquad\qquad \frac{\Gamma AB\Delta \to C}{\Gamma(A \cdot B)\Delta \to C}\ (\cdot \to).$$

В посылках и выводах правил стоят L-формулы, Γ и Δ могут быть пустыми.

Запись $\mathrm{L} \vdash \Pi \to A$ означает, что секвенция $\Pi \to A$ выводима в исчислении L.

Исчисление L^* отличается от L тем, что в нем разрешены пустые антецеденты, то есть выражения вида $\to A$, где A — некоторый тип, также считаются формулами.

Лемма 1.1.1. *Правило сечения (CUT) является устранимым в обоих этих исчислениях.*

Доказательство этой леммы для L приведено в [5]. Это доказательство легко обобщается на случай L^*.

1.2 Фрагменты исчисления Ламбека

В данной работе рассматриваются следующие фрагменты исчисления Ламбека:

- Левосторонний фрагмент исчисления Ламбека. В этом фрагменте для образования сложных типов используются только две операции — умножение и левое деление. Все секвенции, выводимые в этом фрагменте, не содержат знака /, поэтому правила $(\to /)$ и $(/ \to)$ отсутствуют в этом фрагменте.

- Фрагмент исчисления Ламбека без умножения. То же самое, только здесь отсутсвует умножение.

- Фрагмент исчисления Ламбека с одним делением. Здесь для образования сложных типов используется только одна операция — левое деление.

Правосторонний фрагмент и фрагмент с одним правым делением являются полностью симметричными левостороннему фрагменту и фрагменту с одним делением, и поэтому отдельно не рассматриваются.

Полное исчисление Ламбека является консервативным расширением этих фрагментов.

Так же мы рассматриваем варианты этих фрагментов, допускающие пустые антецеденты.

1.3 Грамматики на основе исчисления Ламбека

Грамматика Ламбека это четверка $(\Sigma, \mathbf{P}, R, B)$, где Σ это алфавит, $\mathbf{P}$ — набор примитивных типов, $R\colon \Sigma \to 2^{\mathrm{Tp}}$ — отображение, сопоставляющее каждой букве алфавита конечное множество L-типов, построенных из $\mathbf{P}$, B — выделенный L-тип. Слово $x_1, \ldots, x_n \in \Sigma^*$ принадлежит языку, порождаемому данной грамматикой, если существуют $A_i \in R(x_i)$ такие, что секвенция $A_1 \ldots A_n \to B$ выводится в исчислении Ламбека.

Для всех рассматриваемых фрагментов исчисления Ламбека грамматики на их основе распознают в точности все контекстно-свободные языки, не содержащие пустого слова. Фрагменты, разрешающие пустые антецеденты распознают в точности все контекстно-свободные языки.

1.4 Структурно эквивалентные секвенции

Пусть A — некоторый L-тип. Назовем *упрощением* A результат применения к нему одной из следующих операций:

1. Заменить подтип вида $B \cdot (C \cdot D)$ на $(B \cdot C) \cdot D$.
2. Заменить подтип вида $(B \backslash C)/D$ на $B \backslash (C/D)$.
3. Заменить подтип вида $(C \cdot B) \backslash D$ на $B \backslash (C \backslash D)$.
4. Заменить подтип вида $B/(D \cdot C)$ на $(B/C)/D$.

Упрощением секвенции $\Pi \to A$ назовем результат применения к ней одной из следующих операций:

1. Упрощение любого входящего в нее типа.

2. Применение правила, обратного правилу $(\cdot \to)$, правилу $(\to /)$ или правилу $(\to \backslash)$.

Секвенции называются структурно эквивалентными, если из одной можно получить другую с помощью нескольких применений операций упрощения или операций, обратных к ним.

Определение 1.4.1. *Секвенция называется неупрощаемой, если к ней нельза применить ни одну из упрощающих операций.*

Лемма 1.4.1. *Структурно эквивалентные секвенции либо одновременно выводимы, либо одновременно невыводимы в исчислении* L^*. *Если секвенция выводима в* L, *то ее упрощение также выводимо в исчислении* L.

Лемма 1.4.2. *Для любой секвенции существует структурно эквивалентная ей неупрощаемая секвенция.*

Глава 2

Построение сетей доказательства

2.1 Представление секвенций

Обозначим за $\mathbb{N}$ множество натуральных чисел (0 является натуральным числом). За $\mathbb{Z}$ обозначим множество целых чисел.

Пусть даны $p \in \mathrm{Tp}$, $i \in \mathbb{N}$ и $j \in \mathbb{Z}$. Тогда назовем *атомом* символ $p^{\lfloor j \rfloor}_{\lceil i \rceil}$. Определим множество At как множество всех атомов.

Определим FS как множество всех конечных слов в алфавите At.

Элементы FS будем обозначать буквами $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$ и так далее, символом ε будем обозначать пустую строку.

Определим три отображения $t : \mathrm{FS} \to \mathbf{P}$, $d : \mathrm{FS} \to \mathbb{N}$ и $g : \mathrm{FS} \to \mathbb{Z}$ следующим образом:

$$t(\mathbb{A}p^{\lfloor j \rfloor}_{\lceil i \rceil}) = p; \quad d(\mathbb{A}p^{\lfloor j \rfloor}_{\lceil i \rceil}) = j; \quad g(\mathbb{A}p^{\lfloor j \rfloor}_{\lceil i \rceil}) = i.$$

На пустом слове значение этих функций не определено.

Пусть $\mathbb{A} \sqsubset \mathbb{B}$ обозначает, что $\mathbb{A}$ является собственным началом $\mathbb{B}$, то есть существует $\mathbb{C} \neq \varepsilon$, такое что $\mathbb{B} = \mathbb{A}\mathbb{C}$. Мы будем обозначать такое $\mathbb{C}$ как $\mathbb{A} \diagdown \mathbb{B}$. Выражение $\mathbb{A} \sqsubseteq \mathbb{B}$ значит, что либо $\mathbb{A} \sqsubset \mathbb{B}$, либо $\mathbb{A} = \mathbb{B}$.

Пусть $\mathcal{P}_{\mathbb{A}} = \{\mathbb{B} \mid \varepsilon \sqsubset \mathbb{B} \sqsubseteq \mathbb{A}\}$ — множество всех непустых начал $\mathbb{A}$. На множестве $\mathcal{P}_{\mathbb{A}}$ отношение $\sqsubset$ является строгим линейным порядком. Тем самым, определены понятия $\min_{\sqsubset}$, $\max_{\sqsubset}$ и $[\mathbb{B}, \mathbb{C}]_{\sqsubset}$. Последнее означает множество $\{\mathbb{D} \in \mathcal{P}_{\mathbb{A}} \mid \mathbb{B} \sqsubseteq \mathbb{D} \sqsubseteq \mathbb{C}\}$. Полуинтервал $(\mathbb{B}, \mathbb{C}]_{\sqsubset}$

определяется аналогично.

Если γ — бинарное отношение на некотором множестве X, то γ^+ означает его транзитивное замыкание, а γ^* — его транзитивно-рефлексивное замыкание.

Пусть $(\cdot)^{\langle n\rangle}(n \in \mathbb{Z})$ — семейство функций на FS, заданное следующими соотношениями:

$$(p_{\lceil i\rceil}^{\lfloor 0\rfloor})^{\langle n\rangle} = p_{\lceil n\rceil}^{\lfloor 1\rfloor},$$
$$(p_{\lceil i\rceil}^{\lfloor j\rfloor})^{\langle n\rangle} = p_{\lceil -i\rceil}^{\lfloor j+1\rfloor}, \text{для } j \neq 0,$$
$$(\mathbb{AB})^{\langle n\rangle} = (\mathbb{B})^{\langle n\rangle}(\mathbb{A})^{\langle n\rangle}.$$

Определим следующую функцию $h : \mathrm{Tp} \to \mathbb{N}$:

$$h(p) = 1; \quad h(A/B) = h(B\backslash A) = h(A); \quad h(A \cdot B) = h(A) + h(B).$$

Перевод L-типов в элементы FS осуществляется с помощью следующего отображения $[\![\cdot]\!]$:

$$[\![p]\!] = p_{\lceil 0\rceil}^{\lfloor 0\rfloor};$$
$$[\![(A/B)]\!] = [\![B]\!]^{\langle h(A)\rangle}[\![A]\!];$$
$$[\![(A\backslash B)]\!] = [\![B]\!][\![A]\!]^{\langle -h(B)\rangle};$$
$$[\![(A \cdot B)]\!] = [\![B]\!][\![A]\!].$$

Например,

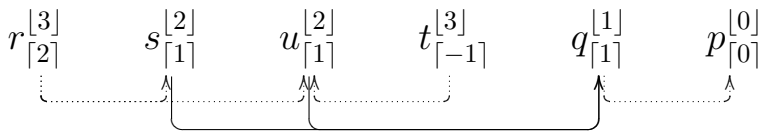
$$\begin{aligned}
[\![(p/((((t\backslash u)\cdot s)/r)\backslash q))]\!] &= [\![((((t\backslash u)\cdot s)/r)\backslash q)]\!]^{\langle 1\rangle} p_{\lceil 0\rceil}^{\lfloor 0\rfloor} = \\
&= (q_{\lceil 0\rceil}^{\lfloor 0\rfloor}[\![(((t\backslash u)\cdot s)/r)]\!]^{\langle -1\rangle})^{\langle 1\rangle} p_{\lceil 0\rceil}^{\lfloor 0\rfloor} = \\
&= (q_{\lceil 0\rceil}^{\lfloor 0\rfloor}((r_{\lceil 0\rceil}^{\lfloor 0\rfloor})^{\langle 2\rangle}[\![((t\backslash u)\cdot s)]\!])^{\langle -1\rangle})^{\langle 1\rangle} p_{\lceil 0\rceil}^{\lfloor 0\rfloor} = \\
&= (q_{\lceil 0\rceil}^{\lfloor 0\rfloor}(r_{\lceil 2\rceil}^{\lfloor 1\rfloor} s_{\lceil 0\rceil}^{\lfloor 0\rfloor}[\![(t\backslash u)]\!]))^{\langle -1\rangle})^{\langle 1\rangle} p_{\lceil 0\rceil}^{\lfloor 0\rfloor} = \\
&= (q_{\lceil 0\rceil}^{\lfloor 0\rfloor}(r_{\lceil 2\rceil}^{\lfloor 1\rfloor} s_{\lceil 0\rceil}^{\lfloor 0\rfloor} u_{\lceil 0\rceil}^{\lfloor 0\rfloor}(t_{\lceil 0\rceil}^{\lfloor 0\rfloor})^{\langle -1\rangle})^{\langle -1\rangle})^{\langle 1\rangle} p_{\lceil 0\rceil}^{\lfloor 0\rfloor} = \\
&= (q_{\lceil 0\rceil}^{\lfloor 0\rfloor}(r_{\lceil 2\rceil}^{\lfloor 1\rfloor} s_{\lceil 0\rceil}^{\lfloor 0\rfloor} u_{\lceil 0\rceil}^{\lfloor 0\rfloor} t_{\lceil -1\rceil}^{\lfloor 1\rfloor})^{\langle -1\rangle})^{\langle 1\rangle} p_{\lceil 0\rceil}^{\lfloor 0\rfloor} = \\
&= (q_{\lceil 0\rceil}^{\lfloor 0\rfloor} t_{\lceil 1\rceil}^{\lfloor 2\rfloor} u_{\lceil -1\rceil}^{\lfloor 1\rfloor} s_{\lceil -1\rceil}^{\lfloor 1\rfloor} r_{\lceil -2\rceil}^{\lfloor 2\rfloor})^{\langle 1\rangle} p_{\lceil 0\rceil}^{\lfloor 0\rfloor} = \\
&= r_{\lceil 2\rceil}^{\lfloor 3\rfloor} s_{\lceil 1\rceil}^{\lfloor 2\rfloor} u_{\lceil 1\rceil}^{\lfloor 2\rfloor} t_{\lceil -1\rceil}^{\lfloor 3\rfloor} q_{\lceil 1\rceil}^{\lfloor 1\rfloor} p_{\lceil 0\rceil}^{\lfloor 0\rfloor}.
\end{aligned}$$

Пусть $\mathcal{N}_{\mathbb{A}} = \{\mathbb{B} \in \mathcal{P}_{\mathbb{A}} \mid d(\mathbb{B})$ нечетно$\}$.

Определим бинарное отношение φ на множестве $\mathcal{P}_{\mathbb{A}}$ следующим образом:

$$\mathbb{B}\,\varphi\,\mathbb{C} \Leftrightarrow \begin{cases} (\mathbb{B} \sqsubset \mathbb{C}) \wedge (d(\mathbb{C}) = d(\mathbb{B}) - 1) \wedge \\ \qquad \wedge(|\{\mathbb{D} \mid \mathbb{B} \sqsubset \mathbb{D} \sqsubset \mathbb{C}, d(\mathbb{D}) = d(\mathbb{C})\}| < |g(\mathbb{B})|), \quad \text{если } g(\mathbb{B}) \geq 0; \\ (\mathbb{C} \sqsubset \mathbb{B}) \wedge (d(\mathbb{C}) = d(\mathbb{B}) - 1) \wedge \\ \qquad \wedge(|\{\mathbb{D} \mid \mathbb{C} \sqsubset \mathbb{D} \sqsubset \mathbb{B}, d(\mathbb{D}) = d(\mathbb{C})\}| < |g(\mathbb{B})|), \quad \text{если } g(\mathbb{B}) < 0. \end{cases}$$

Пример 2.1.1. Рассмотрим $A = (p/((((t\backslash u)\cdot s)/r)\backslash q))$. Тогда отношение φ для $\mathcal{P}_{[\![A]\!]}$ выглядит следующим образом:



Элементам $\mathcal{P}_{[\![A]\!]}$ соответствуют различные вхождения элементов At. Два вхождения соединены стрелкой если соответствующие элементы состоят в отношении φ. Стрелка пунктирная, если первый элемент пары лежит в $\mathcal{N}_{[\![A]\!]}$.

Пусть $\Phi(\mathbb{B}) = \{\mathbb{C} \mid \mathbb{B}\,\varphi\,\mathbb{C}\}$. В частности, в примере 2.1.1, $\Phi(r^{\lfloor 3 \rfloor}_{\lceil 2 \rceil}) = \{r^{\lfloor 3 \rfloor}_{\lceil 2 \rceil} s^{\lfloor 2 \rfloor}_{\lceil 1 \rceil}, r^{\lfloor 3 \rfloor}_{\lceil 2 \rceil} s^{\lfloor 2 \rfloor}_{\lceil 1 \rceil} u^{\lfloor 2 \rfloor}_{\lceil 1 \rceil}\}$.

Теперь приступим к определению сети доказательства.

Рассмотрим секвенцию $A_1 \ldots A_n \to B$. Пусть

$$\mathbb{W} = [\![A_1]\!]^{\langle 0 \rangle} \ldots [\![A_n]\!]^{\langle 0 \rangle} [\![B]\!].$$

На множестве $\mathcal{P}_{\mathbb{W}}$ определены отношение φ, функция Φ, а также множество $\mathcal{N}_{\mathbb{W}}$.

Лемма 2.1.1. *Для любых* $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \in \mathcal{P}_{\mathbb{W}}$ *выполняются следующие утверждения:*

1. $|\Phi(\mathbb{A})| = |g(\mathbb{A})|$.
2. *Если* $\mathbb{A}\,\varphi\,\mathbb{B}$ *и* $\mathbb{A}\,\varphi\,\mathbb{C}$, *то* $d(\mathbb{B}) = d(\mathbb{C})$, $g(\mathbb{B}) = g(\mathbb{C})$ *и* $\Phi(\mathbb{B}) = \Phi(\mathbb{C})$.
3. *Отношение* φ^+ *является строгим частичным порядком на* $\mathcal{P}_{\mathbb{W}}$.

4. *Для каждого* i, $0 < i < d(\mathbb{A})$, *найдется* $\mathbb{B}$, *для которого* $d(\mathbb{B}) = i$ *и* $\mathbb{A}\,\varphi^{+}\mathbb{B}$.

5. *Если* $\mathbb{A} \sqsubset \mathbb{B} \sqsubset \mathbb{C}$ *(или* $\mathbb{C} \sqsubset \mathbb{B} \sqsubset \mathbb{A}$*),* $\mathbb{A}\,\varphi\,\mathbb{C}$, *то* $d(\mathbb{C}) \leq d(\mathbb{B})$.

6. *Если* $\mathbb{A} \sqsubset \mathbb{B} \sqsubset \mathbb{C}$ *(или* $\mathbb{C} \sqsubset \mathbb{B} \sqsubset \mathbb{A}$*),* $\mathbb{A}\,\varphi\,\mathbb{C}$ *и* $\mathbb{B}\,\varphi\,\mathbb{C}$, *то* $|g(\mathbb{B})| \leq |g(\mathbb{A})|$.

Множество $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}_{\mathbb{W}}$ называется φ-замкнутым, если из $\mathbb{A} \in \mathcal{G}$ и $\mathbb{B}\,\varphi\,\mathbb{A}$ следует, что $\mathbb{B} \in \mathcal{G}$.

Определим отношение $\beta \subseteq \mathcal{P}_{\mathbb{W}} \times \mathcal{P}_{\mathbb{W}}$ следующим образом:

$$\mathbb{A}\,\beta\,\mathbb{B} \Leftrightarrow (\mathbb{A} = \mathbb{B}) \vee \exists\mathbb{C}(\mathbb{C}\,\varphi\,\mathbb{A} \wedge \mathbb{C}\,\varphi\,\mathbb{B}).$$

Определим отношение $\beta' \subseteq \mathcal{P}_{\mathbb{W}} \times \mathcal{P}_{\mathbb{W}}$ следующим образом:

$$\mathbb{A}\,\beta'\,\mathbb{B} \Leftrightarrow (\mathbb{A}\beta\mathbb{B}) \wedge \forall\mathbb{C}(\mathbb{C}\,\varphi\,\mathbb{A} \to \mathbb{C}\,\varphi\,\mathbb{B}).$$

Нетрудно видеть, что β — это отношение эквивалентности. В примере 2.1.1 верно, что

$$\begin{gathered} r^{\lfloor 3\rfloor}_{\lceil 2\rceil} s^{\lfloor 2\rfloor}_{\lceil 1\rceil}\ \beta\ r^{\lfloor 3\rfloor}_{\lceil 2\rceil} s^{\lfloor 2\rfloor}_{\lceil 1\rceil} u^{\lfloor 2\rfloor}_{\lceil 1\rceil}, \\ r^{\lfloor 3\rfloor}_{\lceil 2\rceil} s^{\lfloor 2\rfloor}_{\lceil 1\rceil}\ \beta'\ r^{\lfloor 3\rfloor}_{\lceil 2\rceil} s^{\lfloor 2\rfloor}_{\lceil 1\rceil} u^{\lfloor 2\rfloor}_{\lceil 1\rceil}, \\ \neg r^{\lfloor 3\rfloor}_{\lceil 2\rceil} s^{\lfloor 2\rfloor}_{\lceil 1\rceil}\ \beta'\ r^{\lfloor 3\rfloor}_{\lceil 2\rceil} s^{\lfloor 2\rfloor}_{\lceil 1\rceil} u^{\lfloor 2\rfloor}_{\lceil 1\rceil}, \end{gathered}$$

Для $\mathbb{A} \in \mathcal{P}_{\mathbb{W}}$ определим следующее множество:

$$\mathcal{F}_{\varphi}(\mathbb{A}) = \{\mathbb{B} \mid \exists\mathbb{C}(\mathbb{B}\,\varphi^{*}\mathbb{C} \wedge \mathbb{A}\,\beta'\,\mathbb{C}) \wedge \forall\mathbb{D}((\mathbb{B}\,\varphi^{*}\,\mathbb{D} \wedge \mathbb{A}\,\beta\,\mathbb{D}) \to \mathbb{A}\,\beta'\,\mathbb{D})\}.$$

Пусть π функция из $\mathcal{N}_{\mathbb{W}}$ в $\mathcal{P}_{\mathbb{W}}$. Пусть ψ бинарное отношение на $\mathcal{P}_{\mathbb{W}}$, определяемое следующим соотношением:

$$\mathbb{A}\,\psi\,\mathbb{B} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{B} = \pi(\mathbb{A}), & \text{если } \mathbb{A} \in \mathcal{N}_{\mathbb{W}}; \\ \mathbb{A}\varphi\mathbb{B}, & \text{если } \mathbb{A} \notin \mathcal{N}_{\mathbb{W}} \text{ и } d(\mathbb{A}) \neq 0. \end{cases}$$

Определение 2.1.1. Тройку (π, φ, ψ) будем называть сетью доказательства для слова $\mathbb{W}$.

Определим

$$\mu_\pi^-(\mathbb{A}) = \min_{\sqsubset}\{\mathbb{A}; \pi(\mathbb{A})\};$$
$$\mu_\pi^+(\mathbb{A}) = \max_{\sqsubset}\{\mathbb{A}; \pi(\mathbb{A})\}.$$

Назовем *доказательными условиями* следующие ограничения на сеть доказательства. Мы будем использовать их для характеризации выводимости секвенции $A_1 \dots A_n \to B$.

1. Функция π является биекцией между $\mathcal{N}_\mathbb{W}$ и $\mathcal{P}_\mathbb{W} \setminus \mathcal{N}_\mathbb{W}$.
2. Для любого $\mathbb{A} \in \mathcal{N}_\mathbb{W}$ верно, что $t(\pi(\mathbb{A})) = t(\mathbb{A})$.
3. $\mu_\pi^-(\mathbb{A}) \sqsubset \mu_\pi^-(\mathbb{B}) \Rightarrow \mu_\pi^+(\mathbb{A}) \sqsubset \mu_\pi^-(\mathbb{B}) \vee \mu_\pi^+(\mathbb{B}) \sqsubset \mu_\pi^+(\mathbb{A})$.
4. Отношение $(\varphi \cup \psi)^+$ иррефлексивно.
5. Для любого $\mathbb{A} \in \mathcal{N}_\mathbb{W}$, такого что $g(\mathbb{A}) \neq 0$, для любого $\mathbb{B} \in \mathcal{P}_\mathbb{W} \setminus \mathcal{N}_\mathbb{W}$, такого что $\mathbb{A}\psi^+\mathbb{B}$, верно, что $\mathbb{A}\varphi\mathbb{B} \vee \forall\mathbb{C}(\mathbb{A}\varphi\mathbb{C} \to \mathbb{C}\psi^+\mathbb{B}) \vee \forall\mathbb{B}'(\mathbb{B}\varphi\mathbb{B}' \to \exists\mathbb{C}(\mathbb{A}\varphi\mathbb{C} \wedge \mathbb{B}'\psi^+\mathbb{C}))$
6. Для любого $\mathbb{A} \in \mathcal{P}_\mathbb{W} \setminus \mathcal{N}_\mathbb{W}$ существуют $\mathbb{B} \in \mathcal{F}_\varphi(\mathbb{A})$ и $\mathbb{C} \notin \mathcal{F}_\varphi(\mathbb{A})$, такие что $\mathbb{C}\psi^*\mathbb{B}$.

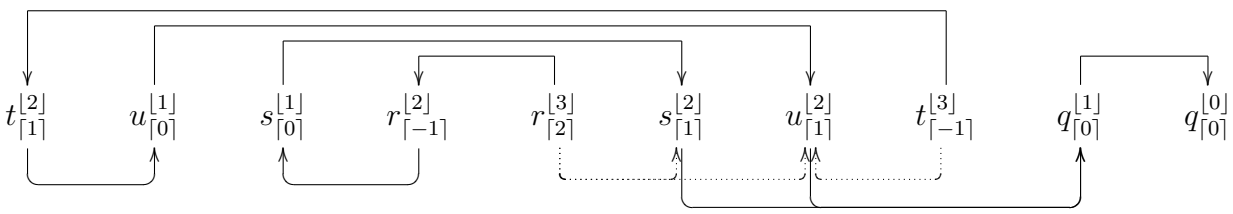
Пример 2.1.2. Рассмотрим секвенцию

$$(t\backslash u)(s/r)((((t\backslash u) \cdot s)/r)\backslash q) \to q.$$

Для этой секвенции

$$\mathbb{W} = t_{\lceil 1\rceil}^{\lfloor 2\rfloor} u_{\lceil 0\rceil}^{\lfloor 1\rfloor} s_{\lceil 0\rceil}^{\lfloor 1\rfloor} r_{\lceil -1\rceil}^{\lfloor 2\rfloor} r_{\lceil 2\rceil}^{\lfloor 3\rfloor} s_{\lceil 1\rceil}^{\lfloor 2\rfloor} u_{\lceil 1\rceil}^{\lfloor 2\rfloor} t_{\lceil -1\rceil}^{\lfloor 3\rfloor} q_{\lceil 0\rceil}^{\lfloor 1\rfloor} q_{\lceil 0\rceil}^{\lfloor 0\rfloor}.$$

Рассмотрим следующую схему:



Стрелки в нижней полуплоскости описывают отношение φ, как в предыдущем примере. Стрелки в верхней полуплоскости описывают функцию π. Сплошные стрелки (и верхние и нижние) описывают отношение ψ. Нетрудно убедится, что эта сеть доказательства удовлетворяет всем доказательным условиям. Например, проверим, что для элемента $\mathbb{A} = t^{\lfloor 2 \rfloor}_{\lceil 1 \rceil} u^{\lfloor 1 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil} s^{\lfloor 1 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil} r^{\lfloor 2 \rfloor}_{\lceil -1 \rceil} r^{\lfloor 3 \rfloor}_{\lceil 2 \rceil}$ выполнено доказательное условие (5). Действительно, для $t^{\lfloor 2 \rfloor}_{\lceil 1 \rceil} u^{\lfloor 1 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil} s^{\lfloor 1 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil} r^{\lfloor 2 \rfloor}_{\lceil -1 \rceil}$ верен третий случай, для $t^{\lfloor 2 \rfloor}_{\lceil 1 \rceil} u^{\lfloor 1 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil} s^{\lfloor 1 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil} r^{\lfloor 2 \rfloor}_{\lceil -1 \rceil} r^{\lfloor 3 \rfloor}_{\lceil 2 \rceil} s^{\lfloor 2 \rfloor}_{\lceil 1 \rceil}$ — первый, а для $\mathbb{W}$ — второй.

Подобные схемы позволяют наглядно изучать сети доказательств. Например, выполнение доказательного условия (3) соответствует утверждению „Стрелки, описывающие π, можно нарисовать в верхней полуплоскости без пересечений“. Доказательное условие (5) соответствует утверждению „Для любого элемента $\mathcal{N}_{\mathbb{W}}$, если начиная с него произвольно передвигаться по сплошным стрелкам, то мы рано или поздно обязательно окажемся в конце одной из выходящих из него пунктирных стрелок“. Более строго последнее утверждение сформулировано в лемме 2.1.3.

Лемма 2.1.2. *Пусть сеть доказательства (π, φ, ψ) удовлетворяет доказательному условию (4). Тогда для любого $\mathbb{A} \in \mathcal{P}_{\mathbb{W}}$ существует такое $\mathbb{B}$, что $d(\mathbb{B}) = 0$ и $\mathbb{A}\psi^*\mathbb{B}$.*

Доказательство. Предположим обратное: существует такое $\mathbb{A}$, что для любого $\mathbb{B}$, такого что $\mathbb{A}\psi^*\mathbb{B}$, верно, что $d(\mathbb{B}) \neq 0$. Так как для любого $\mathbb{C}$ с $d(\mathbb{C}) \neq 0$ существует $\mathbb{D}$, такое что $\mathbb{C}\psi\mathbb{D}$, можно рассмотреть последовательность $\mathbb{A} = \mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1, \ldots$, такую что $\mathbb{A}_j\psi\mathbb{A}_{j+1}$. Так как множество $\mathcal{P}_{\mathbb{W}}$ конечно, существуют i и j, такие что $\mathbb{A}_i = \mathbb{A}_j$. Тогда получается, что $\mathbb{A}_i\psi^+\mathbb{A}_i$. Противоречие. $\square$

Пусть дано некоторое $\mathbb{A} \in \mathcal{P}_{\mathbb{W}}$. Назовем полным ψ-путем с началом в $\mathbb{A}$ такую последовательность $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_k$, что $\mathbb{A}_1 = \mathbb{A}$, $d(\mathbb{A}_k) = 0$ и $\mathbb{A}_{i-1}\psi\mathbb{A}_i$ для всех $1 < i \leq k$. Из леммы 2.1.2 следует, что для любого элемента $\mathcal{P}_{\mathbb{W}}$ существует полный ψ-путь с началом в нем.

Лемма 2.1.3. *Пусть сеть доказательства (π, φ, ψ) удовлетворяет доказательным условиям (1) и (4). Тогда доказательное условие (5) эквивалентно следующему утверждению: для всех $\mathbb{A} \in \mathcal{P}_{\mathbb{W}}$ с $g(\mathbb{A}) \neq 0$, для любого полного ψ-пути $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_k$ с началом в $\mathbb{A}$, для всех $l < d(\mathbb{A})$, если существует $\mathbb{B}$ с $d(\mathbb{B}) = l$, такое что $\mathbb{A}\varphi^+\mathbb{B}$, то существует $j \leq k$, такое что $\mathbb{A}\varphi^+\mathbb{A}_j$ и $d(\mathbb{A}_j) = l$.*

Доказательство. Достаточно доказать утверждение леммы для $\mathbb{A} \in \mathcal{N}_{\mathbb{W}}$ и $l = d(\mathbb{A}) - 1$.

Пусть сеть доказательства (π, φ, ψ) удовлетворяет доказательному условию (5). Рассмотрим полный ψ-путь $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_k$ с началом в $\mathbb{A}$. Наша цель — найти j, такое что $\mathbb{A}\varphi\mathbb{A}_j$. Такое j должно быть четным. Рассмотрим $j = 2$. Так как $(\varphi \cup \psi)^+$ иррефлексивно, для любого $\mathbb{B}$, такого что $\mathbb{A}\varphi\mathbb{B}$, $\neg(\mathbb{B}\psi^+\mathbb{A})$, а значит, и $\neg(\mathbb{B}\psi^+\mathbb{A}_2)$. Значит, из выполнения доказательного условия (5) для $\mathbb{A}$ и $\mathbb{A}_2$ следует, что либо $\mathbb{A}\varphi\mathbb{A}_2$, и мы нашли требуемое j, либо $\mathbb{A}_3\psi^+\mathbb{B}$, для некоторого $\mathbb{B}$, такого что $\mathbb{A}\varphi\mathbb{B}$. В этом случае для этого же $\mathbb{B}$ верно, что $\mathbb{A}_4\psi^*\mathbb{B}$, а значит, либо $\mathbb{A}_4 = \mathbb{B}$, либо $\neg(\mathbb{B}\psi^+\mathbb{A}_4)$. Таким образом двигаясь по последовательности, мы раньше встретим $\mathbb{A}_{2i}$, такое что $\mathbb{A}\varphi\mathbb{A}_{2i}$, чем дойдем до $\mathbb{A}_k$, для которого верно, что если $\mathbb{A}\varphi\mathbb{B}$, то $\mathbb{B}\psi^+\mathbb{A}_k$.

В другую сторону очевидно. □

Лемма 2.1.4. *Если выполняются доказательные условия (1), (4) и (5), $\mathbb{A}\varphi^+\mathbb{B}$ и $\mathbb{B} \in \mathcal{N}_{\mathbb{W}}$, то $\mathbb{A}\psi^+\mathbb{B}$.*

Доказательство. Согласно лемме 2.1.3 существует $\mathbb{C}$ такое, что $\mathbb{A}\varphi^*\mathbb{C}$, $\mathbb{C}\varphi\mathbb{B}$ и $\mathbb{A}\psi^*\mathbb{C}$. Так как $\mathbb{B} \in \mathcal{N}_{\mathbb{W}}$, имеем $\mathbb{C} \in \mathcal{P}_{\mathbb{W}} \setminus \mathcal{N}_{\mathbb{W}}$, откуда $\mathbb{C}\psi\mathbb{B}$, а значит, и $\mathbb{A}\psi^+\mathbb{B}$. □

Лемма 2.1.5. *Рассмотрим секвенцию $\Gamma(A\backslash B)\Delta \to C$. Предположим, что для*

$$\mathbb{W} = [\![\Gamma]\!]^{\langle 0\rangle}[\![(A\backslash B)]\!]^{\langle 0\rangle}[\![\Delta]\!]^{\langle 0\rangle}[\![C]\!]$$

существует сеть доказательства (π, φ, ψ), *удовлетворяющая доказательным условиям (1), (4) и (5). Рассмотрим слово* $\mathbb{A} \in ([\![\Gamma]\!]^{\langle 0\rangle}, [\![\Gamma]\!]^{\langle 0\rangle}([\![A]\!]^{\langle -h(B)\rangle})^{\langle 0\rangle}]_{\sqsubset}$. *Тогда если* $\mathbb{A} \in \mathcal{N}_{\mathbb{W}}$, *то*

$$\pi(\mathbb{A}) \notin ([\![\Gamma]\!]^{\langle 0\rangle}([\![A]\!]^{\langle -h(B)\rangle})^{\langle 0\rangle}, [\![\Gamma]\!]^{\langle 0\rangle}[\![(A\backslash B)]\!]^{\langle 0\rangle}]_{\sqsubset},$$

а если $\mathbb{A} \in \mathcal{P}_{\mathbb{W}} \setminus \mathcal{N}_{\mathbb{W}}$, *то*

$$\pi^{-1}(\mathbb{A}) \notin ([\![\Gamma]\!]^{\langle 0\rangle}([\![A]\!]^{\langle -h(B)\rangle})^{\langle 0\rangle}, [\![\Gamma]\!]^{\langle 0\rangle}[\![(A\backslash B)]\!]^{\langle 0\rangle}]_{\sqsubset}.$$

Аналогично, для секвенции $\Gamma(B/A)\Delta \to C$ *и*

$$\mathbb{A} \in ([\![\Gamma]\!]^{\langle 0\rangle}, [\![\Gamma]\!]^{\langle 0\rangle}[\![B]\!]^{\langle 0\rangle}]_{\sqsubset},$$

если $\mathbb{A} \in \mathcal{N}_{\mathbb{W}}$, *то* $\pi(\mathbb{A}) \notin ([\![\Gamma]\!]^{\langle 0\rangle}[\![B]\!]^{\langle 0\rangle}, [\![\Gamma]\!]^{\langle 0\rangle}[\![(B/A)]\!]^{\langle 0\rangle}]_{\sqsubset}$, *а если* $\mathbb{A} \in \mathcal{P}_{\mathbb{W}} \setminus \mathcal{N}_{\mathbb{W}}$, *то* $\pi^{-1}(\mathbb{A}) \notin ([\![\Gamma]\!]^{\langle 0\rangle}[\![B]\!]^{\langle 0\rangle}, [\![\Gamma]\!]^{\langle 0\rangle}[\![(B/A)]\!]^{\langle 0\rangle}]_{\sqsubset}$.

Доказательство. Пусть дана секвенция $\Gamma(A\backslash B)\Delta \to C$. Рассмотрим $\mathbb{A} \in ([\![\Gamma]\!]^{\langle 0\rangle}, [\![\Gamma]\!]^{\langle 0\rangle}([\![A]\!]^{\langle -h(B)\rangle})^{\langle 0\rangle}]_{\sqsubset}$. Предположим, что $\pi(\mathbb{A}) = \mathbb{B} \in ([\![\Gamma]\!]^{\langle 0\rangle}([\![A]\!]^{\langle -h(B)\rangle})^{\langle 0\rangle}, [\![\Gamma]\!]^{\langle 0\rangle}[\![(A\backslash B)]\!]^{\langle 0\rangle}]_{\sqsubset}$. В этом случае для любых $\mathbb{A}', \mathbb{B}'$, таких что $d(\mathbb{A}') = d(\mathbb{B}') = 2$, $\mathbb{A}\varphi^*\mathbb{A}'$, $\mathbb{B}\varphi^*\mathbb{B}'$, верно, что $\neg(\mathbb{A}\varphi^*\mathbb{B}')$, $\neg(\mathbb{B}\varphi^*\mathbb{A}')$ и существует $\mathbb{C}_1$, такое что $\mathbb{A}'\varphi\mathbb{C}_1$ и $\mathbb{B}'\varphi\mathbb{C}_1$.

Рассмотрим полный ψ-путь $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_k$ с началом в $\mathbb{A}$. Согласно лемме 2.1.3 существуют наименьшие i и j, такие что $d(\mathbb{A}_i) = d(\mathbb{A}_j) = 2$, $\mathbb{A}\varphi^*\mathbb{A}_i$, $\mathbb{B}\varphi^*\mathbb{A}_j$. Также из сказанного выше следует, что $i \neq j$.

Пусть $i < j$. Тогда рассмотрим полный ψ-путь

$$\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_i, \mathbb{C}_1, \ldots, \mathbb{C}_l,$$

где $\mathbb{A}_i\varphi\mathbb{C}_1$ и $\mathbb{B}\varphi^*\mathbb{C}_1$. Согласно лемме 2.1.3 существует m, такое что $d(\mathbb{C}_m) = 2$ и $\mathbb{B}\varphi^*\mathbb{C}_m$. Но в этом случае получается $\mathbb{C}_1\psi^+\mathbb{C}_1$, что противоречит доказательному условию (4). Если же $j < i$, то рассмотрим полный ψ-путь $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_j, \mathbb{C}_1, \ldots, \mathbb{C}_l$, где $\mathbb{A}_j\varphi\mathbb{C}_1$ и $\mathbb{A}\varphi^*\mathbb{C}_1$. Согласно лемме 2.1.3 существует m, такое что $d(\mathbb{C}_m) = 2$ и $\mathbb{A}\varphi^*\mathbb{C}_m$. Но в этом случае также получается $\mathbb{C}_1\psi^+\mathbb{C}_1$, что противоречит доказательному условию (4).

Остальные случаи разбираются аналогично. $\square$

2.2 Критерий выводимости

Пусть дана секвенция $A_1 \dots A_n \to B$. Пусть

$$\mathbb{W} = [\![A_1]\!]^{\langle 0 \rangle} \dots [\![A_n]\!]^{\langle 0 \rangle} [\![B]\!].$$

Лемма 2.2.1. *Если* $\mathrm{L}^* \vdash A_1 \dots A_n \to B$, *то для соответствующего слова* $\mathbb{W}$ *существует сеть доказательства* (π, φ, ψ), *удовлетворяющая доказательным условиям (1)–(5).*

Если $\mathrm{L} \vdash A_1 \dots A_n \to B$, *то для* $\mathbb{W}$ *существует сеть доказательства* (π, φ, ψ), *удовлетворяющая доказательным условиям (1)–(6).*

Доказательство. Предположим, что $\mathrm{L}^{(*)} \vdash A_1 \dots A_n \to B$. Индукция по длине вывода.

Если секвенция имеет вид $p \to p$, то $\mathbb{W} = p_{\lceil 0 \rceil}^{\lfloor 1 \rfloor} p_{\lceil 0 \rceil}^{\lfloor 0 \rfloor}$, $\mathcal{P}_{\mathbb{W}} = \{p_{\lceil 0 \rceil}^{\lfloor 1 \rfloor}, p_{\lceil 0 \rceil}^{\lfloor 1 \rfloor} p_{\lceil 0 \rceil}^{\lfloor 0 \rfloor}\}$, $\mathcal{N}_{\mathbb{W}} = \{p_{\lceil 0 \rceil}^{\lfloor 1 \rfloor}\}$, отношение φ пусто и сеть доказательства с таким π, что $\pi(p_{\lceil 0 \rceil}^{\lfloor 1 \rfloor}) = p_{\lceil 0 \rceil}^{\lfloor 1 \rfloor} p_{\lceil 0 \rceil}^{\lfloor 0 \rfloor}$, удовлетворяет всем необходимым доказательным условиям.

Применение правила $(\cdot \to)$ не меняет $\mathbb{W}$. Следовательно, если последним шагом доказательства было применение этого правила, в качестве сети доказательства, удовлетворяющей всем необходимым доказательным условиям, можно взять существующую по предположению индукции сеть доказательства для секвенции, стоящей в посылке этого правила.

Рассмотрим остальные случаи.

1. Пусть последним шагом доказательства $A_1 \dots A_n \to B$ было применение правила $(\to /)$. Тогда $B = (C/D)$, $\mathbb{W} = [\![A_1]\!]^{\langle 0 \rangle} \dots [\![A_n]\!]^{\langle 0 \rangle} [\![D]\!]^{\langle h(C) \rangle} [\![C]\!]$, $\mathrm{L}^{(*)} \vdash A_1 \dots A_n D \to C$, и, по предположению индукции, для

$$\mathbb{W}' = [\![A_1]\!]^{\langle 0 \rangle} \dots [\![A_n]\!]^{\langle 0 \rangle} [\![D]\!]^{\langle 0 \rangle} [\![C]\!],$$

существует сеть доказательства (π', φ', ψ'), удовлетворяющая всем необходимым доказательным условиям. Пусть $\mathbb{B} = [\![A_1]\!]^{\langle 0\rangle} \dots [\![A_n]\!]^{\langle 0\rangle}$, $\mathbb{C} = \mathbb{B}[\![D]\!]^{\langle 0\rangle}$. Рассмотрим отображение $\alpha : \mathcal{P}_{\mathbb{W}'} \to \mathcal{P}_{\mathbb{W}}$,

$$\alpha(\mathbb{A}) = \begin{cases} \mathbb{A}, & \text{если } \mathbb{A} \sqsubseteq \mathbb{B}; \\ \mathbb{B}((\mathbb{B} \diagdown \mathbb{A})^{(\langle 0\rangle)^{-1}})^{\langle h(C)\rangle}, & \text{если } \mathbb{B} \sqsubset \mathbb{A} \sqsubseteq \mathbb{C}; \\ \mathbb{B}[\![D]\!]^{\langle h(C)\rangle}(\mathbb{C} \diagdown \mathbb{A}), & \text{если } \mathbb{C} \sqsubset \mathbb{A}. \end{cases}$$

Положим $\pi(\mathbb{A}) = \alpha(\pi'(\alpha^{-1}(\mathbb{A})))$.

2. Пусть последним шагом доказательства $A_1 \dots A_n \to B$ было применение правила $(\to \backslash)$. Тогда $B = (C \backslash D)$, $\mathbb{W} = [\![A_1]\!]^{\langle 0\rangle} \dots [\![A_n]\!]^{\langle 0\rangle} [\![D]\!][\![C]\!]^{\langle -h(D)\rangle}$, $\mathrm{L}^{(*)} \vdash CA_1 \dots A_n \to D$, и, по предположению индукции, для $\mathbb{W}'$, где

$$\mathbb{W}' = [\![C]\!]^{\langle 0\rangle}[\![A_1]\!]^{\langle 0\rangle} \dots [\![A_n]\!]^{\langle 0\rangle}[\![D]\!],$$

существует сеть доказательства (π', φ', ψ'), удовлетворяющая всем необходимым доказательным условиям. Рассмотрим отображение $\alpha : \mathcal{P}_{\mathbb{W}'} \to \mathcal{P}_{\mathbb{W}}$:

$$\alpha(\mathbb{A}) = \begin{cases} [\![A_1]\!]^{\langle 0\rangle} \dots [\![A_n]\!]^{\langle 0\rangle}[\![D]\!](\mathbb{A}^{(\langle 0\rangle)^{-1}})^{\langle -h(D)\rangle}, & \text{если } \mathbb{A} \sqsubseteq [\![C]\!]^{\langle 0\rangle}; \\ [\![C]\!]^{\langle 0\rangle} \diagdown \mathbb{A}, & \text{если } [\![C]\!]^{\langle 0\rangle} \sqsubset \mathbb{A}. \end{cases}$$

Положим $\pi(\mathbb{A}) = \alpha(\pi'(\alpha^{-1}(\mathbb{A})))$.

3. Пусть последним шагом доказательства $A_1 \dots A_n \to B$ было применение правила $(/ \to)$. Тогда $A_1 \dots A_n \to B$ имеет вид

$$C_1 \dots C_{i-1}(C_i/D)D_1 \dots D_k C_{i+1} \dots C_l \to C,$$

причем $\mathrm{L}^{(*)} \vdash C_1 \dots C_l \to C$ и $\mathrm{L}^{(*)} \vdash D_1 \dots D_k \to D$.

Рассмотрим $\mathbb{W}' = [\![C_1]\!]^{\langle 0\rangle} \dots [\![C_l]\!]^{\langle 0\rangle}[\![C]\!]$ и

$$\mathbb{W}'' = [\![D_1]\!]^{\langle 0\rangle} \dots [\![D_k]\!]^{\langle 0\rangle}[\![D]\!].$$

По предположению индукции существуют сети доказательства (π', φ', ψ') и $(\pi'', \varphi'', \psi'')$, удовлетворяющие всем необходимым доказательным условиям.

Пусть $\mathbb{C} = [\![C_1]\!]^{\langle 0\rangle} \dots [\![C_i]\!]^{\langle 0\rangle}$ and $\mathbb{D} = [\![D_1]\!]^{\langle 0\rangle} \dots [\![D_k]\!]^{\langle 0\rangle}$. Рассмотрим отображения $\alpha' \colon \mathcal{P}_{\mathbb{W}'} \to \mathcal{P}_{\mathbb{W}}$ и $\alpha'' \colon \mathcal{P}_{\mathbb{W}''} \to \mathcal{P}_{\mathbb{W}}$:

$$\alpha'(\mathbb{A}) = \begin{cases} \mathbb{A}, & \text{если } \mathbb{A} \sqsubseteq \mathbb{C}; \\ \mathbb{C}([\![D]\!]^{\langle h(C_i)\rangle})^{\langle 0\rangle}\mathbb{D}(\mathbb{C} \diagdown \mathbb{A}), & \text{если } \mathbb{C} \sqsubset \mathbb{A}; \end{cases}$$

$$\alpha''(\mathbb{A}) = \begin{cases} \mathbb{C}([\![D]\!]^{\langle h(C_i)\rangle})^{\langle 0\rangle}\mathbb{A}, & \text{если } \mathbb{A} \sqsubseteq \mathbb{D}; \\ \mathbb{C}((\mathbb{D} \diagdown \mathbb{A})^{\langle h(C_i)\rangle})^{\langle 0\rangle}, & \text{если } \mathbb{D} \sqsubset \mathbb{A}. \end{cases}$$

Положим

$$\pi(\mathbb{A}) = \begin{cases} \alpha'(\pi'(\alpha'^{-1}(\mathbb{A}))), & \text{если } \mathbb{A} \sqsubseteq \mathbb{C} \text{ или } \mathbb{C}([\![D]\!]^{\langle h(C_i)\rangle})^{\langle 0\rangle}\mathbb{D} \sqsubset \mathbb{A}; \\ \alpha''(\pi''(\alpha''^{-1}(\mathbb{A}))), & \text{если } \mathbb{C} \sqsubset \mathbb{A} \sqsubseteq \mathbb{C}([\![D]\!]^{\langle h(C_i)\rangle})^{\langle 0\rangle}\mathbb{D}. \end{cases}$$

4. Пусть последним шагом доказательства $A_1 \dots A_n \to B$ было применение правила $(\backslash \to)$. Тогда $A_1 \dots A_n \to B$ имеет вид

$$C_1 \dots C_{i-1} D_1 \dots D_k (D \backslash C_i) \dots C_l \to C,$$

причем $\mathrm{L}^{(*)} \vdash C_1 \dots C_l \to C$ и $\mathrm{L}^{(*)} \vdash D_1 \dots D_k \to D$.

Рассмотрим $\mathbb{W}' = [\![C_1]\!]^{\langle 0\rangle} \dots [\![C_l]\!]^{\langle 0\rangle}[\![C]\!]$ и

$$\mathbb{W}'' = [\![D_1]\!]^{\langle 0\rangle} \dots [\![D_k]\!]^{\langle 0\rangle}[\![D]\!].$$

По предположению индукции существуют существуют сети доказательства (π', φ', ψ') и $(\pi'', \varphi'', \psi'')$, удовлетворяющие всем необходимым доказательным условиям.

Пусть $\mathbb{C} = [\![C_1]\!]^{\langle 0\rangle} \dots [\![C_{i-1}]\!]^{\langle 0\rangle}$ и $\mathbb{D} = [\![D_1]\!]^{\langle 0\rangle} \dots [\![D_k]\!]^{\langle 0\rangle}$. Рассмотрим

отображения $\alpha'\colon \mathcal{P}_{\mathbb{W}'} \to \mathcal{P}_{\mathbb{W}}$ и $\alpha''\colon \mathcal{P}_{\mathbb{W}''} \to \mathcal{P}_{\mathbb{W}}$:

$$\alpha'(\mathbb{A}) = \begin{cases} \mathbb{A}, & \text{если } \mathbb{A} \sqsubseteq \mathbb{C}; \\ \mathbb{C}\mathbb{D}([\![D]\!]^{\langle -h(C_i)\rangle})^{\langle 0\rangle}(\mathbb{C}\diagdown\mathbb{A}), & \text{если } \mathbb{C} \sqsubset \mathbb{A}; \end{cases}$$

$$\alpha''(\mathbb{A}) = \begin{cases} \mathbb{C}\mathbb{A}, & \text{если } \mathbb{A} \sqsubseteq \mathbb{D}; \\ \mathbb{C}\mathbb{D}((\mathbb{D}\diagdown\mathbb{A})^{\langle -h(C_i)\rangle})^{\langle 0\rangle}, & \text{если } \mathbb{D} \sqsubset \mathbb{A}. \end{cases}$$

Положим

$$\pi(\mathbb{A}) = \begin{cases} \alpha'(\pi'(\alpha'^{-1}(\mathbb{A}))), & \text{если } \mathbb{A} \sqsubseteq \mathbb{C} \text{ или } \mathbb{C}\mathbb{D}([\![D]\!]^{\langle -h(C_i)\rangle})^{\langle 0\rangle} \sqsubset \mathbb{A}; \\ \alpha''(\pi''(\alpha''^{-1}(\mathbb{A}))), & \text{если } \mathbb{C} \sqsubset \mathbb{A} \sqsubseteq \mathbb{C}\mathbb{D}([\![D]\!]^{\langle -h(C_i)\rangle})^{\langle 0\rangle}. \end{cases}$$

5. Пусть последним шагом доказательства $A_1 \dots A_n \to B$ было применение правила $(\to \cdot)$. Тогда $A_1 \dots A_n \to B$ имеет вид

$$C_1 \dots C_l D_1 \dots D_k \to C \cdot D,$$

причем $\mathrm{L}^{(*)} \vdash C_1 \dots C_l \to C$ и $\mathrm{L}^{(*)} \vdash D_1 \dots D_k \to D$.

Рассмотрим $\mathbb{W}' = [\![C_1]\!]^{\langle 0\rangle} \dots [\![C_l]\!]^{\langle 0\rangle}[\![C]\!]$ и

$$\mathbb{W}'' = [\![D_1]\!]^{\langle 0\rangle} \dots [\![D_k]\!]^{\langle 0\rangle}[\![D]\!].$$

По предположению индукции существуют сети доказательства (π', φ', ψ') и $(\pi'', \varphi'', \psi'')$, удовлетворяющие всем необходимым доказательным условиям.

Пусть $\mathbb{C} = [\![C_1]\!]^{\langle 0\rangle} \dots [\![C_l]\!]^{\langle 0\rangle}$. Рассмотрим отображения $\alpha'\colon \mathcal{P}_{\mathbb{W}'} \to \mathcal{P}_{\mathbb{W}}$ и $\alpha''\colon \mathcal{P}_{\mathbb{W}''} \to \mathcal{P}_{\mathbb{W}}$:

$$\alpha'(\mathbb{A}) = \begin{cases} \mathbb{A}, & \text{если } \mathbb{A} \sqsubseteq \mathbb{C}; \\ \mathbb{C}\mathbb{W}''(\mathbb{C}\diagdown\mathbb{A}), & \text{если } \mathbb{C} \sqsubset \mathbb{A}; \end{cases}$$

$$\alpha''(\mathbb{A}) = \mathbb{C}\mathbb{A}.$$

Положим

$$\pi(\mathbb{A}) = \begin{cases} \alpha'(\pi'(\alpha'^{-1}(\mathbb{A}))), & \text{если } \mathbb{A} \sqsubseteq \mathbb{C} \text{ или } \mathbb{C}\mathbb{W}'' \sqsubset \mathbb{A}; \\ \alpha''(\pi''(\alpha''^{-1}(\mathbb{A}))), & \text{если } \mathbb{C} \sqsubset \mathbb{A} \sqsubseteq \mathbb{C}\mathbb{W}''. \end{cases}$$

Сеть доказательства с такой π удовлетворяет всем необходимым доказательным условиям. $\square$

Лемма 2.2.2. *Если секвенции $A_1 \dots A_n \to B$ и $C_1 \dots C_k \to D$ структурно эквивалентны и для $\mathbb{W} = [\![A_1]\!]^{\langle 0 \rangle} \dots [\![A_n]\!]^{\langle 0 \rangle} [\![B]\!]$ существует сеть доказательства (π, φ, ψ), удовлетворяющая доказательным условиям (1)–(5), то для*

$$\mathbb{W}' = [\![C_1]\!]^{\langle 0 \rangle} \dots [\![C_k]\!]^{\langle 0 \rangle} [\![D]\!]$$

существует сеть (π', φ', ψ'), также удовлетворяющая доказательным условиям (1)–(5). Если секвенция $C_1 \dots C_k \to D$ неупрощаема и для (π, φ, ψ) выполнялось доказательное условие (6), то для (π', φ', ψ') оно также будет выполняться.

Доказательство. Пусть (π, φ, ψ) — сеть доказательства для $\mathbb{W}$, удовлетворяющая доказательным условиям (1)–(5).Так как секвенция $C_1 \dots C_k \to D$ структурно эквивалентна исходной секвенции, существует последовательность действий (упрощения типов, применение правил), превращающая одну секвенцию в другую. Будем строить сети доказательства, удовлетворяющие доказательным условиям (1)–(5), для всех промежуточных секвенций.

Упрощение типов, входящих в секвенцию, правило $(\cdot \to)$ и операции, обратные к перечиленным, не меняют строки из атомов, соответствующей текущей секвенции. Для секвенции, получаемой применением правил $(\to /)$ и $(\to \backslash)$ или операций, обратных к ним, новая сеть доказательства строится так же как в доказательстве предыдущей леммы при разборе соответствующих случаев. Полученная сеть доказательства для $\mathbb{W}'$ будет удовлетворять доказательным условиям (1)–(5). Кроме того между $\mathcal{P}_{\mathbb{W}}$ и $\mathcal{P}_{\mathbb{W}'}$ существует взаимнооднозначное отображение сохраняющее отношение ψ. Оно получается композицией всех вспомогательных отображений α, для переходов, соответствующих применениям правил $(\to /)$ и $(\to \backslash)$ или операций, обратных к ним.

Пусть сеть доказательства (π, φ, ψ) удовлетворяет доказательному условию (6), а секвенция $C_1 \dots C_k \to D$ неупрощаема. В этом случае она может получена из секвенции $A_1 \dots A_n \to B$ только операциями упрощения. При этих операциях построенные сети доказательства для промежуточных секвенций будут удовлетворять доказательному условию (6). $\square$

Пусть (π, φ, ψ) — некоторая сеть доказательства для $\mathbb{W}$.

Будем называть β-кластерами классы эквивалентности по отношению β. У элементов одного β-кластера совпадают значения функции d, поэтому можно говорить о четных и нечетных β-кластерах. Также у элементов одного β-кластера совпадают значения функций g и Φ, поэтому для произвольного β-кластера $\mathcal{E}$ можно ввести обозначения $g(\mathcal{E})$ и $\Phi(\mathcal{E})$.

Рассмотрим сеть доказательства (π, φ, ψ). Пусть $\mathcal{B}$ — множество четных β-кластеров. Если $\mathcal{E} \in \mathcal{B}$, то $\mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}) = \{\mathbb{A} | \exists \mathbb{B} \in \mathcal{E}(\mathbb{A}\psi^*\mathbb{B})\}$ и $\mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}) = \{\mathbb{A} | \exists \mathbb{B} \in \mathcal{E}(\mathbb{A}\psi^*\mathbb{B})\}$.

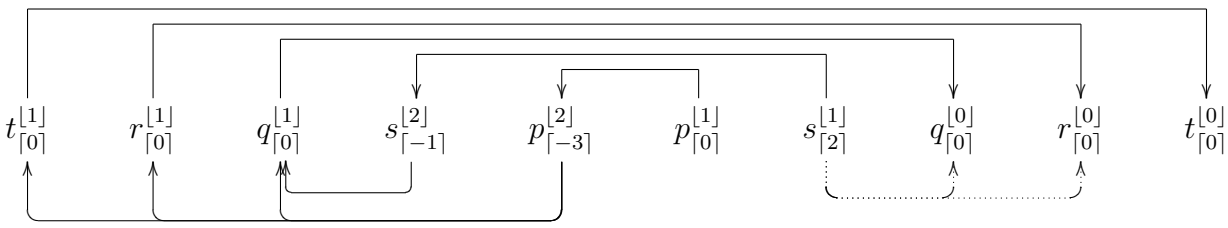
Введем на $\mathcal{B}$ следующие отношения:

$$\mathcal{E}_1 \omega_1 \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow \exists \mathbb{A} \in (\mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_1) \cap \mathcal{N}_\mathbb{W}) \cup \Phi(\mathcal{E}_1) \exists \mathbb{B} \in \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_2) \setminus \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_1)(\mathbb{A}\varphi\mathbb{B}),$$

$$\mathcal{E}_1 \omega_2 \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow \exists \mathbb{A} \in \Phi(\mathcal{E}_2)(\mathbb{A} \in \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_1)) \wedge \exists \mathbb{B} \in \Phi(\mathcal{E}_2)(\mathbb{B} \notin \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_1)),$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 \omega_3 \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow\ & (\Phi(\mathcal{E}_1) \subset \Phi(\mathcal{E}_2) \wedge d(\mathcal{E}_1) > 0) \vee \\ & \vee (\Phi(\mathcal{E}_1) = \Phi(\mathcal{E}_2) \wedge \forall \mathbb{A} \in \mathcal{E}_1 \forall \mathbb{B} \in \mathcal{E}_2((g(\mathcal{E}_2) \geq 0 \wedge \mathbb{B} \sqsubset \mathbb{A}) \vee \\ & \vee (g(\mathcal{E}_1) < 0 \wedge \mathbb{A} \sqsubset \mathbb{B}))).\end{aligned}$$

Пример 2.2.1. Рассмотрим секвенцию $((t \cdot (r \cdot (q/s)))/p)\ p \to (t \cdot ((r \cdot q)/s))$. Для этой секвенции $\mathbb{W} = t^{\lfloor 1 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil} r^{\lfloor 1 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil} q^{\lfloor 1 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil} s^{\lfloor 2 \rfloor}_{\lceil -1 \rceil} p^{\lfloor 2 \rfloor}_{\lceil -3 \rceil} p^{\lfloor 1 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil} s^{\lfloor 1 \rfloor}_{\lceil 2 \rceil} q^{\lfloor 0 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil} r^{\lfloor 0 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil} t^{\lfloor 0 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil}$. Схема, аналогичная схеме из примера 2.1.2 будет выглядеть следующим образом:



Введем следующие обозначения для элементов множества $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_s &= \{t^{\lfloor 1 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil} r^{\lfloor 1 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil} q^{\lfloor 1 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil} s^{\lfloor 2 \rfloor}_{\lceil -1 \rceil}\},\\
\mathcal{E}_p &= \{t^{\lfloor 1 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil} r^{\lfloor 1 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil} q^{\lfloor 1 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil} s^{\lfloor 2 \rfloor}_{\lceil -1 \rceil} p^{\lfloor 2 \rfloor}_{\lceil -3 \rceil}\},\\
\mathcal{E}_{qr} &= \{t^{\lfloor 1 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil} r^{\lfloor 1 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil} q^{\lfloor 1 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil} s^{\lfloor 2 \rfloor}_{\lceil -1 \rceil} p^{\lfloor 2 \rfloor}_{\lceil -3 \rceil} p^{\lfloor 1 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil} s^{\lfloor 1 \rfloor}_{\lceil 2 \rceil} q^{\lfloor 0 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil},\\
&\quad t^{\lfloor 1 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil} r^{\lfloor 1 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil} q^{\lfloor 1 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil} s^{\lfloor 2 \rfloor}_{\lceil -1 \rceil} p^{\lfloor 2 \rfloor}_{\lceil -3 \rceil} p^{\lfloor 1 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil} s^{\lfloor 1 \rfloor}_{\lceil 2 \rceil} q^{\lfloor 0 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil} r^{\lfloor 0 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil}\},\\
\mathcal{E}_t &= \{t^{\lfloor 1 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil} r^{\lfloor 1 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil} q^{\lfloor 1 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil} s^{\lfloor 2 \rfloor}_{\lceil -1 \rceil} p^{\lfloor 2 \rfloor}_{\lceil -3 \rceil} p^{\lfloor 1 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil} s^{\lfloor 1 \rfloor}_{\lceil 2 \rceil} q^{\lfloor 0 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil} r^{\lfloor 0 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil} t^{\lfloor 0 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil}\}.
\end{aligned}$$

Тогда отношения ω_1, ω_2 и ω_3 будут такими, как представлено на следующей схеме:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}_s \arrow[r, "\omega_3"] \arrow[d, "\omega_1"'] & \mathcal{E}_p \\
\mathcal{E}_{qr} \arrow[ur, "\omega_2"] & \mathcal{E}_t \arrow[l, "\omega_3"] \arrow[u, "\omega_2"']
\end{tikzcd}$$

Лемма 2.2.3. *Если сеть доказательства (π, φ, ψ) удовлетворяет доказательным условиям (1), (4) и (5), то выполняются следующие утверждения:*

1. $\mathcal{E}_1 \omega_1 \mathcal{E}_2 \Rightarrow \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_1) \subset \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_2)$;
2. $\mathcal{E}_1 \omega_2 \mathcal{E}_2 \Rightarrow \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_2) \subset \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_1)$;
3. $\mathcal{E}_1 \omega_3 \mathcal{E}_2 \wedge \mathcal{E}_2 \omega_1 \mathcal{E}_3 \Rightarrow \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_1) \subset \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_3)$;
4. $\mathcal{E}_1 \omega_2 \mathcal{E}_2 \wedge \mathcal{E}_2 \omega_1 \mathcal{E}_3 \Rightarrow \mathcal{E}_1 \omega_1 \mathcal{E}_3$;
5. $\mathcal{E}_1 \omega_2 \mathcal{E}_2 \wedge \mathcal{E}_2 \omega_3 \mathcal{E}_3 \Rightarrow \mathcal{E}_1 \omega_2 \mathcal{E}_3$;
6. $\mathcal{E}_1 \omega_3 \mathcal{E}_2 \wedge \mathcal{E}_2 \omega_3 \mathcal{E}_3 \Rightarrow \mathcal{E}_1 \omega_3 \mathcal{E}_3$.

Доказательство. 1. Так как $\mathcal{E}_1 \omega_1 \mathcal{E}_2$, по определению, существуют такие $\mathbb{A} \in (\mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_1) \cap \mathcal{N}_{\mathbb{W}}) \cup \Phi(\mathcal{E}_1)$ и $\mathbb{B} \in \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_2) \setminus \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_1)$, что $\mathbb{A} \varphi \mathbb{B}$. Существует $\mathbb{A}' \in \Phi(\mathcal{E}_1)$, такое что $\mathbb{A} \psi^* \mathbb{A}'$. Полный ψ-путь с началом в $\mathbb{A}$ и проходящий через $\mathbb{A}'$, согласно лемме 2.1.3, проходит через некоторое $\mathbb{B}'$, такое что $\mathbb{B}' \beta \mathbb{B}$. Так как для любого $\mathbb{C} \in \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_1)$ верно, что $\mathbb{C} \psi^* \mathbb{A}'$, а $\mathbb{B}' \in \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_2)$, имеем $\mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_1) \subset \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_2)$.

2. Так как $\mathcal{E}_1\omega_2\mathcal{E}_2$, имеем $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_2)$, а значит, и $\mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_2) \subset \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_1)$.

3. Так как $\mathcal{E}_2\omega_1\mathcal{E}_3$, значит, по определению, существуют такие $\mathbb{A} \in (\mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_2) \cap \mathcal{N}_\mathbb{W}) \cup \Phi(\mathcal{E}_2)$ и $\mathbb{B} \in \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_3) \setminus \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_2)$, что $\mathbb{A}\varphi\mathbb{B}$. Существует $\mathbb{A}' \in \Phi(\mathcal{E}_2)$, такое что $\mathbb{A}\psi^*\mathbb{A}'$. Выберем такое $\mathbb{A}'$, что $\mathbb{A}' \in \Phi(\mathcal{E}_1)$. Полный ψ-путь с началом в $\mathbb{A}$ и проходящий через $\mathbb{A}'$, согласно лемме 2.1.3, проходит через некоторое $\mathbb{B}'$, такое что $\mathbb{B}'\beta\mathbb{B}$. Так как для любого $\mathbb{C} \in \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_1)$ верно, что $\mathbb{C}\psi^*\mathbb{A}'$, а $\mathbb{B}' \in \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_3)$, имеем $\mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_1) \subset \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_3)$. Если такое $\mathbb{A}'$ выбрать невозможно, значит, $\mathbb{A}' = \mathbb{A} \in \Phi(\mathcal{E}_2) \setminus \Phi(\mathcal{E}_1)$. В этом случае, для любого $\mathbb{C} \in \Phi(\mathcal{E}_1)$ верно, что $\mathbb{C}\varphi\mathbb{B}$, а значит, $\mathcal{E}_1\omega_1\mathcal{E}_3$ и $\mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_1) \subset \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_3)$.

4. Так как $\mathcal{E}_2\omega_1\mathcal{E}_3$, значит, по определению, существуют такие $\mathbb{A} \in (\mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_2) \cap \mathcal{N}_\mathbb{W}) \cup \Phi(\mathcal{E}_2)$ и $\mathbb{B} \in \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_3) \setminus \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_2)$, что $\mathbb{A}\varphi\mathbb{B}$. Если $\mathbb{A} \in \Phi(\mathcal{E}_2)$, то так как существует такое $\mathbb{C} \in \Phi(\mathcal{E}_2)$, что $\mathbb{C} \in \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_1)$, имеем $\mathbb{C}\varphi\mathbb{B}$ и, значит, $\mathcal{E}_1\omega_1\mathcal{E}_3$. Пусть $\mathbb{A} \in \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_2) \cap \mathcal{N}_\mathbb{W}$. Существует такое $\mathbb{C} \in \Phi(\mathcal{E}_2)$, что $\mathbb{C} \notin \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_1)$. Полный ψ-путь с началом в $\mathbb{A}$ и проходящий через $\mathbb{C}$, согласно лемме 2.1.3, проходит через некоторое $\mathbb{B}'$, такое что $\mathbb{B}'\beta\mathbb{B}$. Если $\mathbb{B}' \in \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_1)$, имеем $\mathbb{C} \in \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_1)$. Противоречие. Значит $\mathbb{B}' \notin \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_1)$ и $\mathcal{E}_1\omega_1\mathcal{E}_3$.

5. Так как $\Phi(\mathcal{E}_2) \subseteq \Phi(\mathcal{E}_3)$, существуют $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \Phi(\mathcal{E}_3)$, такие что $\mathbb{A} \in \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_1)$ и $\mathbb{B} \notin \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_1)$, а значит, $\mathcal{E}_1\omega_2\mathcal{E}_3$.

6. Если $d(\mathcal{E}_1) > 0$ и или $\Phi(\mathcal{E}_1) \subset \Phi(\mathcal{E}_2)$, или $\Phi(\mathcal{E}_2) \subset \Phi(\mathcal{E}_3)$, то $\Phi(\mathcal{E}_1) \subset \Phi(\mathcal{E}_3)$ и $\mathcal{E}_1\omega_3\mathcal{E}_3$. Если же $\Phi(\mathcal{E}_1) = \Phi(\mathcal{E}_2) = \Phi(\mathcal{E}_3)$ и $g(\mathcal{E}_2) > 0$, то для любых $\mathbb{A}_1 \in \mathcal{E}_1, \mathbb{A}_2 \in \mathcal{E}_2, \mathbb{A}_3 \in \mathcal{E}_3$, верно $\mathbb{A}_3 \sqsubset \mathbb{A}_2 \sqsubset \mathbb{A}_1$ и, значит, $\mathcal{E}_1\omega_3\mathcal{E}_3$. Если же $g(\mathcal{E}_2) < 0$, то $g(\mathcal{E}_1) < 0$ и либо $g(\mathcal{E}_3) < 0$ и $\mathbb{A}_1 \sqsubset \mathbb{A}_2 \sqsubset \mathbb{A}_3$, либо $g(\mathcal{E}_3) \geq 0$ и $\mathbb{A}_3 \sqsubset \mathbb{A}_1 \sqsubset \mathbb{A}_2$. В любом случае имеем $\mathcal{E}_1\omega_3\mathcal{E}_3$.

$\square$

Положим отношение ω равным $(\omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_3)^+$.

Лемма 2.2.4. *Если сеть доказательства (π, φ, ψ) удовлетворяет доказательным условиям (1), (4) и (5), то отношение ω — строгий частичный порядок на $\mathcal{B}$.*

Доказательство. Рассмотрим граф с вершинами из $\mathcal{B}$ и ребрами, маркированными цифрами от 1 до 3 ($\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ соединены ребром, маркированным цифрой i, если и только если $\mathcal{E}_1\omega_i\mathcal{E}_2$). Утверждение леммы эквивалентно тому, что в этом графе нет циклов.

Предположим, что есть цикл. Он не может состоять только из ребер, маркированных цифрой 3. Также, ввиду утверждения (2) леммы 2.2.3, он не может состоять только из ребер, маркированных цифрой 2. Значит, ввиду утверждений (4) и (5) той же леммы, существует другой цикл, не содержащий ребер, маркированных цифрой 2. Ввиду утвержения (6), существует цикл, в котором также после ребра, маркированного цифрой 3, всегда идет ребро, маркированное цифрой 1. Ввиду утверждений (1) и (3) это невозможно. Противоречие. □

Лемма 2.2.5. *Пусть сеть доказательства (π, φ, ψ) удовлетворяет доказательным условиям (1), (4) и (5). Тогда для любого $\mathcal{E} \in \mathcal{B}$ верно, что $\mathcal{F}_\varphi(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E})$.*

Доказательство. Это утверждение напрямую следует из леммы 2.1.3. □

Лемма 2.2.6. *Пусть сеть доказательства (π, φ, ψ) удовлетворяет доказательным условиям (1), (4) и (5). Рассмотрим $\mathcal{E}$ — максимальный по ω четный β-кластер. Тогда $d(\mathcal{E}) \in \{0, 2\}$ и $\mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}) = \mathcal{F}_\varphi(\mathcal{E}) \cup \bigsqcup_i(\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{E}_i))$, где $d(\mathbb{E}_i) = 1$ и $g(\mathbb{E}_i) = 0$.*

Доказательство. Если существует $\mathbb{A} \in \mathcal{P}_\mathbb{W} \setminus \mathcal{N}_\mathbb{W}$, такое что $d(\mathbb{A}) = d(\mathcal{E}) - 2$ и $\mathcal{E}\varphi^+\mathbb{A}$, и $\mathbb{A} \in \mathcal{E}_1 \in \mathcal{B}$, то $\mathcal{E}\omega_1\mathcal{E}_1$, а значит, $\mathcal{E}$ не может быть максимальным. Значит $d(\mathcal{E}) \in \{0, 2\}$.

Докажем, что не существует таких $\mathbb{A} \in \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E})$ и $\mathbb{B} \notin \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E})$, что $\mathbb{A}\varphi\mathbb{B}$. Действительно, если $\mathbb{B} \in \mathcal{N}_\mathbb{W}$ и $\mathbb{A} \in \mathcal{E}_1 \in \mathcal{B}$, то $\mathcal{E}\omega_2\mathcal{E}_1$. Если же $\mathbb{B} \notin \mathcal{N}_\mathbb{W}$ и $\mathbb{B} \in \mathcal{E}_2 \in \mathcal{B}$, то $\mathcal{E}\omega_1\mathcal{E}_2$.

Теперь утверждение леммы следует из леммы 2.2.5 и того факта, что если $\mathbb{A} \in \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E})$ и $d(\mathbb{A}) = 0$, то $\mathbb{A} \in \mathcal{E}$. $\square$

Лемма 2.2.7. *Если существует сеть доказательства (π, φ, ψ), удовлетворяющая доказательным условиям (1)–(5), то $\mathrm{L}^* \vdash A_1 \dots A_n \to B$. Если сеть удовлетворяет еще и доказательному условию (6), то $\mathrm{L} \vdash A_1 \dots A_n \to B$.*

Доказательство. Предположим, что для данной секвенции $A_1 \dots A_n \to B$, для $\mathbb{W}$ существует сеть доказательства (π, φ, ψ), удовлетворяющая доказательным условиям (1)–(5).

Пусть $C_1 \dots C_k \to D$ — неупрощаемая секвенция, структурно эквивалентная данной. Исходя из леммы 2.2.2 для $\mathbb{W}' = [\![C_1]\!]^{\langle 0 \rangle} \dots [\![C_k]\!]^{\langle 0 \rangle} [\![D]\!]$, существует сеть доказательства (π', φ', ψ'), также удовлетворяющая доказательным условиям (1)–(5) (в случае L также и (6)).

Индукция по длине $\mathbb{W}'$.

Если $|\mathbb{W}'| = 2$, то секвенция $C_1 \dots C_k \to D$ имеет вид $p \to q$ и $\mathbb{W}' = p^{\lfloor 1 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil} q^{\lfloor 0 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil}$. Таким образом $\mathcal{P}_{\mathbb{W}'} = \{p^{\lfloor 1 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil}, p^{\lfloor 1 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil} q^{\lfloor 0 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil}\}$ и $\mathcal{N}_{\mathbb{W}'} = \{p^{\lfloor 1 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil}\}$. Сеть доказательства удовлетворяет доказательному условию (2), значит, $p = q$, секвенция $C_1 \dots C_l \to D$ есть аксиома, а $A_1 \dots A_n \to B$ имеет вид либо $p \to p$, либо $\to p/p$, либо $\to p \backslash p$, а значит, выводится в L^*. Если выполнено еще и доказательное условие (6), то единственный возможный вариант — $p \to p$, что выводится и в L.

Пусть $|\mathbb{W}'| > 2$. Секвенция $C_1 \dots C_k \to D$ неупрощаема. Значит D имеет вид либо p, либо $D' \cdot D''$, а для каждого i C_i имеет вид либо p, либо C'_i / C''_i, либо $C''_i \backslash C'_i$.

Введем следующие обозначения:

- $\mathbb{C}_i = [\![C_1]\!]^{\langle 0 \rangle} \dots [\![C_i]\!]^{\langle 0 \rangle}$.
- Если $C_i = C'_i / C''_i$, то $\mathbb{C}'_i = [\![C_1]\!]^{\langle 0 \rangle} \dots [\![C_{i-1}]\!]^{\langle 0 \rangle} [\![C'_i]\!]^{\langle 0 \rangle}$.
- Если $C_i = C''_i \backslash C'_i$, то $\mathbb{C}'_i = [\![C_1]\!]^{\langle 0 \rangle} \dots [\![C_{i-1}]\!]^{\langle 0 \rangle} ([\![C''_i]\!]^{\langle -h(C'_i) \rangle})^{\langle 0 \rangle}$.

- Если $D = (D' \cdot D'')$, то $\mathbb{D} = [\![C_1]\!]^{\langle 0\rangle} \dots [\![C_k]\!]^{\langle 0\rangle} [\![D'']\!]$.

Рассмотрим $\mathcal{E}$ — максимальный по ω четный β-кластер. Если D имеет вид p, то потребуем дополнительно $\mathcal{E} \neq \{\mathbb{W}'\}$.

Пусть $d(\mathcal{E}) = 0$. Так как D неупрощаемый тип, верно, что $D = (D' \cdot D'')$ и $\mathcal{E} = \{\mathbb{A} \mid \mathbb{C}_k \sqsubset \mathbb{A} \sqsubseteq \mathbb{D}, d(\mathbb{A}) = 0\}$. Докажем, что $\mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}) = (\mathbb{C}_i; \mathbb{D}]$ для некоторого $i \leq k$ (в случае L $0 < i < k$). Согласно лемме 2.2.6 $\mathcal{F}_{\psi'}(\mathcal{E}) = (\mathbb{C}_k; \mathbb{D}] \cup \bigsqcup_{j \in \mathcal{I}} (\mathbb{C}_{j-1}; \mathbb{C}_j]_\sqsubset$ для некоторого $\mathcal{I} \subset \{1, \dots, k\}$. Положим i равным наименьшему элементу $\mathcal{I}$. Предположим, что существует такое $j > i$, что $j \notin \mathcal{I}$. Рассмотрим $\mathbb{A} \in (\mathbb{C}_{i-1}; \mathbb{C}_i]_\sqsubset$ и $\mathbb{B} \in (\mathbb{C}_{j-1}; \mathbb{C}_j]$, такие что $d(\mathbb{A}) = d(\mathbb{B}) = 1$. Рассмотрим $\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_l$ и $\mathbb{B}_1, \dots, \mathbb{B}_{l'}$ — полные ψ'-пути с началами в $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ соответственно. Имеем $\mathbb{A} \sqsubset \mathbb{B} \sqsubset \mathbb{A}_l \sqsubset \mathbb{B}_{l'}$. Значит либо существует такое четное h, что $\mathbb{A}_h \sqsubset \mathbb{B} \sqsubset \mathbb{A}_{h+1}$, но в этом случае если $\mathbb{A}_h \in \mathcal{E}_1$, то $\mathcal{E}\omega_2\mathcal{E}_1$, а значит, $\mathcal{E}$ не может быть максимальным; либо существует такое четное h, что $\mathbb{B}_{h+1} \sqsubset \mathbb{A} \sqsubset \mathbb{B}_h$, но в этом случае $\mathbb{B}_h \varphi' \mathbb{A}$, а значит, $\mathbb{B}\psi'^*\mathbb{A}$ и, следовательно, $\mathbb{B} \in \mathcal{F}_{\psi'}(\mathcal{E})$. Значит существует такое $i \leq k$ (в случае L выполнение доказательного условия (6) дополнительно гарантирует $0 < i < k$), что $\mathcal{F}_{\psi'}(\mathcal{E}) = (\mathbb{C}_i; \mathbb{D}]$. Тогда из сети доказательства (π', φ', ψ') можно получить сети доказательства для $\mathcal{P}_{\mathbb{C}_i[\![D']\!]}$ и $\mathcal{P}_{[\![C_{i+1}]\!]^{\langle 0\rangle} \dots [\![C_k]\!]^{\langle 0\rangle} [\![D'']\!]}$, удовлетворяющие всем необходимым доказательным условиям. Значит, по предположению индукции $\mathrm{L}^{(*)} \vdash C_1 \dots C_i \to D'$ и $\mathrm{L}^{(*)} \vdash C_{i+1} \dots C_k \to D''$, и, применяя правило $(\to \cdot)$, получаем $\mathrm{L}^{(*)} \vdash C_1 \dots C_k \to D$, откуда следует, что $\mathrm{L}^{(*)} \vdash A_1 \dots A_n \to B$.

Пусть $d(\mathcal{E}) = 2$. Существует такое $i \leq k$, что $\mathbb{C}_{i-1} \sqsubset \mathcal{E} \sqsubseteq \mathbb{C}_i$. Так как C_i — неупрощаемый тип, то $C_i = (C_i'/C_i'')$ или $C_i = (C_i''\backslash C_i')$.

Если $C_i = (C_i'/C_i'')$, то $\mathcal{E} = \{\mathbb{A} \mid \mathbb{C}_i' \sqsubset \mathbb{A} \sqsubseteq \mathbb{C}_i, d(\mathbb{A}) = 2\}$. Согласно лемме 2.2.6 $\mathcal{F}_{\psi'}(\mathcal{E}) = (\mathbb{C}_i'; \mathbb{C}_i] \cup \bigsqcup_{j \in \mathcal{I}} (\mathbb{C}_{j-1}; \mathbb{C}_j]_\sqsubset$ для некоторого $\mathcal{I} \subset \{1, \dots, k\}$. Во-первых, $\mathcal{I}$ не содержит элементов меньших i, так как в противном случае для любого $\mathbb{A} \in \Phi(\mathcal{E})$, если расссмотреть полный ψ-путь с началом в $\mathbb{A}$, получится, что $\mathbb{A}\psi^*\mathbb{A}$. Тогда рассмот-

рим j — максимальный элемент $\mathcal{I}$. Предположим, что существует такое $j \notin \mathcal{I}$, что $i < j' < j$. Рассмотрим $\mathbb{A} \in (\mathbb{C}_{j-1}; \mathbb{C}_j]_{\sqsubset}$ и $\mathbb{B} \in (\mathbb{C}_{j'-1}; \mathbb{C}_{j'}]$, такие что $d(\mathbb{A}) = d(\mathbb{B}) = 1$. Рассмотрим $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_l$ и $\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_{l'}$ — такие полные ψ'-пути с началами в $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ соответственно. Существует h такое, что $\mathbb{A}_h \in \mathcal{E}$. Имеем $\mathbb{A}_h \sqsubset \mathbb{B} \sqsubset \mathbb{A} \sqsubset \mathbb{B}_{l'}$. Получаем, что существует такое четное h', что либо $\mathbb{A}_{h'+1} \sqsubset \mathbb{B} \sqsubset \mathbb{A}_{h'}$, но в этом случае если $\mathbb{A}_{h'} \in \mathcal{E}_1$, то $\mathcal{E}\omega_2\mathcal{E}_1$, а значит, $\mathcal{E}$ не может быть максимальным; либо $\mathbb{B}_{h'} \sqsubset \mathbb{A} \sqsubset \mathbb{B}_{h'+1}$, но в этом случае $\mathbb{B}_{h'}\varphi'\mathbb{A}$, а значит, $\mathbb{B}\psi'^*\mathbb{A}$ и, следовательно, $\mathbb{B} \in \mathcal{F}_{\psi'}(\mathcal{E})$, либо $\mathbb{B}_{h'} \sqsubset \mathbb{A}_h \sqsubset \mathbb{B}_{h'+1}$, но тогда либо $\mathbb{B}_{h'} \in \mathcal{E}$, и, значит, $\mathbb{B} \in \mathcal{F}_{\psi}(\mathcal{E})$, либо если $\mathbb{B}_{h'} \in \mathcal{E}$, то $\mathcal{E}\omega_3\mathcal{E}$, и, значит, $\mathcal{E}$ не может быть максимальным. Таким образом существует такое $j \geq i$ (в случае L $j > i$), что $\mathcal{F}_{\psi}(\mathcal{E}) = (\mathbb{C}'_i; \mathbb{C}_j]$. Тогда из сети доказательства (π', φ', ψ') можно получить сети доказательства для $\mathcal{P}_{\mathbb{W}_1}$ и $\mathcal{P}_{\mathbb{W}_2}$, где $\mathbb{W}_1 = \mathbb{C}'_i[\![C_{j+1}]\!]^{\langle 0\rangle} \ldots [\![C_k]\!]^{\langle 0\rangle}[\![D]\!]$, а $\mathbb{W}_2 = [\![C_{i+1}]\!]^{\langle 0\rangle} \ldots [\![C_j]\!]^{\langle 0\rangle}[\![C''_i]\!]$, удовлетворяющие всем необходимым доказательным условиям. Значит, по предположению индукции $\mathrm{L}^{(*)} \vdash C_1 \ldots C_{i-1}C'_iC_{j+1} \ldots C_k \to D$ и $\mathrm{L}^{(*)} \vdash C_{i+1} \ldots C_j \to C''_i$, и, применяя правило $(/\to)$, получаем $\mathrm{L}^{(*)} \vdash C_1 \ldots C_k \to D$, откуда следует, что $\mathrm{L}^{(*)} \vdash A_1 \ldots A_n \to B$.

Если $C_i = (C''_i \backslash C'_i)$, то $\mathcal{E} = \{\mathbb{A} \mid \mathbb{C}_{i-1} \sqsubset \mathbb{A} \sqsubseteq \mathbb{C}'_i, d(\mathbb{A}) = 2\}$. Тогда аналогичным предыдущему случаю образом можно доказать, что существует такое $j \leq i$ (в случае L $j < i$), что $\mathcal{F}_{\psi}(\mathcal{E}) = (\mathbb{C}_{j-1}; \mathbb{C}'_i]$. Тогда из сети доказательства (π', φ', ψ') можно получить сети доказательства для $\mathcal{P}_{\mathbb{W}_1}$ и $\mathcal{P}_{\mathbb{W}_2}$, где $\mathbb{W}_1 = \mathbb{C}_{j-1}[\![C'_i]\!]^{\langle 0\rangle}[\![C_{i+1}]\!]^{\langle 0\rangle} \ldots [\![C_k]\!]^{\langle 0\rangle}[\![D]\!]$, а $\mathbb{W}_2 = [\![C_j]\!]^{\langle 0\rangle} \ldots [\![C_{i-1}]\!]^{\langle 0\rangle}[\![C''_i]\!]$, удовлетворяющие всем необходимым доказательным условиям. Значит, по предположению индукции $\mathrm{L}^{(*)} \vdash C_1 \ldots C_{j-1}C'_iC_{i+1} \ldots C_k \to D$ и $\mathrm{L}^{(*)} \vdash C_j \ldots C_{i-1} \to C''_i$, и, применяя правило $(\backslash\to)$, получаем $\mathrm{L}^{(*)} \vdash C_1 \ldots C_k \to D$, откуда следует, что $\mathrm{L}^{(*)} \vdash A_1 \ldots A_n \to B$. $\square$

Леммы 2.2.1 и 2.2.7 вместе дают нам следующую теорему.

Теорема 1. $\mathrm{L}^* \vdash A_1 \ldots A_n \to B$, *если и только если для слова* $\mathbb{W} =$

$[\![A_1]\!]^{\langle 0\rangle} \dots [\![A_n]\!]^{\langle 0\rangle} [\![B]\!]$ *существует сеть доказательства* (π, φ, ψ), *удовлетворяющая доказательным условиям (1)–(5).*

$\mathrm{L} \vdash A_1 \dots A_n \to B$, *если и только если для слова* $\mathbb{W} = [\![A_1]\!]^{\langle 0\rangle} \dots [\![A_n]\!]^{\langle 0\rangle} [\![B]\!]$ *существует сеть доказательства* (π, φ, ψ), *удовлетворяющая доказательным условиям (1)–(6).*

Рассмотрим $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}_{\mathbb{W}}$. Будем говорить, что $\mathcal{A}$ является π-замкнутым, если для любого $\mathbb{B} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{N}_{\mathbb{W}}$ верно, что $\pi(\mathbb{B}) \in \mathcal{A}$, а для любого $\mathbb{B} \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{N}_{\mathbb{W}}$ верно, что $\pi^{-1}(\mathbb{B}) \in \mathcal{A}$.

Лемма 2.2.8. *Пусть есть две секвенции:* $A_1 \dots A_n \to B$ *и* $C_1 \dots C_m \to D$, *причем* $\mathrm{L}^* \vdash A_1 \dots A_n \to B$. *Пусть* $\mathbb{W} = [\![A_1]\!]^{\langle 0\rangle} \dots [\![A_n]\!]^{\langle 0\rangle} [\![B]\!]$ *и* $\mathbb{W}' = [\![C_1]\!]^{\langle 0\rangle} \dots [\![C_m]\!]^{\langle 0\rangle} [\![D]\!]$. *Предположим, что существует такое отображение* $\alpha \colon \mathcal{P}_{\mathbb{W}'} \to \mathcal{P}_{\mathbb{W}}$, *что выполняется следующее:*

1. α *инъективно,*
2. *для всех* $\mathbb{A} \in \mathcal{P}_{\mathbb{W}'}$ *верно, что* $t(\alpha(\mathbb{A})) = t(\mathbb{A})$, $d(\alpha(\mathbb{A})) = d(\mathbb{A})$ *и* $g(\alpha(\mathbb{A})) = g(\mathbb{A})$,
3. *для всех* $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{P}_{\mathbb{W}'}$, $\mathbb{A} \sqsubset \mathbb{B}$, *если и только если* $\alpha(\mathbb{A}) \sqsubset \alpha(\mathbb{B})$.

Пусть $\mathcal{G} = \{\mathbb{A} \in \mathcal{P}_{\mathbb{W}} \mid \neg\exists \mathbb{B} \in \mathcal{P}_{\mathbb{W}'} (\alpha(\mathbb{B}) = \mathbb{A})\}$. *Если* $\mathcal{G}$ π-*замкнуто и* φ-*замкнуто, то* $\mathrm{L}^* \vdash C_1 \dots C_n \to D$.

Доказательство. Пусть φ' это φ для $\mathbb{W}'$. Так как $\mathcal{G}$ φ-замкнуто, для всех $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathcal{P}_{\mathbb{W}'}$ будет верно, что $\mathbb{A}\varphi'\mathbb{B} \Leftrightarrow \alpha(\mathbb{A})\varphi\alpha(\mathbb{B})$. Так как $\mathcal{G}$ π-замкнуто, отображение π', заданное как $\alpha^{-1}\pi\alpha$, будет определено на $\mathcal{N}_{\mathbb{W}'}$ и сеть доказательства (π', φ', ψ') будет удовлетворять доказательным условиям (1)–(5). Поэтому, по теореме 1 имеем

$$\mathrm{L}^* \vdash C_1 \dots C_n \to D.$$

□

Глава 3

Левосторонний фрагмент исчисления Ламбека

В левостороннем фрагменте исчисления Ламбека $\mathrm{L}(\cdot, \backslash)$ для создания сложных типов используются только две операции — $\backslash$ и $\cdot$. Соответственно из правил остаются $(\to \backslash)$, $(\backslash \to)$, $(\to \cdot)$, и $(\cdot \to)$. Полное исчисление Ламбека является консервативным расширением левостороннего фрагмента. Аналогично можно рассматривать исчисление $\mathrm{L}^*(\cdot, \backslash)$. Как и в полном исчислении правило сечения является устранимым.

Мы докажем, что задачи распознавания выводимости в $\mathrm{L}(\cdot, \backslash)$ и $\mathrm{L}^*(\cdot, \backslash)$ являются NP-полными. Для этого мы сведем к ним известную NP-полную задачу выполнимости булевых формул в конъюнктивной нормальной форме SAT.

Предложенные конструкции можно явно переписать для правостороннего фрагмента. Поэтому будет выполнена следующая теорема.

Теорема 2. *Задача распознавания выводимости секвенций в* $\mathrm{L}(\cdot, \backslash)$, $\mathrm{L}(\cdot, /)$, $\mathrm{L}^*(\cdot, \backslash)$ *и* $\mathrm{L}^*(\cdot, /)$ *NP-полна.*

Следствие 1. *Задача распознавания принадлежности данного слова языку, порожденномоу данной грамматикой, основанной на* $\mathrm{L}(\cdot, \backslash)$, $\mathrm{L}(\cdot, /)$, $\mathrm{L}^*(\cdot, \backslash)$ *или* $\mathrm{L}^*(\cdot, /)$, *NP-полна.*

3.1 Сведение задачи SAT к задаче выводимости для $\mathrm{L}(\cdot, \backslash)$

Пусть $c_1 \wedge \ldots \wedge c_m$ — булева формула от переменнных $x_1 \ldots x_n$ в конъюнктивной нормальной форме. По этой формуле мы построим такую секвенцию, что она выводится в $\mathrm{L}(\cdot, \backslash)$ (и в $\mathrm{L}^*(\cdot, \backslash)$) тогда и только тогда, когда формула будет выполнима.

Для каждой булевой переменной x_i пусть $\neg_0 x_i$ обозначает литерал $\neg x_i$, а $\neg_1 x_i$ обозначает литерал x_i.

Заметим, что $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in \{0,1\}^n$ является выполняющей оценкой для формулы $c_1 \wedge \ldots \wedge c_m$, если и только если для каждого $j \leq m$ найдется такое $i \leq n$, что $\neg_{t_i} x_i$ присутствует в элементарной дизъюнкции c_j (как обычно, 1 означает „истина“, а 0 — „ложь“).

Пусть p_i^j, r_i, где $0 \leq i \leq n+1, 0 \leq j \leq m$ — различные примитивные типы из $\mathbf{P}$.

Определим следующие семейства типов:

$$
\begin{aligned}
G^0 &= (p_0^0 \backslash p_{n+1}^0); \\
G^j &= ((p_0^j \backslash G^{j-1}) \cdot p_{n+1}^j); \quad G = G^m; \\
H_i^0 &= (p_{i-1}^0 \backslash p_i^0); \\
H_i^j &= (p_{i-1}^j \backslash (H^{j-1} \cdot p_i^j)); \quad H_i = H_i^m; \\
E_i^0(t) &= (p_{i-1}^0 \backslash p_i^0); \\
E_i^j(t) &= \begin{cases} ((p_{i-1}^j \backslash E_i^{j-1}(t)) \cdot p_i^j), & \text{если } \neg_t x_i \text{ присутствует в } c_j, \\ (p_{i-1}^j \backslash (E_i^{j-1}(t) \cdot p_i^j)), & \text{если } \neg_t x_i \text{ не присутствует в } c_j; \end{cases} \\
E_i(t) &= E_i^m(t); \\
F_1 &= (E_1(0) \cdot ((E_1(0) \backslash E_1(1)) \cdot (H_1 \backslash r_1))); \\
F_i &= (((E_{i-1}(0) \backslash r_{i-1}) \backslash E_i(0)) \cdot ((E_i(0) \backslash E_i(1)) \cdot (H_i \backslash r_i))), \\
&\quad \text{для } 1 < i < n+1; \\
F_{n+1} &= ((E_n(0) \backslash r_n) \backslash H_{n+1}).
\end{aligned}
$$

Лемма 3.1.1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. $c_1 \wedge \ldots \wedge c_m$ *выполнима.*

2. $\mathrm{L}(\cdot, \backslash) \vdash F_1 \ldots F_{n+1} \to G$

3. $\mathrm{L}^*(\cdot, \backslash) \vdash F_1 \ldots F_{n+1} \to G$

Эта лемма будет доказана в следующем разделе.

3.2 Доказательство корректности сведения

Согласно определению отбражения $[\![\cdot]\!]$, имеем:

$$
\begin{aligned}
[\![G^0]\!] &= p_{n+1\lceil 0\rceil}^{0\lfloor 0\rfloor} p_{0\lceil -1\rceil}^{0\lfloor 1\rfloor};\\
[\![G^j]\!] &= p_{n+1\lceil 0\rceil}^{j\lfloor 0\rfloor} [\![G^{j-1}]\!] p_{0\lceil -j\rceil}^{j\lfloor 1\rfloor}; \quad [\![G]\!] = [\![G^m]\!]\\
[\![H_i^0]\!]^{\langle 0\rangle} &= p_{i-1\lceil 1\rceil}^{0\lfloor 2\rfloor} p_{i\lceil 0\rceil}^{0\lfloor 1\rfloor};\\
[\![H_i^j]\!]^{\langle 0\rangle} &= p_{i-1\lceil j+1\rceil}^{j\lfloor 2\rfloor} [\![H_i^{j-1}]\!]^{\langle 0\rangle} p_{i\lceil 0\rceil}^{j\lfloor 1\rfloor}; \quad [\![H_i]\!]^{\langle 0\rangle} = [\![H_i^m]\!]^{\langle 0\rangle}\\
[\![E_i^0(t)]\!]^{\langle 0\rangle} &= p_{i-1\lceil 1\rceil}^{0\lfloor 2\rfloor} p_{i\lceil 0\rceil}^{0\lfloor 1\rfloor};\\
[\![E_i^j(t)]\!]^{\langle 0\rangle} &= \begin{cases} p_{i-1\lceil j\rceil}^{j\lfloor 2\rfloor} [\![E_i^{j-1}(t)]\!]^{\langle 0\rangle} p_{i\lceil 0\rceil}^{j\lfloor 1\rfloor}, & \text{если } \neg_t x_i \text{ есть в } c_j,\\ p_{i-1\lceil j+1\rceil}^{j\lfloor 2\rfloor} [\![E_i^{j-1}(t)]\!]^{\langle 0\rangle} p_{i\lceil 0\rceil}^{j\lfloor 1\rfloor}, & \text{если } \neg_t x_i \text{ нет в } c_j; \end{cases}
\end{aligned}
$$

Рассмотрим $\mathbb{W} = [\![E_1(t_1)]\!]^{\langle 0\rangle} \ldots [\![E_n(t_n)]\!]^{\langle 0\rangle} [\![H_{n+1}]\!]^{\langle 0\rangle} [\![G]\!]$.

Если примитивный тип p_i^j входит в секвенцию

$$E_1(t_1) \ldots E_n(t_n) H_{n+1} \to G,$$

он встречается там ровно дважды. Значит, в $\mathcal{P}_{\mathbb{W}}$ есть ровно два элемента, таких что значение функции t на них равно p_i^j. Пусть $\mathbb{P}_i^{j+}$ обозначает элемент $\mathcal{N}_{\mathbb{W}}$, такой что $t(\mathbb{P}_i^{j+}) = p_i^j$, а $\mathbb{P}_i^{j-}$ — элемент $\mathcal{P}_{\mathbb{W}} \setminus \mathcal{N}_{\mathbb{W}}$, такой что $t(\mathbb{P}_i^{j-}) = p_i^j$. Выполняются следующие утверждения:

1. Если $0 \le i \le n$, то $\Phi(\mathbb{P}_i^{0-}) = \{\mathbb{P}_{i+1}^{0+}\}$

2. Если $0 \le i \le n$, $j > 0$ и литерал $\neg_{t_i} x_i$ входит в элементарную дизъюнкцию c_j, то $\Phi(\mathbb{P}_{i-1}^{j-}) = \{\mathbb{P}_i^{j'+} \mid j' < j\}$.

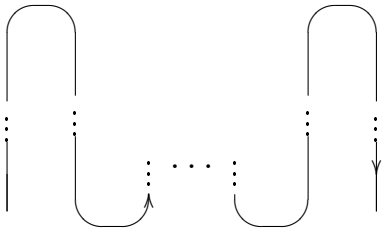
3. Если $0 \leq i \leq n$, $j > 0$ и литерал $\neg_{t_i} x_i$ не входит в элементарную дизъюнкцию c_j, то $\Phi(\mathbb{P}_{i-1}^{j-}) = \{\mathbb{P}_i^{j'+} \mid j' \leq j\}$.

4. $\Phi(\mathbb{P}_n^{j-}) = \{\mathbb{P}_{n+1}^{j'+} \mid j' \leq j\}$.

5. $\Phi(\mathbb{P}_0^{j+}) = \{\mathbb{P}_{n+1}^{j'-} \mid j' < j\}$.

Функция π может удовлетворять доказательным условиям (1) and (2) только в том случае, если для всех i и j, $\pi(\mathbb{P}_i^{j+}) = \mathbb{P}_i^{j-}$. Если это так, то функция π также удовлетворяет доказательным условиям (3) и (6).

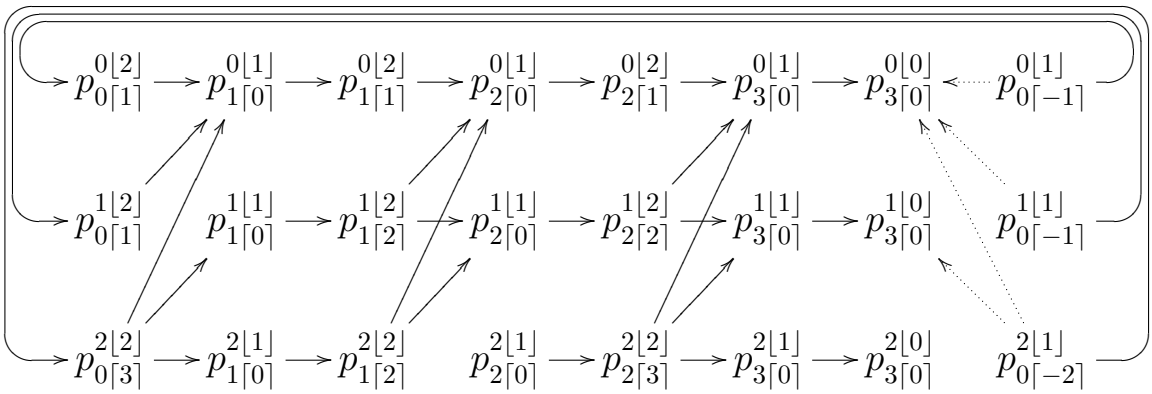
Здесь удобно использовать немного другую визуализацию сетей доказательства. Запишем $\mathbb{W}$ в матрицу с $m+1$ строками и $2n+4$ столбцами, в следующем порядке. Начиная с левого нижнего угла, заполняем сначала первый столбец атомами из $\mathbb{W}$ снизу вверх, затем второй столбец сверху вниз и так далее.



Вхождение, соответствующее $\mathbb{P}_i^{j+}$, находится в этой матрице в строке $j+1$ и столбце $2i$, если $i > 0$, или в столбце $2n+4$, если $i = 0$. Вхождение, соответствующее $\mathbb{P}_i^{j-}$, находится в строке j и столбце $2i+1$.

Пример 3.2.1. *Рассмотрим булеву формулу от двух переменных* $x_1 \wedge (\neg x_1 \vee x_2)$.

Сеть доказательства для $E_1(1)E_2(1)H_3 \to G$ *будет такой:*



Нетрудно видеть, что здесь если $\mathbb{P}_i^{j+}\psi^*\mathbb{P}_{i'}^{j'+}$, то $i < i'$ и $j' \leq j$.

Лемма 3.2.1. *Секвенция $E_1(t_1)\dots E_n(t_n)H_{n+1} \to G$ выводится в $\mathrm{L}(\cdot,\backslash)$ (и в $\mathrm{L}^*(\cdot,\backslash)$), если и только если $\langle t_1,\dots,t_n\rangle$ есть выполняющая оценка для формулы $c_1 \wedge \dots \wedge c_m$.*

Доказательство. Пусть $\langle t_1,\dots,t_n\rangle$ есть выполняющая оценка для формулы $c_1\wedge\dots\wedge c_m$. В виду вышесказанного нам осталось проверить только выполнение доказательного условия (5). Надо доказать, что для $\mathbb{P}_0^{j+}$ выполняется утверждение из леммы 2.1.3. Для $\mathbb{P}_0^{0+}$ существует единственная последовательность $\mathbb{P}_0^{0+} = \mathbb{A}_1,\dots,\mathbb{A}_k$, такой что $d(\mathbb{A}_k) = 0$ и $\mathbb{A}_{i-1}\psi\mathbb{A}_i$ для всех i — последовательность $\mathbb{P}_0^{0+},\mathbb{P}_0^{0-},\mathbb{P}_1^{0+}\dots,\mathbb{P}_{n-1}^{0+},\mathbb{P}_{n+1}^{0-}$, при чем $\mathbb{P}_0^{0+}\varphi\mathbb{P}_{n+1}^{0-}$, а значит, утверждение выполнено. Рассмотрим теперь $\mathbb{P}_0^{j+}$, где $j > 0$. Рассмотрим наименьшее $i \leq n$, такое что литерал $\neg_{t_i}x_i$ входит в элементарную дизъюнкцию c_j. Нетрудно видеть, что $\mathbb{P}_0^{j+}\psi^*\mathbb{P}_{i-1}^{j-}$, а значит, $\mathbb{P}_0^{j+}\psi^*\mathbb{P}_i^{j'+}$, где $j' < j$ и $\neg(\mathbb{P}_0^{j+}\psi^*\mathbb{P}_i^{j+})$. Таким образом имеем $\neg(\mathbb{P}_0^{j+}\psi^*\mathbb{P}_{n+1}^{j-})$. Следовательно для любой последовательности $\mathbb{A} = \mathbb{A}_1,\dots,\mathbb{A}_k$, такой что $d(\mathbb{A}_k) = 0$ и $\mathbb{A}_{i-1}\psi\mathbb{A}_i$ для всех i, $\mathbb{A}_k = \mathbb{P}_{n+1}^{j'-}$, где $j' < j$. Так как $\mathbb{P}_0^{j+}\varphi\mathbb{P}_{n+1}^{j'-}$, выполняется доказательное условие (5), и по теореме 1 получаем $\mathrm{L}(\cdot,\backslash) \vdash E_1\dots E_nH_{n+1} \to G$.

Пусть $\langle t_1,\dots,t_n\rangle$ не является выполняющей оценкой для формулы $c_1 \wedge \dots \wedge c_m$. Тогда существует $j \leq m$, такое что ни один литерал $\neg_{t_i}x_i$ не входит в элементарную дизъюнкцию c_j. В этом случае для всех $i \leq n$ верно, что $\mathbb{P}_i^{j-}\psi\mathbb{P}_{i+1}^{j+}$, а значит, для последовательности $\mathbb{P}_0^{j+},\mathbb{P}_0^{j-},\mathbb{P}_1^{j+}\dots,\mathbb{P}_{n-1}^{j+},\mathbb{P}_{n+1}^{j-}$ не выполняется утверждение леммы 2.1.3. Следовательно для единственно возможной сети доказательства не выполняется доказательное условие (5), и, значит, по теореме 1 $\mathrm{L}(\cdot,\backslash) \nvdash E_1\dots E_nH_{n+1} \to G$. □

Лемма 3.2.2.

$$\mathrm{L}(\cdot,\backslash) \vdash E_i(0) \to H_i;$$

$$\mathrm{L}(\cdot,\backslash) \vdash E_i(1) \to H_i;$$

$$\mathrm{L}(\cdot,\backslash) \vdash (H_i\backslash r_i) \to (E_{i-1}(0)\backslash r_{i-1});$$

$$\mathrm{L}(\cdot,\backslash) \vdash (E_i(0)\backslash E_i(1))(H_i\backslash r_i) \to (E_{i-1}(0)\backslash r_{i-1}).$$

Лемма 3.2.3. *Если формула* $c_1 \wedge \ldots \wedge c_m$ *выполнима, то* $\mathrm{L}(\cdot,\backslash) \vdash F_1 \ldots F_{n+1} \to G$.

Доказательство. Возьмем за основу секвенцию $E_1(t_1)\ldots E_n(t_n) \to G$, где $\langle t_1,\ldots,t_n\rangle$ есть выполняющая оценка для формулы $c_1 \wedge \ldots \wedge c_m$. С помощью правила $(\backslash \to)$, секвенций из леммы 3.2.2 и правила $(\cdot \to)$ можно получить секвенцию $F_1 \ldots F_{n+1} \to G$. □

Предположим теперь что $\mathrm{L}(\cdot,\backslash) \vdash F_1 \ldots F_{n+1} \to G$. Рассмотрим

$$\mathbb{W} = [\![F_1]\!]^{\langle 0\rangle} \ldots [\![F_{n+1}]\!]^{\langle 0\rangle} [\![G]\!].$$

По теореме 1 для $\mathcal{P}_{\mathbb{W}}$ существует сеть доказательства (π,φ,ψ), для которой выполнены доказательные условия (1)-(5).

Введем следующие обозначения:

$$\mathbb{F}_i = [\![F_1]\!]^{\langle 0\rangle} \ldots [\![F_i]\!]^{\langle 0\rangle} r^{\lfloor 2\rfloor}_{i\lceil m+1\rceil}(([\![E_i(0)]\!]^{\perp -1})^{\perp -(m+1)})^{\langle 0\rangle}$$

$$\mathbb{E}^0_i = \mathbb{F}_{i-1}[\![E_i(0)]\!]^{\langle 0\rangle} \qquad \mathbb{E}^{0\prime}_i = [\![E_i(0)]\!]^{\langle 0\rangle}$$

$$\mathbb{E}^{0\prime\prime}_i = \mathbb{E}^0_i([\![E_i(0)]\!]^{\perp -(m+1)})^{\langle 0\rangle}$$

$$\mathbb{E}^1_i = \mathbb{E}^0_i[\![(E_i(0)\backslash E_i(1))]\!]^{\langle 0\rangle} \qquad \mathbb{E}^{1\prime}_i = [\![E_i(1)]\!]^{\langle 0\rangle}$$

$$\mathbb{H}_i = \mathbb{E}^1_i([\![(H_i\backslash r_i)]\!])^{\langle 0\rangle} \qquad \mathbb{H}'_i = ([\![H_i]\!]^{\perp -1})^{\langle 0\rangle}$$

$$K_i(0) = E_i(0)$$

$$K_i(1) = (E_i(0)\cdot(E_i(0)\backslash E_i(1)))$$

$$M_i(0) = ((E_{i-1}(0)\backslash r_{i-1})\backslash E_i(0))$$

$$M_i(1) = (((E_{i-1}(0)\backslash r_{i-1})\backslash E_i(0))\cdot(E_i(0)\backslash E_i(1)))$$

Лемма 3.2.4. *Если* $\mathrm{L}^*(\cdot,\backslash) \vdash F_1 \ldots F_{n+1} \to G$, *то существуют* $t_i \in \{0,1\}$, *такие что*

$$\mathrm{L}^*(\cdot,\backslash) \vdash K_1(t_1)\ldots K_n(t_n)H_{n+1} \to G.$$

Доказательство. Докажем что существует $t_n \in \{0,1\}$, такое что

$$\mathrm{L}^*(\cdot,\backslash) \vdash F_1 \dots F_{n-1} M_i(t_n) H_{n+1} \to G.$$

Рассмотрим сеть доказательства (π, φ, ψ). Так как $\mathbb{F}_n \in \mathcal{N}_{\mathbb{W}}$, рассмотрим $\mathbb{A} = \pi(\mathbb{F}_n)$. Так как $t(\mathbb{F}_n) = p_n^m$, существует три возможных варианта для $\mathbb{A}$ — $\mathbb{E}_n^0 p_{n\lceil m+1\rceil}^{m\lfloor 2\rfloor}$, $\mathbb{E}_n^0 p_{n\lceil m+1\rceil}^{m\lfloor 2\rfloor}$ и $\mathbb{F}_n p_{n\lceil m(+1)\rceil}^{m\lfloor 2\rfloor}$. Последний вариант не возможен согласно лемме 2.1.5. Пусть тогда $\mathbb{A} = \mathbb{E}_n^0 p_{n\lceil m+1\rceil}^{m\lfloor 2\rfloor}$. В этом случае множество $(\mathbb{E}_n^0, \mathbb{F}_n]$ является π-замкнутым. Значит для строки

$$[\![F_1]\!]^{\langle 0\rangle} \dots [\![F_{n-1}]\!]^{\langle 0\rangle} [\![M_n(0)]\!]^{\langle 0\rangle} [\![H_{n+1}]\!]^{\langle 0\rangle} [\![G]\!]$$

можно применить лемму 2.2.8, откуда

$$\mathrm{L}^*(\cdot,\backslash) \vdash F_1 \dots F_{n-1} M_i(0) H_{n+1} \to G.$$

Если же $\mathbb{A} = \mathbb{E}_n^0 p_{n\lceil m+1\rceil}^{m\lfloor 2\rfloor}$, то множество $(\mathbb{E}_n^1, \mathbb{F}_n]$ является π-замкнутым, и аналогично получаем, что

$$\mathrm{L}^*(\cdot,\backslash) \vdash F_1 \dots F_{n-1} M_i(1) H_{n+1} \to G.$$

Продолжая рассуждать так же, мы будем последовательно получать утверждения вида

$$\mathrm{L}^*(\cdot,\backslash) \vdash F_1 \dots F_{i-1} M_i(t_i) K_{i+1}(t_{i+1}) \dots K_n(t_n) H_{n+1} \to G.$$

Единственным отличием будет то, что при переходе от $i+1$ к i, если $t_{i+1} = 1$ для $\pi(\mathbb{F}_i)$ будет существовать дополнительный вариант — $\mathbb{E}_{i+1}^0{}'' p_{n\lceil m+1\rceil}^{m\lfloor 2\rfloor}$. Этот вариант невозможен, так как в этом случае из выполнения доказательного условия (5) следует что $\mathbb{E}_{i+1}^1 \psi^* \mathbb{H}_i r_{i\lceil m+1\rceil}^{\lfloor 2\rfloor}$, но в этом случае $\pi(\mathbb{E}_{i+1}^0) = \mathbb{E}_{i+1}^0 p_{i+1\lceil m+1\rceil}^{m\lfloor 2\rfloor}$, а значит, $\mathbb{H}_i r_{i\lceil m+1\rceil}^{\lfloor 2\rfloor} \psi^* \mathbb{E}_{i+1}^1$ и $\mathbb{E}_{i+1}^1 \psi \mathbb{E}_{i+1}^1$.

Применив это же рассуждение к секвенции

$$F_1 M_2(t_2) K_3(t_3) \dots K_n(t_n) H_{n+1} \to G$$

мы получим

$$\mathrm{L}^*(\cdot,\backslash) \vdash K_1(t_1) \dots K_n(t_n) H_{n+1} \to G.$$

□

Лемма 3.2.5. *Если* $\mathrm{L}^*(\cdot,\backslash) \vdash F_1 \dots F_{n+1} \to G$, *то формула* $c_1 \wedge \dots \wedge c_m$ *выполнима.*

Доказательство. Согласно лемме 3.2.4 существуют $t_i \in \{0,1\}$, такие что

$$\mathrm{L}^*(\cdot,\backslash) \vdash K_1(t_1) \dots K_n(t_n) H_{n+1} \to G.$$

Докажем что $\mathrm{L}^*(\cdot,\backslash) \vdash E_1(t_1) \dots E_n(t_n) H_{n+1} \to G$.

Будем последовательно доказывать, что

$$\mathrm{L}^*(\cdot,\backslash) \vdash K_1(t_1) \dots K_i(t_i) E_{i+1}(t_{i+1}) \dots E_n(t_n) H_{n+1} \to G.$$

Если $t_i = 0$, то $K_i(t_i) = E_i(t_i)$ и доказывать ничего не надо. Пусть $t_i = 1$. Тогда рассмотрим

$$\mathbb{W} = [\![K_1(t_1)]\!]^{\langle 0\rangle} \dots [\![K_i(t_i)]\!]^{\langle 0\rangle} [\![E_{i+1}(t_{i+1})]\!]^{\langle 0\rangle} [\![H_{n+1}]\!]^{\langle 0\rangle} [\![G]\!].$$

По теореме 1 для $\mathcal{P}_{\mathbb{W}}$ существует сеть доказательства (π, φ, ψ) удовлетворяющая доказательным условиям (1)-(5).

Обозначим $\mathbb{K}_i = [\![K_1(t_1)]\!]^{\langle 0\rangle} \dots [\![K_i(t_i)]\!]^{\langle 0\rangle}$.

Рассмотрим $\mathbb{A} = \mathbb{K}_{i-1} [\![E_i(0)]\!]^{\langle 0\rangle} ([\![E_i(0)]\!]^{\perp-(m+1)})^{\langle 0\rangle} \in \mathcal{N}_{\mathbb{W}}$. Для $\pi(\mathbb{A})$ возможны три варианта. Первый вариант — $\mathbb{A} p^{m\lfloor 2\rfloor}_{i\lceil m(+1)\rceil}$, невозможен по лемме 2.1.5. Второй вариант — $\mathbb{K}_i p^{m\lfloor 2\rfloor}_{i\lceil m(+1)\rceil}$, и в этом случае множество $(\mathbb{K}_i, \mathbb{A}]_{\sqsubset}$ является π-замкнутым и по лемме 2.2.8 получаем

$$\mathrm{L}(\cdot,\backslash) \vdash K_1(t_1) \dots E_i(1) E_{i+1}(t_{i+1}) \dots E_n(t_n) H_{n+1} \to G.$$

Третий вариант — $\mathbb{K}_{i-2} [\![E_{i-1}(0)]\!]^{\langle 0\rangle} p^{m\lfloor 2\rfloor}_{i\lceil m+1\rceil}$ — возникает только в том случае, если $t_{i-1} = 1$. Но в этом случе единственным вариантом для $\pi(\mathbb{B})$, где

$$\mathbb{B} = \mathbb{K}_{i-2} [\![E_{i-1}(0)]\!]^{\langle 0\rangle} ([\![E_{i-1}(0)]\!]^{\perp-(m+1)})^{\langle 0\rangle},$$

будет $\mathbb{B} p^{m\lfloor 2\rfloor}_{i-1\lceil m+1\rceil}$, что невозможно по лемме 2.1.5.

Таким образом мы доказали, что

$$\mathrm{L}(\cdot,\backslash) \vdash E_1(t_1) \dots E_n(t_n) H_{n+1} \to G.$$

Отсюда по лемме 3.2.1 получаем, что $\langle t_i, \dots, t_n \rangle$ есть выполняющая оценка для формулы $c_1 \wedge \dots \wedge c_m$. $\square$

Так как для всех секвенций $\mathrm{L}(\cdot, \backslash) \vdash \Pi \to A \Rightarrow \mathrm{L}^*(\cdot, \backslash) \vdash \Pi \to A$, леммы 3.2.3 и 3.2.5 вместе дают нам лемму 3.1.1.

Глава 4

Фрагмент исчисления Ламбека без умножения

Во фрагменте исчисления Ламбека без умножения $\mathrm{L}(\backslash, /)$ для создания сложных типов используются только две операции — $\backslash$ и $/$. Соответственно, из правил остаются $(\to \backslash)$, $(\backslash \to)$, $(\to /)$, и $(/ \to)$. Полное исчисление Ламбека является консервативным расширением фрагмента без умножения. Аналогично можно рассматривать исчисление $\mathrm{L}^*(\backslash, /)$. Как и в полном исчислении, правило сечения является устранимым.

Нетрудно видеть, что для любого $A \in \mathrm{Tp}(\backslash, /)$ верно, что $h(A) = 1$, и, значит, для всех $\mathbb{A} \in \mathcal{P}_{\mathbb{W}}$ верно, что либо $g(\mathbb{A}) = \pm 1$, либо $g(\mathbb{A}) = 0$. Таким образом, для каждого $\mathbb{A}$ существует не более чем одно $\mathbb{B}$, такое что $\mathbb{A}\varphi\mathbb{B}$. Значит, Φ теперь можно понимать как частичную однозначную функцию на $\mathcal{P}_{\mathbb{W}}$ (ее значения теперь будут элементами $\mathcal{P}_{\mathbb{W}}$, а не подмножествами). Также отношение ψ является графиком частичной однозначной функции Ψ.

Лемма 4.0.6. *Существует ровно одно $\mathbb{A} \in \mathcal{P}_{\mathbb{W}}$, такое что $d(\mathbb{A}) = 0$. Будем обозначать его $\mathbb{A}_0$.*

Пусть сеть доказательства (π, φ, ψ) для $\mathbb{W}$ удовлетворяет доказательному условию (1). Тогда выполнение доказательных условий (4) и (5) эквивалентно следующему утверждению: для любого $\mathbb{A} \in \mathcal{N}_{\mathbb{W}}$ верно, что $\mathbb{A}\psi^+\Phi(\mathbb{A})$, а для любого $\mathbb{A} \in \mathcal{P}_{\mathbb{W}}$, такого что $d(\mathbb{A}) = 1$, верно, что $\mathbb{A}\psi^+\mathbb{A}_0$.

Теорема 3. *Задача распознавания выводимости секвенций в* $\mathrm{L}(\backslash, /)$ *и* $\mathrm{L}^*(\backslash, /)$ *NP-полна.*

Следствие 2. *Задача распознавания принадлежности данного слова языку, порожденному данной грамматикой, основанной на* $\mathrm{L}(\backslash, /)$ *или* $\mathrm{L}^*(\backslash, /)$*, NP-полна.*

Для доказательства этой теоремы мы сведем к задачам распознавания выводимости в $\mathrm{L}(\backslash, /)$ и $\mathrm{L}^*(\backslash, /)$ NP-полную задачу выполнимости булевых формул в конъюнктивной нормальной форме SAT.

4.1 Сведение задачи SAT к задаче выводимости для $\mathrm{L}(\backslash, /)$

Пусть $c_1 \wedge \ldots \wedge c_m$ — булева формула от переменнных $x_1 \ldots x_n$ в конъюнктивной нормальной форме. По этой формуле мы построим секвенцию такую, что она выводится в $\mathrm{L}(\backslash, /)$ (и в $\mathrm{L}^*(\backslash, /)$) тогда и только тогда, когда формула будет выполнима.

Пусть $p_i^j, q_i^j, a_i^j, b_i^j$, где $0 \leq i \leq n, 0 < j \leq m$ — различные примитивные типы из $\mathbf{P}$.

Определим следующие семейства типов:

$$
\begin{aligned}
G^0 &= (p_0^0 \backslash p_n^0) \\
G^j &= (q_n^j / ((q_0^j \backslash p_0^j) \backslash G^{j-1})) \backslash p_n^j \\
G &= G^m \\
A_i^0 &= (a_i^0 \backslash p_i^0) \\
A_i^j &= (q_i^j / ((b_i^j \backslash a_i^j) \backslash A_i^{j-1})) \backslash p_i^j \\
A_i &= A_i^m \\
E_i^0(t) &= p_{i-1}^0 \\
E_i^j(t) &= \begin{cases} q_i^j / (((q_{i-1}^j / E_i^{j-1}(t)) \backslash p_{i-1}^j) \backslash p_i^{j-1}), & \text{если } \neg_t x_i \text{ есть в } c_j \\ (q_{i-1}^j / (q_i^j / (E_i^{j-1}(t) \backslash p_i^{j-1}))) \backslash p_{i-1}^j, & \text{если } \neg_t x_i \text{ нет в } c_j \end{cases} \\
F_i^j(t) &= (E_i^j(t) \backslash p_i^j) \\
F_i(t) &= F_i^m(t) \\
B_i^0 &= a_i^0 \\
B_i^j &= q_{i-1}^j / (((b_i^j / B_i^{j-1}) \backslash a_i^j) \backslash p_{i-1}^{j-1}) \\
B_i &= B_i^m \backslash p_{i-1}^m
\end{aligned}
$$

Пусть Π_i обозначает следующие последовательности типов:

$$(F_i(0)/(B_i \backslash A_i))\ F_i(0)\ (F_i(0) \backslash F_i(1)).$$

Лемма 4.1.1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

$$
\begin{gathered}
c_1 \wedge \ldots \wedge c_m \textit{выполнима} \\
\mathrm{L}(\backslash, /) \vdash \Pi_1 \ldots \Pi_n \to G \\
\mathrm{L}^*(\backslash, /) \vdash \Pi_1 \ldots \Pi_n \to G
\end{gathered}
$$

Эта лемма будет доказана в следующем разделе.

4.2 Доказательство корректности сведения

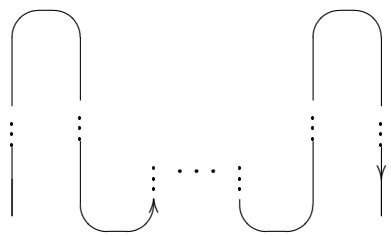
Как и в случае с левосторонним фрагментом, вначале мы рассмотрим, каким образом выполнимость формулы кодируется в построенной секвенции.

Согласно определению отображения $[\![\cdot]\!]$ имеем:

$$
\begin{aligned}
[\![G^0]\!] &= p_{n\lceil 0\rceil}^{0\lfloor 0\rfloor} p_{0\lceil -1\rceil}^{0\lfloor 1\rfloor};\\
[\![G^j]\!] &= p_{n\lceil 0\rceil}^{j\lfloor 0\rfloor} q_{n\lceil -1\rceil}^{j\lfloor 1\rfloor} ([\![G^{j-1}]\!]^{\langle 1\rangle})^{\langle -1\rangle} q_{0\lceil 1\rceil}^{j\lfloor 4\rfloor} p_{0\lceil -1\rceil}^{j\lfloor 3\rfloor};\\
[\![G]\!] &= [\![G^m]\!];\\
[\![E_i^0(t)]\!] &= p_{i-1\lceil 0\rceil}^{0\lfloor 0\rfloor};\\
[\![E_i^j(t)]\!] &= \begin{cases} p_{i-1\lceil 1\rceil}^{j\lfloor 2\rfloor} q_{i-1\lceil -1\rceil}^{j\lfloor 3\rfloor} ((([\![E_i^{j-1}(t)]\!]^{\langle 1\rangle})^{\langle -1\rangle})^{\langle -1\rangle})^{\langle 1\rangle} p_{i\lceil 1\rceil}^{j-1\lfloor 1\rfloor} p_{i\lceil 0\rceil}^{j\lfloor 0\rfloor}, \\ \qquad \text{если } \neg_t x_i \text{ есть в } c_j, \\ p_{i-1\lceil 0\rceil}^{j\lfloor 0\rfloor} q_{i-1\lceil -1\rceil}^{j\lfloor 1\rfloor} ((([\![E_i^{j-1}(t)]\!]^{\langle -1\rangle})^{\langle 1\rangle})^{\langle 1\rangle})^{\langle -1\rangle} p_{i\lceil 1\rceil}^{j-1\lfloor 3\rfloor} q_{i\lceil -1\rceil}^{j\lfloor 2\rfloor}, \\ \qquad \text{если } \neg_t x_i \text{ нет в } c_j; \end{cases}\\
[\![F_i(t)]\!]^{\langle 0\rangle} &= ([\![E_i^m(t)]\!]^{\langle -1\rangle})^{\langle 1\rangle} p_{i\lceil 0\rceil}^{m\lfloor 1\rfloor}.
\end{aligned}
$$

Пусть дана некоторая оценка $\langle t_1, \ldots, t_n\rangle$. Рассмотрим $\mathbb{W} = [\![F_1(t_1)]\!]^{\langle 0\rangle} \ldots [\![F_n(t_n)]\!]^{\langle 0\rangle} [\![G]\!]$.

Запишем $\mathbb{W}$ в матрицу с $m+1$ строками и $2n+2$ столбцами, как в случае с левосторонним фрагментом — начиная с левого нижнего угла, заполняем сначала первый столбец атомами из $\mathbb{W}$ снизу вверх, затем второй столбец сверху вниз и так далее.



Пример 4.2.1. *Рассмотрим булеву формулу от двух переменных* $x_1 \vee x_2$.

Сеть доказательства для $F_1(1)F_2(0) \to G$ будет выглядеть так:

$$
\begin{tikzcd}
p^{0\lfloor 6\rfloor}_{0\lceil -1\rceil} \arrow[d] & p^{0\lfloor 3\rfloor}_{1\lceil 1\rceil} \arrow[r] \arrow[d, dotted] & p^{0\lfloor 6\rfloor}_{1\lceil 1\rceil} \arrow[r] & p^{0\lfloor 5\rfloor}_{2\lceil 1\rceil} \arrow[r] \arrow[d, dotted] & p^{0\lfloor 2\rfloor}_{2\lceil -1\rceil} \arrow[d] & p^{0\lfloor 3\rfloor}_{0\lceil -1\rceil} \arrow[l, dotted] \\
q^{1\lfloor 5\rfloor}_{0\lceil -1\rceil} \arrow[d, dotted] & q^{1\lfloor 2\rfloor}_{1\lceil 1\rceil} \arrow[d] & q^{1\lfloor 3\rfloor}_{1\lceil -1\rceil} \arrow[l] \arrow[d, dotted] & q^{1\lfloor 4\rfloor}_{2\lceil -1\rceil} \arrow[l] & q^{1\lfloor 1\rfloor}_{2\lceil -1\rceil} \arrow[l] \arrow[d, dotted] & q^{1\lfloor 4\rfloor}_{0\lceil 1\rceil} \arrow[l] \arrow[d] \\
p^{1\lfloor 4\rfloor}_{0\lceil 1\rceil} \arrow[r] & p^{1\lfloor 1\rfloor}_{1\lceil 0\rceil} \arrow[r] & p^{1\lfloor 2\rfloor}_{1\lceil 1\rceil} \arrow[r] & p^{1\lfloor 1\rfloor}_{2\lceil 0\rceil} \arrow[r] & p^{1\lfloor 0\rfloor}_{2\lceil 0\rceil} & p^{1\lfloor 3\rfloor}_{0\lceil -1\rceil} \arrow[ul, dotted]
\end{tikzcd}
$$

В дальнейшем мы будем ссылаться на эту схему и иллюстрировать наши утверждения о структуре сети доказательства (π, φ, ψ) изображением релевантной части этой матрицы.

Если примитивный тип входит в секвенцию $F_1(t_1) \dots F_n(t_n) \to G$, он встречается там ровно дважды. Соответственно, в множестве $\mathcal{P}_{\mathbb{W}}$ есть ровно два элемента, таких что значение функции t на них равно p_i^j. Пусть $\mathbb{P}_i^{j+}$ обозначает элемент множества $\mathcal{N}_{\mathbb{W}}$, такой что $t(\mathbb{P}_i^{j+}) = p_i^j$ (соответствующее вхождение будет находиться в матрице в строке $2j+1$ и столбце $2i$ для $i > 0$ и $2n+2$ для $i = 0$), а $\mathbb{P}_i^{j-}$ — элемент множества $\mathcal{P}_{\mathbb{W}} \backslash \mathcal{N}_{\mathbb{W}}$, такой что $t(\mathbb{P}_i^{j-}) = p_i^j$ (строка $2j+1$, столбец $2i+1$). Аналогично определим $\mathbb{Q}_i^{j+}$ (строка $2j$, столбец $2j+1$) и $\mathbb{Q}_i^{j-}$ (строка $2j$, столбец $2i$ для $i > 0$ и $2n+2$ для $i = 0$).

Выполняются следующие утверждения:

1. $d(\mathbb{P}_n^{m-}) = 0$.

2. Если литерал $\neg_{t_i} x_i$ не входит в элементарную дизъюнкцию c_j, то $\Phi^3(\mathbb{P}_i^{j-1+}) = \Phi^2(\mathbb{Q}_i^{j-}) = \Phi(\mathbb{Q}_{i-1}^{j+}) = \mathbb{P}_{i-1}^{j-}$.

$$
\begin{tikzcd}
 & p^{j-1\lfloor 4l+5\rfloor}_{i\lceil 1\rceil} \arrow[d, dotted] \\
q^{j\lfloor 4l+3\rfloor}_{i-1\lceil -1\rceil} \arrow[d, dotted] & q^{j\lfloor 4l+4\rfloor}_{i\lceil -1\rceil} \arrow[l] \\
p^{j\lfloor 4l+2\rfloor}_{i-1\lceil \pm 1\rceil} &
\end{tikzcd}
$$

3. Если литерал $\neg_{t_i} x_i$ входит в элементарную дизъюнкцию c_j, то $\Phi^3(\mathbb{Q}_{i-1}^{j+}) = \Phi^2(\mathbb{P}_{i-1}^{j-}) = \Phi(\mathbb{P}_i^{j-1+}) = \mathbb{Q}_i^{j-}$.

$$\begin{tikzcd}
 & p_{i\lceil 1\rceil}^{j-1\lfloor 4l+3\rfloor} \arrow[d, dotted] \\
q_{i-1\lceil -1\rceil}^{j\lfloor 4l+5\rfloor} \arrow[d, dotted] & q_{i\lceil \pm 1\rceil}^{j\lfloor 4l+2\rfloor} \\
p_{i-1\lceil 1\rceil}^{j\lfloor 4l+4\rfloor} \arrow[uur] &
\end{tikzcd}$$

4. $\Phi^4(\mathbb{Q}_0^{j-}) = \Phi^3(\mathbb{P}_0^{j+}) = \Phi^2(\mathbb{P}_n^{j-1-}) = \Phi(\mathbb{Q}_n^{j+}) = \mathbb{P}_n^{j-}$.

$$\begin{tikzcd}
p_{n\lceil -1\rceil}^{j-1\lfloor 2l+2\rfloor} \arrow[d] & & \\
q_{n\lceil -1\rceil}^{j\lfloor 2l+1\rfloor} \arrow[d, dotted] & & q_{0\lceil 1\rceil}^{j\lfloor 2l+4\rfloor} \arrow[d] \\
p_{n\lceil -sgn(l)\rceil}^{j\lfloor 2l\rfloor} & p_{0\lceil -1\rceil}^{j\lfloor 2l+3\rfloor} \arrow[uul, dotted] & p_{0\lceil -1\rceil}^{j\lfloor 2l+3\rfloor}
\end{tikzcd}$$

Здесь $l = m - j$.

Сеть доказательства (π, φ, ψ) удовлетворяет доказательным условиям (1) и (2), только если для всех i и j верно, что $\pi(\mathbb{P}_i^{j+}) = \mathbb{P}_i^{j-}$ и $\pi(\mathbb{Q}_i^{j+}) = \mathbb{Q}_i^{j-}$. В этом случае она также удовлетворяет доказательным условиям (3) и (6).

Теперь для доказательства выводимости секвенции $F_1 \dots F_n \to G$ надо проверить выполнение условия из леммы 4.0.6 для всех элементов $\mathcal{N}_{\mathbb{W}}$.

Лемма 4.2.1. *Для всех* $0 < i \leq n$ *и* $0 < j \leq m$ *выполняется* $\mathbb{P}_i^{j-1+} \psi^* \mathbb{Q}_i^{j-}$.

Доказательство. Для $i = n$ это верно, так как

$$\Psi^3(\mathbb{P}_n^{j-1+}) = \pi\Phi\pi(\mathbb{P}_n^{j-1+}) = \pi\Phi(\mathbb{P}_n^{j-1-}) = \pi(\mathbb{Q}_n^{j+}) = \mathbb{Q}_n^{j-}.$$

$$\begin{tikzcd}
p_{n\lceil 1\rceil}^{j-1\lfloor 4l+4\pm 1\rfloor} \arrow[r] \arrow[d, dotted] & p_{n\lceil -1\rceil}^{j-1\lfloor 2l+2\rfloor} \arrow[d] \\
q_{n\lceil \pm 1\rceil}^{j\lfloor 4l+3\pm 1\rfloor} & q_{n\lceil -1\rceil}^{j\lfloor 2l+1\rfloor} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Пусть $i < n$. Предположим, что для $i' = i + 1$ утверждение было доказано. Считаем, что в элементарную дизъюнкцию c_0 не входит ни один литерал. Тогда есть четыре случая:

1. Если литерал $\neg_{t_{i+1}} x_{i+1}$ не входит в элементарные дизъюнкции c_{j-1} и c_j, то $\Psi^2(\mathbb{P}_i^{j-1+}) = \mathbb{P}_{i+1}^{j-1+}$, $\Psi^2(\mathbb{Q}_{i+1}^{j-}) = \mathbb{Q}_i^{j-}$ и $\mathbb{P}_{i+1}^{j-1+} \psi^* \mathbb{Q}_{i+1}^{j-}$. Отсюда получаем, что $\mathbb{P}_i^{j-1+} \psi^* \mathbb{Q}_i^{j-}$.

$$\begin{tikzcd}
p_{i\lceil 1\rceil}^{j-1\lfloor 4l+4\pm 1\rfloor} \arrow[r] \arrow[d, dotted] & p_{i\lceil 1\rceil}^{j-1\lfloor 4l+6\rfloor} \arrow[r] & p_{i+1\lceil 1\rceil}^{j-1\lfloor 4l+5\rfloor} \arrow[d, dotted] \\
q_{i\lceil \pm 1\rceil}^{j\lfloor 4l+3\pm 1\rfloor} & p_{i\lceil -1\rceil}^{j\lfloor 4l+3\rfloor} \arrow[l] & p_{i+1\lceil -1\rceil}^{j\lfloor 4l+4\rfloor} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

2. Если литерал $\neg_{t_{i+1}} x_{i+1}$ не входит в элементарную дизъюнкцию c_{j-1}, но входит в c_j, то $\Psi^3(\mathbb{P}_i^{j-1+}) = \pi\Phi\pi(\mathbb{P}_i^{j-1+}) = \pi\Phi(\mathbb{P}_i^{j-1-}) = \pi(\mathbb{Q}_i^{j+}) = \mathbb{Q}_i^{j-}$.

$$\begin{tikzcd}
p_{i\lceil 1\rceil}^{j-1\lfloor 4l+4\pm 1\rfloor} \arrow[r] \arrow[d, dotted] & p_{i\lceil -1\rceil}^{j-1\lfloor 4l+6\rfloor} \arrow[d] \\
q_{i\lceil \pm 1\rceil}^{j\lfloor 4l+3\pm 1\rfloor} & q_{i\lceil -1\rceil}^{j\lfloor 4l+5\rfloor} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

3. Если литерал $\neg_{t_{i+1}} x_{i+1}$ входит в элементарную дизъюнкцию c_{j-1}, но не входит в c_j, то $\Psi^2(\mathbb{P}_i^{j-1+}) = \mathbb{P}_{i+1}^{j-2+}$, $\Psi^2(\mathbb{Q}_{i+1}^{j}) = \mathbb{Q}_i^{j-}$, $\Phi(\mathbb{Q}_{i+1}^{j-1+}) = \mathbb{P}_{i+1}^{j-1+}$, $\mathbb{P}_{i+1}^{j-2+} \psi^* \mathbb{Q}_{i+1}^{j-1-}$ и $\mathbb{P}_{i+1}^{j-1+} \psi^* \mathbb{Q}_{i+1}^{j-}$. Отсюда получа-

ем, что $\mathbb{P}_i^{j-1+}\psi^*\mathbb{Q}_i^{j-}$.

$$\begin{tikzcd}
 & & p_{i+1\lceil 1\rceil}^{j-2\lfloor 4l+7\rfloor} \arrow[d, dotted] \\
 & & q_{i+1\lceil 1\rceil}^{j-1\lfloor 4l+6\rfloor} \arrow[d] \\
p_{i\lceil 1\rceil}^{j-1\lfloor 4l+4\pm 1\rfloor} \arrow[r] \arrow[d, dotted] & p_{i\lceil 1\rceil}^{j-1\lfloor 4l+8\rfloor} \arrow[ur] & p_{i+1\lceil 1\rceil}^{j-1\lfloor 4l+5\rfloor} \arrow[d, dotted] \\
q_{i\lceil \pm 1\rceil}^{j\lfloor 4l+3\pm 1\rfloor} & q_{i\lceil -1\rceil}^{j\lfloor 4l+3\rfloor} \arrow[l] & q_{i+1\lceil -1\rceil}^{j\lfloor 4l+4\rfloor} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

4. Если литерал $\neg_{t_{i+1}}x_{i+1}$ входит в обе элементарные дизъюнкции c_{j-1} и c_j, то $\Psi^2(\mathbb{P}_i^{j-1+}) = \mathbb{P}_{i+1}^{j-2+}$, $\Psi^2(\mathbb{Q}_{i+1}^{j-1-}) = \mathbb{Q}_i^{j-}$ и $\mathbb{P}_{i+1}^{j-2+}\psi^*\mathbb{Q}_{i+1}^{j-1-}$. Отсюда получаем, что $\mathbb{P}_i^{j-1+}\psi^*\mathbb{Q}_i^{j-}$.

$$\begin{tikzcd}
 & & p_{i+1\lceil 1\rceil}^{j-2\lfloor 4l+7\rfloor} \arrow[d, dotted] \\
 & & q_{i+1\lceil -1\rceil}^{j-1\lfloor 4l+6\rfloor} \arrow[dl] \\
p_{i\lceil 1\rceil}^{j-1\lfloor 4l+4\pm 1\rfloor} \arrow[r] \arrow[d, dotted] & p_{i\lceil 1\rceil}^{j-1\lfloor 4l+8\rfloor} \arrow[ur] & \\
q_{i\lceil \pm 1\rceil}^{j\lfloor 4l+3\pm 1\rfloor} & q_{i\lceil -1\rceil}^{j\lfloor 4l+5\rfloor} \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

□

Лемма 4.2.2. *Для всех* $0 \le i \le n$ *и* $0 < j \le n$, *выполняется* $\mathbb{Q}_i^{j+}\psi^*\mathbb{P}_i^{j-}$.

Доказательство. Для $i = 0$ это верно, так как $\Psi^3(\mathbb{Q}_0^{j+}) = \pi\Phi\pi(\mathbb{Q}_0^{j+}) = \pi\Phi(\mathbb{Q}_0^{j-}) = \pi(\mathbb{P}_0^{j+}) = \mathbb{P}_0^{j-}$

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \\
q_{0\lceil -1\rceil}^{j\lfloor 4l+4\pm 1\rfloor} \arrow[d, dotted] & & q_{0\lceil 1\rceil}^{j\lfloor 2l+4\rfloor} \arrow[d] \\
p_{0\lceil \pm 1\rceil}^{j\lfloor 4l+3\pm 1\rfloor} \arrow[ur, bend left] & & p_{0\lceil -1\rceil}^{j\lfloor 2l+3\rfloor} \arrow[ul, bend right]
\end{tikzcd}$$

Пусть $i > 0$. Предположим, что для $i' = i - 1$ утверждение было доказано. Считаем, что в элементарную дизъюнкцию c_{m+1} не входит ни один литерал. Тогда есть четыре случая:

1. Если литерал $\neg_{t_i} x_i$ не входит в элементарные дизъюнкции c_{j+1} и c_j, то $\Psi^2(\mathbb{Q}_i^{j+}) = \mathbb{Q}_{i-1}^{j+}$, $\Psi^2(\mathbb{P}_{i-1}^{j-}) = \mathbb{P}_i^{j-}$, и $\mathbb{Q}_{i-1}^{j+} \psi^* \mathbb{P}_{i-1}^{j-}$. Отсюда получаем, что $\mathbb{Q}_i^{j+} \psi^* \mathbb{P}_i^{j-}$.

$$\begin{tikzcd}
q_{i-1\lceil -1 \rceil}^{j\lfloor 4l+3 \rfloor} & q_{i\lceil -1 \rceil}^{j\lfloor 4l+4 \rfloor} \arrow[l] & q_{i\lceil -1 \rceil}^{j\lfloor 4l+4\pm 1 \rfloor} \arrow[l] \\
p_{i-1\lceil 1 \rceil}^{j\lfloor 4l+2 \rfloor} \arrow[u, dotted] \arrow[r] & p_{i\lceil 1 \rceil}^{j\lfloor 4l+1 \rfloor} \arrow[r] & p_{i\lceil \pm 1 \rceil}^{j\lfloor 4l+3 \rfloor} \arrow[u, dotted]
\end{tikzcd}$$

2. Если литерал $\neg_{t_i} x_i$ не входит в элементарную дизъюнкцию c_{j+1}, но входит в c_j, то $\Psi^3(\mathbb{Q}_i^{j+}) = \pi\Phi\pi(\mathbb{Q}_i^{j+}) = \pi\Phi(\mathbb{Q}_i^{j-}) = \pi(\mathbb{P}_i^{j+}) = \mathbb{P}_i^{j-}$.

$$\begin{tikzcd}
q_{i\lceil 1 \rceil}^{j\lfloor 4l+2 \rfloor} \arrow[d] & q_{i\lceil -1 \rceil}^{j\lfloor 4l+4\pm 1 \rfloor} \arrow[l] \arrow[d, dotted] \\
p_{i\lceil 1 \rceil}^{j\lfloor 4l+1 \rfloor} \arrow[r] & p_{i\lceil \pm 1 \rceil}^{j\lfloor 4l+3\pm 1 \rfloor}
\end{tikzcd}$$

3. Если литерал $\neg_{t_i} x_i$ входит в элементарную дизъюнкцию c_{j+1}, но не входит в c_j, то $\Psi^2(\mathbb{Q}_i^{j+}) = \mathbb{Q}_{i-1}^{j+}$, $\Psi^2(\mathbb{P}_{i-1}^{j+1-}) = \mathbb{P}_i^{j-}$, $\Phi(\mathbb{P}_{i-1}^{j+}) = \mathbb{Q}_{i-1}^{j+1+}$, $\mathbb{Q}_{i-1}^{j+} \psi^* \mathbb{P}_{i-1}^{j-}$, и $\mathbb{Q}_{i-1}^{j+1+} \psi^* \mathbb{P}_{i-1}^{j+1-}$. Отсюда получаем, что $\mathbb{Q}_i^{j+} \psi^* \mathbb{P}_i^{j-}$.

$$\begin{tikzcd}
q_{i-1\lceil -1 \rceil}^{j\lfloor 4l+3 \rfloor} & q_{i\lceil -1 \rceil}^{j\lfloor 4l+4 \rfloor} \arrow[l] & q_{i\lceil -1 \rceil}^{j\lfloor 4l+4\pm 1 \rfloor} \arrow[l] \\
p_{i-1\lceil -1 \rceil}^{j\lfloor 4l+2 \rfloor} \arrow[u, dotted] \arrow[d] & p_{i\lceil 1 \rceil}^{j\lfloor 4l-1 \rfloor} \arrow[r] & p_{i\lceil \pm 1 \rceil}^{j\lfloor 4l+3\pm 1 \rfloor} \arrow[u, dotted] \\
q_{i-1\lceil -1 \rceil}^{j+1\lfloor 4l+1 \rfloor} \arrow[d, dotted] & & \\
p_{i-1\lceil 1 \rceil}^{j+1\lfloor 4l \rfloor} \arrow[uur] & &
\end{tikzcd}$$

4. Если литерал $\neg_{t_i} x_i$ входит в обе элементарные дизъюнкции c_{j+1} и c_j, то $\Psi^2(\mathbb{Q}_i^{j+}) = \mathbb{Q}_{i-1}^{j+1+}$, $\Psi^2(\mathbb{P}_{i-1}^{j+1-}) = \mathbb{P}_i^{j-}$, и $\mathbb{Q}_{i-1}^{j+1+} \psi^* \mathbb{P}_{i-1}^{j+1-}$. Отсюда

получаем, что $\mathbb{Q}_i^{j+}\psi^*\mathbb{P}_i^{j-}$.

$$
\begin{tikzcd}
 & q_{i\lceil -1\rceil}^{j\lfloor 4l+2\rfloor} & q_{i\lceil -1\rceil}^{j\lfloor 4l+4\pm 1\rfloor} \arrow[l] \arrow[d, dotted] \\
 & p_{i\lceil 1\rceil}^{j\lfloor 4l-1\rfloor} \arrow[r] & p_{i\lceil \pm 1\rceil}^{j\lfloor 4l+3\pm 1\rfloor} \\
q_{i-1\lceil -1\rceil}^{j+1\lfloor 4l+1\rfloor} \arrow[uur, leftrightarrow] \arrow[d, dotted] & & \\
p_{i-1\lceil 1\rceil}^{j+1\lfloor 4l\rfloor} \arrow[uur] & &
\end{tikzcd}
$$

□

Из лемм 4.2.1 и 4.2.2 мы можем заключить, что если $i > 0$ и $j \leq j'$, то $\mathbb{P}_i^{j+}\psi^*\mathbb{P}_i^{j'+}$ и $\mathbb{P}_i^{j-} <_\psi \mathbb{P}_i^{j'-}$.

Лемма 4.2.3. *Если $0 \leq i < i' \leq n$, то $\mathbb{P}_i^{j+}\psi^*\mathbb{P}_{i'}^{j+}$.*

Доказательство. Если литерал $\neg_{t_{i+1}}x_{i+1}$ входит в элементарную дизъюнкцию c_j, то $\Psi^2(\mathbb{P}_i^{j+}) = \mathbb{P}_{i+1}^{j-1+}$ и $\mathbb{P}_{i+1}^{j-1+}\psi^*\mathbb{P}_{i+1}^{j+}$. Если литерал $\neg_{t_{i+1}}x_{i+1}$ входит в элементарнцю дизъюнкцию c_{j+1}, то $\Psi(\mathbb{P}_i^{j+1-}) = \mathbb{P}_{i+1}^{j+}$ и $\mathbb{P}_i^{j-}\psi^*\mathbb{P}_i^{j+1-}$. Если ни то, ни другое не верно, то $\Psi^2(\mathbb{P}_i^{j+}) = \mathbb{P}_{i+1}^{j+}$. Это значит, что $\mathbb{P}_i^{j+}\psi^*\mathbb{P}_{i+1}^{j+}$ и поэтому $\mathbb{P}_i^{j+}\psi^*\mathbb{P}_{i'}^{j+}$. □

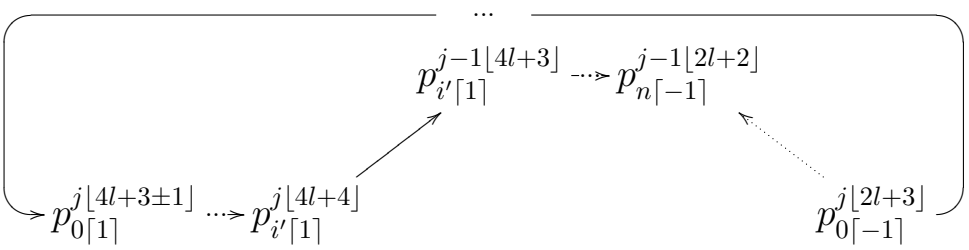
Из леммы 4.2.3 следует, что для всех $i > 0$, верно, что $\mathbb{P}_i^{m+}\psi^+\mathbb{P}_n^{m-}$.

Лемма 4.2.4. *Секвенция $F_1(t_1)\ldots F_n(t_n) \to G$ выводится в $\mathrm{L}(\backslash, /)$ (и в $\mathrm{L}^*(\backslash, /)$), если и только если $\langle t_1, \ldots, t_n\rangle$ есть выполняющая оценка для формулы $c_1 \wedge \ldots \wedge c_m$.*

Доказательство. Пусть $\langle t_1, \ldots, t_n\rangle$ есть выполняющая оценка для формулы $c_1 \wedge \ldots \wedge c_m$. Принимая во внимание леммы 4.2.1, 4.2.2 и 4.2.3, единственными элементами $\mathcal{N}_{\mathbb{W}}$, для которых мы не проверили выполняемость условия из леммы 4.0.6, являются $\mathbb{P}_0^{j+}$.

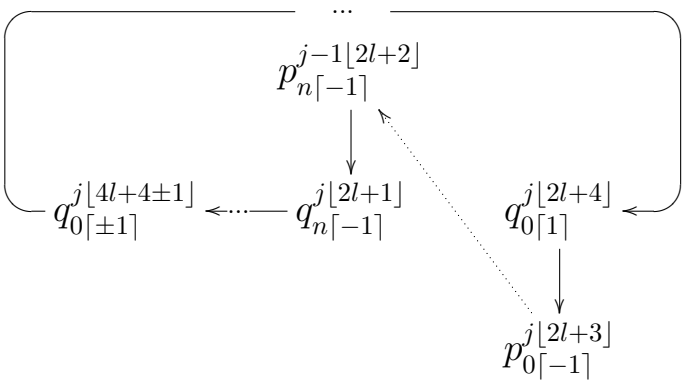
Так как $\Phi(\mathbb{P}_0^{0+}) = \mathbb{P}_n^{0-}$, для $\mathbb{P}_0^{0+}$ условие из леммы 4.0.6 выполнено в связи с леммой 4.2.3. Пусть $j > 0$. Тогда $\Phi(\mathbb{P}_0^{j+}) = \mathbb{P}_n^{j-1-}$, и нам надо

доказать, что $\mathbb{P}_0^{j+}\psi^*\mathbb{P}_n^{j-1-}$. Существует i, такое что литерал $\neg_{t_i}x_i$ входит в элементарную дизъюнкцию c_j. Это значит, что $\psi(\mathbb{P}_{i-1}^{j-}) = \mathbb{P}_i^{j-1+}$ и по лемме 4.2.3 $\mathbb{P}_0^{j+}\psi^*\mathbb{P}_{i-1}^{j+}$ и $\mathbb{P}_i^{j-1+}\psi^*\mathbb{P}_n^{j-1+}$. Отсюда $\mathbb{P}_0^{j+}\psi^*\mathbb{P}_n^{j-1-}$ и по лемме 4.0.6 получаем, что для сети доказательства (π, φ, ψ) выполнены доказательные условия (4) и (5). Значит $\mathrm{L}^*(\backslash, /) \vdash F_1(t_1)\dots F_n(t_n) \to G$.



Пусть $\langle t_1, \dots, t_n\rangle$ не является выполняющей оценкой для формулы $c_1 \wedge \dots \wedge c_m$. Существует j, такое что никакой литерал $\neg_{t_i}x_i$ не входит в элементарную дизъюнкцию c_j. Это значит, что для $0 < i \leq n$, выполняются соотношения $\Psi^{2i}(\mathbb{Q}_n^{j+}) = \mathbb{Q}_{n-i}^{j+}$, $\Psi(\mathbb{P}_n^{j-1-}) = \mathbb{Q}_n^{j+}$ и $\Psi(\mathbb{Q}_0^{j-}) = \mathbb{P}_0^{j+}$. Отсюда $\mathbb{P}_n^{j-1-}\psi^*\mathbb{P}_0^{j+}$. Это значит, что единственно возможная сеть доказательства не может удовлетворять доказательному условию (4). Значит по теореме 1

$$\mathrm{L}^*(\backslash, /) \not\vdash F_1(t_1)\dots F_n(t_n) \to G.$$



Так как сеть доказательства удовлетворяет доказательному условию (6), то

$$\mathrm{L}(\backslash, /) \vdash F_1(t_1)\dots F_n(t_n) \to G \Leftrightarrow \mathrm{L}^* \vdash F_1(t_1)\dots F_n(t_n) \to G$$

и лемма полностью доказана. $\square$

Лемма 4.2.5. *Если* $\mathrm{L}(\backslash, /) \vdash \Pi \to A$, *а секвенция* $\Pi' \to A'$ *есть результат замены всех вхождений примитивного типа* p *примитивным типом* q *в секвенции* $\Pi \to A$, *то* $\mathrm{L}(\backslash, /) \vdash \Pi' \to A'$.

Доказательство. Поменяв p на q везде в выводе секвенции $\Pi \to A$, мы получим вывод секвенции $\Pi' \to A'$. □

Лемма 4.2.6.

$$\mathrm{L}(\backslash, /) \vdash F_i(1) \to (B_i \backslash A_i),$$
$$\mathrm{L}(\backslash, /) \vdash F_i(0) \to (B_i \backslash A_i).$$

Доказательство. Рассмотрим булеву формулу от двух переменных $c'_1 \wedge \ldots \wedge c'_m$, где

$$c'_j = \begin{cases} (x_1 \vee x_2), & \text{если литерал } \neg_1 x_i \text{ входит в } c_j, \\ x_1, & \text{если литерал } \neg_1 x_i \text{ не входит } c_j. \end{cases}$$

Пусть $F'_1(1)F'_2(1) \to G'$ — секвенция, построенная для этой формулы. Согласно лемме 4.2.4, можно утверждать, что $\mathrm{L}(\backslash, /) \vdash F'_1(1)F'_2(1) \to G'$.

Поменяв p_0^j на a_i^j, q_0^j на b_i^j, p_1^j на p_{i-1}^j, q_1^j на q_{i-1}^j, p_2^j на p_i^j и q_2^j на q_i^j, получим секвенцию $B_i F_i(1) \to A_i$. По лемме 4.2.5 получаем $\mathrm{L}(\backslash, /) \vdash B_i F_i(1) \to A_i$. Отсюда $\mathrm{L}(\backslash, /) \vdash F_i(1) \to (B_i \backslash A_i)$.

Сделав то же самое для формулы от двух переменных $c'_1 \wedge \ldots \wedge c'_m$, где

$$c'_j = \begin{cases} (x_1 \vee x_2), & \text{если литерал } \neg_0 x_i \text{ входит в } c_j, \\ x_1, & \text{если литерал } \neg_0 x_i \text{ не входит } c_j, \end{cases}$$

мы получим $\mathrm{L}(\backslash, /) \vdash B_i F_i(0) \to A_i$. Отсюда $\mathrm{L}(\backslash, /) \vdash F_i(0) \to (B_i \backslash A_i)$. □

Лемма 4.2.7. $\mathrm{L}(\backslash, /) \vdash \Pi_i \to F_i(t_i)$, *где* $t_i \in \{0, 1\}$.

Доказательство. Согласно лемме 4.2.6 имеем $\mathrm{L}(\backslash, /) \vdash F_i(1) \to (B_i \backslash A_i)$ и $\mathrm{L}(\backslash, /) \vdash F_i(1) \to (B_i \backslash A_i)$. Тогда мы можем вывести $\Pi_i \to F_i(t_i)$, где $t_i \in \{0, 1\}$, следующим образом:

$$\dfrac{\dfrac{F_i(0) \to F_i(0) \quad F_i(1) \to (B_i \backslash A_i)}{F_i(0)(F_i(0)\backslash F_i(1)) \to (B_i \backslash A_i)}\,(\backslash \to) \qquad F_i(0) \to F_i(0);}{(F_i(0)/(B_i\backslash A_i))F_i(0)(F_i(0)\backslash F_i(1)) \to F_i(0)}\,(/ \to)$$

$$\dfrac{\dfrac{F_i(0) \to (B_i \backslash A_i) \quad F_i(0) \to F_i(0)}{F_i(0)/(B_i\backslash A_i)F_i(0) \to F_i(0)}\,(/ \to) \qquad F_i(1) \to F_i(1).}{(F_i(0)/(B_i\backslash A_i))F_i(0)(F_i(0)\backslash F_i(1)) \to F_i(1)}\,(\backslash \to)$$

□

Лемма 4.2.8. *Если формула* $c_1 \wedge \ldots \wedge c_m$ *выполнима, то* $\mathrm{L}(\backslash, /) \vdash \Pi_1 \ldots \Pi_n \to G$.

Доказательство. Пусть $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle$ есть выполняющая оценка для формулы $c_1 \wedge \ldots \wedge c_m$. Согласно лемме 4.2.4 $\mathrm{L}(\backslash, /) \vdash F_1(t_1) \ldots F_n(t_n) \to G$. Применяем лемму 4.2.7 и правило сечения n раз и получаем секвенцию $\Pi_1 \ldots \Pi_n \to G$. □

Теперь будем доказывать другую часть теоремы о сведении.

Пусть $\mathrm{L}^*(\backslash, /) \vdash \Pi_1 \ldots \Pi_n \to G$. Рассмотрим

$$\mathbb{W} = [\![(F_1(0)/(B_1\backslash A_1))]\!]^{\langle 0\rangle}[\![F_1(0)]\!]^{\langle 0\rangle}[\![(F_1(0)\backslash F_1(1))]\!]^{\langle 0\rangle} \ldots$$
$$\ldots [\![(F_n(0)/(B_n\backslash A_n))]\!]^{\langle 0\rangle}[\![F_n(0)]\!]^{\langle 0\rangle}[\![(F_n(0)\backslash F_n(1))]\!]^{\langle 0\rangle}[\![G]\!].$$

Рассмотрим следующие обозначения для некоторых элементов множества $\mathcal{P}_{\mathbb{W}}$ и подстрок строки $\mathbb{W}$:

$$\mathbb{F}_i = [\![(F_1(0)/(B_1\backslash A_1))]\!]^{\langle 0\rangle}[\![F_1(0)]\!]^{\langle 0\rangle}[\![(F_1(0)\backslash F_1(1))]\!]^{\langle 0\rangle}$$

$$\mathbb{F}_i^0 = \mathbb{F}_i \ldots \mathbb{F}_{i-1}[\![F_i(0)]\!]^{\langle 0\rangle}x \qquad \mathbb{F}_i^{0\prime} = [\![F_i(0)]\!]^{\langle 0\rangle}$$
$$\mathbb{A}_i = \mathbb{F}_i^0([\![A_i]\!]^{\langle 1\rangle})^{\langle 0\rangle} \qquad \mathbb{A}_i' = ([\![A_i]\!]^{\langle 1\rangle})^{\langle 0\rangle}$$
$$\mathbb{B}_i = \mathbb{A}_i(([\![B_i]\!]^{\langle -1\rangle})^{\langle 1\rangle})^{\langle 0\rangle} \qquad \mathbb{B}_i' = (([\![B_i]\!]^{\langle -1\rangle})^{\langle 1\rangle})^{\langle 0\rangle}$$
$$\mathbb{H}_i = \mathbb{B}_i[\![F_i(0)]\!]^{\langle 0\rangle}$$
$$\mathbb{C}_i = \mathbb{H}_i([\![F_i(0)]\!]^{\langle -1\rangle})^{\langle 1\rangle} \qquad \mathbb{F}_i^{0\prime\prime} = ([\![F_i(0)]\!]^{\langle -1\rangle})^{\langle 1\rangle}$$
$$\mathbb{F}_i^1 = \mathbb{C}_i[\![F_i(1)]\!]^{\langle 0\rangle} \qquad \mathbb{F}_i^{1\prime} = [\![F_i(1)]\!]^{\langle 0\rangle}$$

Лемма 4.2.9. *Если* $\mathrm{L}^*(\backslash, /) \vdash \Pi_1 \ldots \Pi_i F_{i+1}(t_{i+1}) \ldots F_n(t_n) \to G$, *то существует такое* $t_i \in \{0, 1\}$, *что*

$$\mathrm{L}^*(\backslash, /) \vdash \Pi_1 \ldots \Pi_{i-1} F_i(t_i) \ldots F_n(t_n) \to G.$$

Доказательство. Рассмотрим $\mathbb{W}' = \mathbb{F}_i^1 \mathbb{W}''$, где $\mathbb{W}'' = [\![F_{i+1}(t_{i+1})]\!]^{\langle 0 \rangle} \ldots [\![F_n(t_n)]\!]^{\langle 0 \rangle} [\![G]\!]$. По теореме 4.0.6 для $\mathbb{W}'$ существует сеть доказательства (π, φ, ψ), удовлетворяющая доказательным условиям (1)–(5). Условие из леммы 4.0.6 также выполнено.

Пусть $\mathbb{W}'_0 = \mathbb{F}_{i-1}^1 [\![F_i(0)]\!]^{\langle 0 \rangle} \mathbb{W}''$ и $\mathbb{W}'_1 = \mathbb{F}_{i-1}^1 [\![F_i(1)]\!]^{\langle 0 \rangle} \mathbb{W}''$.

Для каждого j есть ровно два элемента $\mathcal{P}_{\mathbb{W}'}$, такие что $t(\mathbb{A}) = a_i^j$, и ровно два элемента, такие что $t(\mathbb{A}) = b_i^j$. Это значит, что эти пары элементов π-замкнуты.

Есть шесть элементов $\mathcal{P}_{\mathbb{W}'}$, таких что $t(\mathbb{A}) = p_i^0$. Обозначим их $\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_6$, так что $\mathbb{P}_1 \sqsubset \ldots \sqsubset \mathbb{P}_6$. Верно следующее:

$$\mathbb{F}_{i-1}^1 \sqsubset \mathbb{P}_1 \sqsubset \mathbb{F}_i^0 \sqsubset \mathbb{P}_2 \sqsubset \mathbb{A}_i \sqsubset \mathbb{B}_i \sqsubset \mathbb{P}_3 \sqsubset$$
$$\sqsubset \mathbb{H}_i \sqsubset \mathbb{P}_4 \sqsubset \mathbb{C}_i \sqsubset \mathbb{P}_5 \sqsubset \mathbb{F}_i^1 \sqsubset \mathbb{P}_6.$$

Множество $\{\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_6\}$ является π-замкнутым. $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_3, \mathbb{P}_5 \in \mathcal{N}_{\mathbb{W}}$. Множества $[\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2]_\sqsubset$ и $[\mathbb{P}_4, \mathbb{P}_5]_\sqsubset$ не могут быть π-замкнуты, сделовательно есть только две возможности: либо $\pi(\mathbb{P}_1) = \mathbb{P}_4$, $\pi(\mathbb{P}_3) = \mathbb{P}_2$ и $\pi(\mathbb{P}_5) = \mathbb{P}_6$,

$$\mathbb{F}_i^{0\prime} \quad \mathbb{A}_i' \quad \mathbb{B}_i' \quad \mathbb{F}_i^{0\prime} \quad \mathbb{F}_i^{0\prime\prime} \qquad \mathbb{F}_i^{1\prime} \quad \mathbb{F}_{i+1}^{t_{i+1}\prime}$$

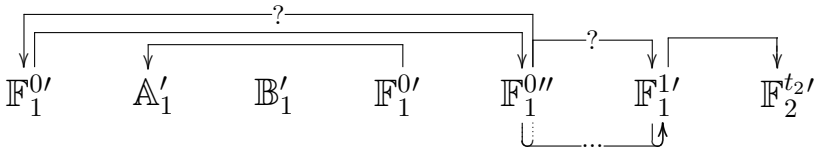
либо $\pi(\mathbb{P}_1) = \mathbb{P}_6$, $\pi(\mathbb{P}_3) = \mathbb{P}_4$ и $\pi(\mathbb{P}_5) = \mathbb{P}_2$.

$$\mathbb{F}_i^{0\prime} \quad \mathbb{A}_i' \quad \mathbb{B}_i' \quad \mathbb{F}_i^{0\prime} \quad \mathbb{F}_i^{0\prime\prime} \quad \mathbb{F}_i^{1\prime} \quad \mathbb{F}_{i+1}^{t_{i+1}\prime}$$

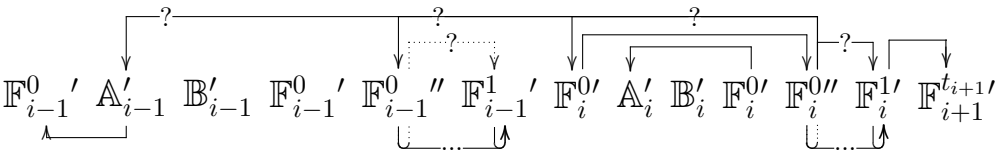
Пусть $\pi(\mathbb{P}_1) = \mathbb{P}_4$, $\pi(\mathbb{P}_3) = \mathbb{P}_2$ и $\pi(\mathbb{P}_5) = \mathbb{P}_6$. Заметим, что $t(\mathbb{C}_i) = p_{i-1}^m$ и $\mathbb{C}_i \in \mathcal{N}_{\mathbb{W}'}$.

Если $i = 1$, то существует только два варианта для $\pi(\mathbb{C}_i)$: один — это $p_{0\lceil 1 \rceil}^{m\lfloor l \rfloor}$, а другой — $\mathbb{C}_1 p_{0\lceil 1 \rceil}^{m\lfloor l \rfloor}$, где $l = 2$ или $l = 4$. Первый вариант

невозможен по лемме 2.1.5. Следовательно, $\pi(\mathbb{C}_1) = p^{m\lfloor l\rfloor}_{0\lceil 1\rceil}$ и $[p^{m\lfloor l\rfloor}_{0\lceil 1\rceil}, \mathbb{C}_1]_\sqsubset$ является π-замкнутым.



Если $i > 1$, то есть четыре варианта для $\pi(\mathbb{C}_i)$: $\mathbb{F}^1_{i-1}p^{m\lfloor l\rfloor}_{i-1\lceil 1\rceil}$, $\mathbb{C}_i p^{m\lfloor l\rfloor}_{i-1\lceil 1\rceil}$, где $l = 2$ или $l = 4$, $\mathbb{H}_{i-1}p^{m\lfloor 2\rfloor}_{i-1\lceil 1\rceil}$, и $\mathbb{F}^0_{i-1}p^{m\lfloor 2\rfloor}_{i-1\lceil -1\rceil}$. Второй вариант невозможен. Если $\pi(\mathbb{C}_i) = \mathbb{H}_{i-1}p^{m\lfloor 2\rfloor}_{i-1\lceil 1\rceil}$, то $\pi(\mathbb{C}_{i-1}) = \mathbb{C}_{i-1}p^{m\lfloor l\rfloor}_{i-2\lceil 1\rceil}$, где $l = 2$ или $l = 4$, что невозможно по лемме 2.1.5. Если же $\pi(\mathbb{C}_i) = \mathbb{F}^0_{i-1}p^{m\lfloor 2\rfloor}_{i-1\lceil -1\rceil}$, то так как полуинтервал $(\mathbb{F}^0_{i-1}, \mathbb{C}_i]_\sqsubset$ является φ-замкнутым и π-замкнутым, $\neg(\mathbb{G}\psi^*\mathbb{F}^0_{i-1}p^{m\lfloor 2\rfloor}_{i-1\lceil -1\rceil})$ для всех $\mathbb{G} \notin (\mathbb{F}^0_{i-1}, \mathbb{C}_i]_\sqsubset$. Но $\Psi^2(\mathbb{C}_i) = \Phi(\pi(\mathbb{C}_i)) = \Phi(\mathbb{F}^0_{i-1}p^{m\lfloor 2\rfloor}_{i-1\lceil -1\rceil}) = \mathbb{F}^0_{i-1} \notin (\mathbb{F}^0_{i-1}, \mathbb{C}_i]_\sqsubset$. Следовательно, $\neg(\mathbb{C}_i\psi^*\mathbb{H}_i p^{m\lfloor 2\rfloor}_{i\lceil 1\rceil})$, но $\mathbb{C}_i\varphi^*\mathbb{H}_i p^{m\lfloor 2\rfloor}_{i\lceil 1\rceil}$ и условие из леммы 4.0.6 не выполнено. Значит, $\pi(\mathbb{C}_i) = \mathbb{F}^1_{i-1}p^{m\lfloor l\rfloor}_{i-1\lceil 1\rceil}$ и $(\mathbb{F}^1_{i-1}, \mathbb{C}_i]_\sqsubset$ является π-замкнутым.

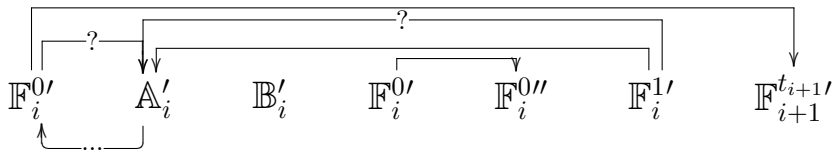


Поскольку $(\mathbb{F}^1_{i-1}, \mathbb{C}_i]_\sqsubset$ является π-замкнутым и φ-замкнутым, по лемме 2.2.8 для $\mathbb{W}'_1$ существует сеть доказательства, удовлетворяющая доказательным условиям (1)–(5), и

$$\mathrm{L}^*(\backslash, /) \vdash \Pi_1 \ldots \Pi_{i-1} F_i(1) \ldots F_n(t_n) \to G.$$

Пусть теперь $\pi(\mathbb{P}_1) = \mathbb{P}_6$, $\pi(\mathbb{P}_3) = \mathbb{P}_4$ и $\pi(\mathbb{P}_5) = \mathbb{P}_2$. Пусть $\mathbb{E} = \mathbb{F}^0_i p^{m\lfloor 2\rfloor}_{i\lceil -1\rceil}$.

Есть только два варианта для $\pi^{-1}(\mathbb{E})$: один — это $\mathbb{F}^0_i$, а другой — $\mathbb{F}^1_i$. Первый вариант невозможен по лемме 2.1.5. Значит, $\pi(\mathbb{E}) = \mathbb{F}^1_i$ и $(\mathbb{F}^0_i, \mathbb{F}^1_i]_\sqsubset$ является π-замкнутым.



Поскольку $(\mathbb{F}_i^0, \mathbb{F}_i^1]_\sqsubset$ является π-замкнутым и φ-замкнутым, по лемме 2.2.8 для $\mathbb{W}_0'$ существует сеть доказательства, удовлетворяющая доказательным условиям (1)–(5), и

$$\mathrm{L}^*(\backslash, /) \vdash \Pi_1 \ldots \Pi_{i-1} F_i(0) \ldots F_n(t_n) \to G.$$

□

Лемма 4.2.10. *Если* $\mathrm{L}^*(\backslash, /) \vdash \Pi_1 \ldots \Pi_n \to G$, *то формула* $c_1 \wedge \ldots \wedge c_m$ *выполнима.*

Доказательство. Применив n раз лемму 4.2.9, получим в результате, что существует такая оценка $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in \{0,1\}^n$, что $\mathrm{L}^*(\backslash, /) \vdash F_1(t_1) \ldots F_n(t_n) \to G$. Согласно лемме 4.2.4 это значит, что $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle$ есть выполняющая оценка для формулы $c_1 \wedge \ldots \wedge c_m$. □

Так как для всех секвенций $\mathrm{L}(\backslash, /) \vdash \Pi \to A \Rightarrow \mathrm{L}^*(\backslash, /) \vdash \Pi \to A$, лемма 4.2.8 и лемма 4.2.10 дают нам лемму 4.1.1.

Глава 5

Фрагмент исчисления Ламбека с одним делением

Во фрагменте исчисления Ламбека с одним делением L(\) для создания сложных типов используются только одна операция — \. Соответственно, из правил остаются только (→ \), и (\ →). Полное исчисление Ламбека является консервативным расширением фрагмента с одним делением. Аналогично можно рассматривать исчисление $\mathrm{L}^*(\backslash)$. Как и в полном исчислении, правило сечения является устранимым.

5.1 Критерий выводимости

Для описания выводимости в исчислении L(\) мы будем пользоваться другим представлением секвенций. Рассмотрим отображение $[\![\cdot]\!]'\colon \mathrm{Tp}(\backslash) \to \mathrm{FS}$:

$$[\![p]\!]' = p^{\lfloor 1 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil};$$
$$[\![(A\backslash B)]\!]' = [\![B]\!]'([\![A]\!]')^{\langle 0 \rangle};$$

Здесь использовано отображение $(\cdot)^{\langle 0 \rangle}$, определенное в разделе 2.1.

Более простая структура типов в этом фрагменте позволяет использовать только атомы вида $p^{\lfloor i \rfloor}_{\lceil 0 \rceil}$, где $i > 0$, для однозначной передачи структуры исходного типа.

Легко проверить индукцией по построению типа, что $d([\![A]\!]') = 1$, и, если A не примитивен, строка $[\![A]\!]'$ имеет вид $p^{\lfloor 2 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil}\mathbb{A}$.

Секвенции $A_1 \dots A_n \to B$ мы поставим в соответствие строку $\mathbb{W} = [\![A_1]\!]' \dots [\![A_n]\!]'([\![B]\!]')^{\langle 0 \rangle}$.

Также мы будем пользоваться другими сетями доказательств. Мы не будем рассматривать отношение φ и функцию Φ, определенные в разделе 2.1. Функция π будет определена на всем множестве $\mathcal{P}_{\mathbb{W}}$. Сетью доказательства мы будем называть саму функцию π.

Рассмотрим новые доказательные условия:

1'. Для всех $\mathbb{A} \in \mathcal{P}_{\mathbb{W}}$ верно, что $\pi^2(\mathbb{A}) = \mathbb{A}$.

2'. Для всех $\mathbb{A} \in \mathcal{P}_{\mathbb{W}}$ верно, что $t(\pi(\mathbb{A})) = t(\mathbb{A})$.

3'. $\mu^-_\pi(\mathbb{A}) \sqsubset \mu^-_\pi(\mathbb{B}) \Rightarrow \mu^+_\pi(\mathbb{A}) \sqsubset \mu^-_\pi(\mathbb{B}) \vee \mu^+_\pi(\mathbb{B}) \sqsubset \mu^+_\pi(\mathbb{A})$.

4'. $d(\mu^+_\pi(\mathbb{A})) = d(\mu^-_\pi(\mathbb{A})) + 1$.

5'. Если $d(\mu^+_\pi(\mathbb{A})) = 2j$ для некоторого $j > 0$, то существует такое $\mathbb{B} \in (\mu^-_\pi(\mathbb{A}), \mu^+_\pi(\mathbb{A}))_\sqsubset$, что $d(\mathbb{B}) < 2j$.

6'. Если $d(\mu^+_\pi(\mathbb{A})) = 2j$ для некоторого $j > 0$, то либо существует такое $\mathbb{B} \in (\mu^-_\pi(\mathbb{A}), \mu^+_\pi(\mathbb{A}))_\sqsubset$, что $d(\mathbb{B}) < 2j$, либо

$$\pi(\mathbb{A}) = \max_{\sqsubset}\{\mathbb{B} \mid \forall \mathbb{C} \in (\mathbb{A}, \mathbb{B}]_\sqsubset d(\mathbb{C}) > d(\mathbb{A})\}.$$

Теорема 4. $\mathrm{L}(\backslash) \vdash A_1 \dots A_n \to B$, *если и только если* $n > 0$ *и для*

$$\mathbb{W} = [\![A_1]\!]' \dots [\![A_n]\!]'([\![B]\!]')^{\langle 0 \rangle}$$

существует сеть доказательства π, *удовлетворяющая доказательным условиям (1')-(5').*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Нетрудно видеть, что конструкции из леммы 2.2.1, относящиеся к правилам ($\to \backslash$) и ($\backslash \to$) сохраняют выполнение доказательных условий (1')–(5') при условии, что данное применение

правила корректно в рассматриваемом исчислении. Надо только доопределять π на каждом шаге для элементов $\mathcal{P}_{\mathbb{W}} \setminus \mathcal{N}_{\mathbb{W}}$.

($\Leftarrow$) Индукция по длине $\mathbb{W}$. Если длина $\mathbb{W}$ равна 2 и мы рассматриваем исчисление L($\backslash$), то секвенция может быть только вида $p \to p$. Эта секвенция выводима в L($\backslash$).

Пусть теперь для всех секвенций для которых длина соответствующей строки меньше длины $\mathbb{W}$ утверждение теоремы выполнено.

Предположим, что $B = (C_k \backslash (\ldots \backslash (C_1 \backslash p)))$. В этом случае секвенции $A_1 \ldots A_n \to B$ и $C_1 \ldots C_k A_1 \ldots A_n \to p$ выводятся или не выводятся одновременно. Рассмотрим

$$\mathbb{W}' = [\![C_1]\!]' \ldots [\![C_k]\!]' [\![A_1]\!]' \ldots [\![A_n]\!]' p_{\lceil 0 \rceil}^{\lfloor 2 \rfloor}.$$

Для $\mathbb{W}'$ существует сеть доказательства π', удовлетворяющая всем необходимым доказательным условиям. Ее можно получить из сети доказательства π, применив конструкцию, обратную той, что мы использовали в доказательстве леммы 2.2.1 при разборе правила ($\to \backslash$), и доопределив функцию π' для элементов $\mathcal{P}_{\mathbb{W}} \setminus \mathcal{N}_{\mathbb{W}}$.

Введем следующее обозначение:

$$\mathbb{A}_i = \begin{cases} [\![C_1]\!]' \ldots [\![C_i]\!]', & \text{если } 0 < i \leq k; \\ [\![C_1]\!]' \ldots [\![C_k]\!]' [\![A_1]\!]' \ldots [\![A_{i-k}]\!]', & \text{если } k < i \leq n+k. \end{cases}$$

Строка $\mathbb{W}'$ имеет вид $\mathbb{W}'' q_{\lceil 0 \rceil}^{\lfloor 1 \rfloor} p_{\lceil 0 \rceil}^{\lfloor 2 \rfloor}$. Если π' удовлетворяет доказательным условиям (1')–(4'), то $q = p$ и $\pi'(\mathbb{W}'' q_{\lceil 0 \rceil}^{\lfloor 1 \rfloor}) = \mathbb{W}'$.

Так как $d(\mathbb{A}_{n+k-1}) = 1$, для того чтобы выполнялось доказательное условие (4') должно выполняться утвержение

$$\pi'(\mathbb{A}_{n+k-1}) \in (\mathbb{A}_{n+k-1}; \mathbb{W}']_{\sqsubset}.$$

Отсюда следует, что тип A_n не может быть примитивным.

Предположим, что $A_n = (D \backslash p)$. В этом случае $\mathbb{W}''$ есть строка соответствующая секвенции $C_1 \ldots C_k A_1 \ldots A_{n-1} \to D$. Ограничив π' на $\mathcal{P}_{\mathbb{W}''}$ мы получим сеть доказательства для $\mathbb{W}''$, удовлетворяющую всем

необходимым доказательным условиям. Значит, по предположению индукции, $\mathrm{L}(\backslash) \vdash C_1 \dots C_k A_1 \dots A_{n-1} \to D$.

Применив правило $(\to \backslash)$ к секвенциям $C_1 \dots C_k A_1 \dots A_{n-1} \to D$ и $p \to p$ мы получим $C_1 \dots C_k A_1 \dots A_n \to p$. Следовательно, $\mathrm{L}(\backslash) \vdash A_1 \dots A_n \to B$.

Предположим, что $A_n = (D \backslash (E \backslash F))$. В этом случае,

$$\mathbb{W}' = \mathbb{A}_{n+k-1} [\![D]\!]'^{\langle 0 \rangle} [\![E]\!]'^{\langle 0 \rangle} [\![F]\!]'^{\langle 0 \rangle} p_{\lceil 0 \rceil}^{\lfloor 2 \rfloor}.$$

Должно выполняться утверждение

$$\pi'(\mathbb{A}_{n+k-1}) \in (\mathbb{A}_{n+k-1}; \mathbb{W}']_{\sqsubset}.$$

Единственный вариант — $\mathbb{A}_{n+k-1} q_{\lceil 0 \rceil}^{\lfloor 2 \rfloor}$, потому что иначе нельзя определить $\pi'(\mathbb{A}_{n+k-1} q_{\lceil 0 \rceil}^{\lfloor 2 \rfloor})$ так чтобы выполнялись доказательные условия (4') и (5').

Рассмотрим $\mathbb{B} = \mathbb{A}_{n+k-1} [\![D]\!]'^{\langle 0 \rangle} t_{\lceil 0 \rceil}^{\lfloor 2 \rfloor}$. Для выполнения доказательного условия (5') необходимо, чтобы $\pi'(\mathbb{B}) = \mathbb{A}_j$ для некоторого $0 < j < n + k - 1$.

Если $j > k$, то строка $\mathbb{A}_j \diagdown \mathbb{A}_{n+k-1} [\![D]\!]'^{\langle 0 \rangle}$ есть строка соответствующая секвенции $A_{j-k+1} \dots A_{n-1} \to D$, а $\mathbb{A}_j [\![E]\!]'^{\langle 0 \rangle} [\![F]\!]'^{\langle 0 \rangle} p_{\lceil 0 \rceil}^{\lfloor 2 \rfloor}$ — строка, соответствующая секвенции $C_1 \dots C_k A_1 \dots A_j (E \backslash F) \to p$. Если $j \leq k$, то строка $\mathbb{A}_j \diagdown \mathbb{A}_{n+k-1} [\![D]\!]'^{\langle 0 \rangle}$ есть строка соответствующая секвенции $C_j \dots C_k A_1 \dots A_{n-1} \to D$, а $\mathbb{A}_j [\![E]\!]'^{\langle 0 \rangle} [\![F]\!]'^{\langle 0 \rangle} p_{\lceil 0 \rceil}^{\lfloor 2 \rfloor}$ — строка, соответствующая секвенции $C_1 \dots C_j (E \backslash F) \to p$. Также из выполнения доказательного условия (3') для сети доказательства π' следует, что для этих строк существуют свои сети доказательства, удовлетворяющем доказательным условиям (1')–(5'). Значит, по предположению индукции эти секвенции выводятся. Применяя к ним правило $(\backslash \to)$, можно получить секвенцию $C_1 \dots C_k A_1 \dots A_j (E \backslash F) \to p$. Следовательно $\mathrm{L}(\backslash) \vdash A_1 \dots A_n \to B$.

□

Теорема 5. $\mathrm{L}^*(\backslash) \vdash A_1 \dots A_n \to B$, *если и только если для*

$$\mathbb{W} = [\![A_1]\!]' \dots [\![A_n]\!]' ([\![B]\!]')^{\langle 0 \rangle}$$

существует сеть доказательства π, удовлетворяющая доказательным условиям (1')-(4') и (6').

Доказательство. ($\Rightarrow$) Эта часть доказывается так же как аналогичная часть в теореме 4.

($\Leftarrow$) Здесь также используется индукция по длине $\mathbb{W}$. Если длина $\mathbb{W}$ равна 2 то секвенция может иметь вид $p \to p$ или $\to p\backslash p$. Эти секвенции выводимы в $\mathrm{L}^*(\backslash)$.

Пусть теперь для всех секвенций для которых длина соответствующей строки меньше длины $\mathbb{W}$ утверждение теоремы выполнено.

Предположим, что $B = (C_k\backslash(\ldots\backslash(C_1\backslash p)))$. В этом случае секвенции $A_1 \ldots A_n \to B$ и $C_1 \ldots C_k A_1 \ldots A_n \to p$ выводятся или не выводятся одновременно. Рассмотрим

$$\mathbb{W}' = [\![C_1]\!]' \ldots [\![C_k]\!]' [\![A_1]\!]' \ldots [\![A_n]\!]' p^{\lfloor 2 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil}.$$

В отличие от предыдущей теоремы, здесь возможно $n = 0$.

Как и в доказательстве предыдущей теоремы, для $\mathbb{W}'$ существует сеть доказательства π', удовлетворяющая всем необходимым доказательным условиям.

Введем следующие обозначения:

$$B_i = \begin{cases} C_i, & \text{если } 0 < i \leq k; \\ A_{i-k}, & \text{если } k < i \leq n+k; \end{cases}$$

$$\mathbb{B}_i = [\![B_1]\!]' \ldots [\![B_i]\!]'.$$

Строка $\mathbb{W}'$ имеет вид $\mathbb{W}'' q^{\lfloor 1 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil} p^{\lfloor 2 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil}$. Если π' удовлетворяет доказательным условиям (1')–(4'), то $q = p$ и $\pi'(\mathbb{W}'' q^{\lfloor 1 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil}) = \mathbb{W}'$.

Предположим, что $B_{n+k} = (D\backslash p)$. В этом случае $\mathbb{W}''$ есть строка соответствующая секвенции $B_1 \ldots B_{n+k-1} \to D$. Ограничив π' на $\mathcal{P}_{\mathbb{W}''}$ мы получим сеть доказательства для $\mathbb{W}''$, удовлетворяющую всем необходимым доказательным условиям. Значит, по предположению индукции, $\mathrm{L}^*(\backslash) \vdash B_1 \ldots B_{n+k-1} \to D$.

Применив правило $(\to \backslash)$ к секвенциям $B_1 \dots B_{n+k-1} \to D$ и $p \to p$ мы получим $C_1 \dots C_k A_1 \dots A_n \to p$. Следовательно, $\mathrm{L}^*(\backslash) \vdash A_1 \dots A_n \to B$.

Так как длина $\mathbb{W}'$ больше 2, или B_{n+k} не примитивный, или $n+k > 1$. Во втором случае так как $d(\mathbb{B}_{n+k-1}) = 1$, для того чтобы выполнялось доказательное условие (4') должно выполняться утвержение

$$\pi'(\mathbb{B}_{n+k-1}) \in (\mathbb{B}_{n+k-1}; \mathbb{W}']_{\sqsubset}.$$

Отсюда следует, что тип B_{n+k} не может быть примитивным и в этом случае.

Пусть $B_{n+k} = (D_1 \backslash (... \backslash (D_l \backslash p)))$. Обозначим $\mathbb{D}_i = [\![D_i]\!]'^{\langle 0 \rangle}$. Рассмотрим $\pi'(\mathbb{B}_{n+k-1} q_{\lceil 0 \rceil}^{\lfloor 2 \rfloor})$. Если это $\mathbb{B}_{n+k-1}\mathbb{D}_1$, то, значит, для строк $\mathbb{B}_{n+k-1}\mathbb{D}_2 \dots \mathbb{D}_l p_{\lceil 0 \rceil}^{\lfloor 1 \rfloor} p_{\lceil 0 \rceil}^{\lfloor 2 \rfloor}$ и $\mathbb{D}_1$ существуют сети доказательства, удовлетворяющие доказательным условиям (1')–(4') и (6'). Эти строки соответствуют секвенциям $B_1 \dots B_{n+k-1}(D_2 \backslash (... \backslash (D_l \backslash p))) \to p$ и $\to D_1$. Значит эти секвенции выводятся, а значит, выводится и $A_1 \dots A_n \to B$. Единственный другой вариант для $\pi'(\mathbb{B}_{n+k-1} q_{\lceil 0 \rceil}^{\lfloor 2 \rfloor})$ это $\mathbb{B}_{n+k-1}$. В этом случае посмотрим существует ли $l' < l$ такое, что $\pi'(\mathbb{B}_{n+k-1}\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_{l'} t_{\lceil 0 \rceil}^{\lfloor 2 \rfloor}) = \mathbb{A}_g$ для некоторого $g < n + k - 1$.

Предположим, что такое l' есть и рассмотрим наименьшее из имеющихся. Тогда строка $\mathbb{B}_g \diagdown \mathbb{B}_{n+k-1}\mathbb{D}_1$ есть строка соответствующая секвенции $B_{g+1} \dots B_{n+k-1} \to D$, а $\mathbb{B}_g \mathbb{D}_2 \dots \mathbb{D}_l p_{\lceil 0 \rceil}^{\lfloor 1 \rfloor} p_{\lceil 0 \rceil}^{\lfloor 2 \rfloor}$ — строка, соответствующая секвенции $B_1 \dots B_g(D_2 \backslash (... \backslash (D_l \backslash p))) \to p$. Для этих строк существуют сети доказательства, удовлетворяющие доказательным условиям (1')–(4') и (6'). Значит, по предположению индукции эти секвенции выводятся. Применяя к ним правило $(\backslash \to)$, можно получить секвенцию $C_1 \dots C_k A_1 \dots A_n \to p$. Следовательно $\mathrm{L}^*(\backslash) \vdash A_1 \dots A_n \to B$.

Если такого l' нет, то, значит, есть сети доказательства для строк $\mathbb{A}_{n+k-1}\mathbb{D}_1$ и $\mathbb{D}_2 \dots \mathbb{D}_l p_{\lceil 0 \rceil}^{\lfloor 1 \rfloor} p_{\lceil 0 \rceil}^{\lfloor 2 \rfloor}$. Эти строки соответствуют секвенциям $B_1 \dots B_{n+k-1} \to D_1$ и $D_2 \backslash (D_2 \backslash (... \backslash (D_l \backslash p))) \to p$. Значит, по предположению индукции эти секвенции выводятся. Применяя к ним правило

$(\backslash \to)$, можно получить секвенцию $C_1 \dots C_k A_1 \dots A_n \to p$. Следовательно $\mathrm{L}^*(\backslash) \vdash A_1 \dots A_n \to B$. $\square$

5.2 Алгоритм распознавания принадлежности

Пусть $(\Sigma, \mathbf{P}, R, B)$ — грамматика Ламбека, основанная на $\mathrm{L}(\backslash)$ или $\mathrm{L}^*(\backslash)$. Для каждой буквы $a \in \Sigma$ пусть k^a обозначает $|R(a)|$ — количество типов, соответствующих данной букве. Пусть A^a_j обозначает j-й такой тип. Другими словами, для каждой буквы a, $R(a) = \{A^a_1, \dots, A^a_{k^a}\}$.

Для каждой буквы $a \in \Sigma$, для каждого $i \leq k^a$, пусть $\mathbb{A}^a_i = [\![A^a_i]\!]'$. Пусть также $\mathbb{B} = [\![B]\!]'^{\langle 0 \rangle}$.

Размером грамматики назовем число $|\mathbb{B}| + \sum_{a \in \Sigma} \sum_{i=1}^{k^a} |\mathbb{A}^a_i|$.

Теорема 6. *Существует алгоритм, который по данному слову и данной грамматике, основанной на* $\mathrm{L}(\backslash)$ *или* $\mathrm{L}^*(\backslash)$*, распознает принадлежность этого слова языку, порожденному данной грамматикой, за время, ограниченное полиномом от длины слова и размера грамматики.*

Дальнейшее содержание раздела представляет собой доказательство этой теоремы.

Пусть дано слово $x \in \Sigma^+$. Символом x_i будем обозначать i-ю букву слова x. Задача состоит в том, чтобы проверить существуют ли числа $m_i \leq k^{x_i}$ такие, что $\mathrm{L}(\backslash) \vdash A^{x_1}_{m_1} \dots A^{x_n}_{m_n} \to B$.

Мы будем искать нужные m_i и строить сеть доказательства последовательно, используя динамическое программирование.

Пусть Q^a обозначает следующую строку в алфавите $\mathrm{At} \cup \{\langle, \rangle, *\}$:

$$\langle * \mathbb{A}^a_1 * \dots * \mathbb{A}^a_{k^a} * \rangle .$$

Строка Q^a содержит образы всех типов, которые могут быть присвоены букве a, при отображении $[\![\cdot]\!]'$.

Пусть W^x обозначает следующую строку:

$$Q^{x_1} \dots Q^{x_n} \langle * \mathbb{B} \, .$$

Пусть W_i^x обозначает i-й символ строки W^x, а $W_{[i,j]}^x$ — подстроку W^x, начинающуюся с i-й позиции и заканчивающуюся j-й (отдельными символами здесь мы считаем атомы, звездочки и угловые скобки, $W_{[1,|W^x|]}^x = W^x$).

Выделим следующие классы подстрок W^x:

1. Строка $W_{[i,j]}^x$ называется строкой первого рода, если она не содержит звездочек и угловых скобок.

2. Строка $W_{[i,j]}^x$ называется строкой второго рода, если она имеет вид $\mathbb{D} * U \rangle \dots \langle V * \mathbb{C}$ где $\mathbb{C}, \mathbb{D} \in \mathrm{FS}$, а строки U и V не содержат угловых скобок.

3. Строка $W_{[i,j]}^x$ называется строкой третьего рода, если она имеет вид $\langle \dots \rangle \dots \langle V * \mathbb{C}$, где $\mathbb{C} \in FS$, а строка V не содержит угловых скобок.

Рассмотрим $M(i,j)$ — функцию со следующими свойствами.

$M(i,j) = 1$ если выполнено одно из следующих утверждений:

1. Строка $W_{[i,j]}^x$ первого рода и для этой строки есть сеть доказательства, удовлетворяющая нужным доказательным условиям.

2. Строка $W_{[i,j]}^x$ второго рода и среди имеющихся g пар угловых скобок, для h-й такой пары существует строка вида $*\mathbb{E}_h*$ между ними такая, что $\mathbb{E}_h \in FS$, и для строки $\mathbb{W} = \mathbb{D}\mathbb{E}_1 \dots \mathbb{E}_g \mathbb{C}$ есть сеть доказательства, удовлетворяющая нужным доказательным условиям. Здесь g может равнятся 0.

3. Строка $W_{[i,j]}^x$ третьего рода и среди имеющихся g пар угловых скобок, для h-й такой пары существует строка вида $*\mathbb{D}_h*$ между ними такая, что $\mathbb{D}_h \in FS$, и для строки $\mathbb{W} = \mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_g \mathbb{C}$ есть сеть

доказательства, удовлетворяющая нужным доказательным условиям. Здесь g может равнятся 0, только если грамматика основана на $\mathrm{L}^*(\backslash)$.

Во всех остальных случаях $M(i,j) = 0$.

Строка W^x сама является подстрокой третьего рода. Значит, если $M(1, |W^x|) = 1$, то в каждой из n пар угловых скобок есть подстрока вида $*\mathbb{D}_j*$ между ними такая, что для строки $\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_n \mathbb{B}$ существует сеть доказательства удовлетворяющая нужным доказательным условиям. Все такие $\mathbb{D}_j$ между j-й парой угловых скобок являются образами различных типов, соответствующих букве x_j при отображении $[\![\cdot]\!]'$. Это значит, что существуют $\mathbb{A}_{m_i}^{x_j}$ такие, что для строки $\mathbb{A}_{m_1}^{x_1} \dots \mathbb{A}_{m_n}^{x_n} \mathbb{B}$ существует сеть доказательства, удовлетворяющая всем необходимым доказательным условиям. По теореме 4 или 5 получаем, что $\mathrm{L}(\backslash)^{(*)} \vdash A_{m_1}^{x_1} \dots A_{m_n}^{x_n} \to B$, а значит, x принадлежит языку, порождаемому данной грамматикой. С другой стороны, если $M(1, |W^x|) = 0$, то x очевидно не принадлежит этому языку.

Мы будем рассчитывать $M(i,j)$ динамически. Сначала положим для всех $i < n$ $M(i, i+1) = 1$ если $W_i^x = p_{\lceil 0 \rceil}^{\lfloor 2k+1 \rfloor}$ и $W_{i+1}^x = p_{\lceil 0 \rceil}^{\lfloor 2k+2 \rfloor}$ для некоторых $p \in \mathbf{P}$ и $k \in \mathbb{N}$. Если грамматика основана на $\mathrm{L}^*(\backslash)$, то дополнительно положим $M(i, i+1) = 1$, если $W_i^x = p_{\lceil 0 \rceil}^{\lfloor 2k \rfloor}$ и $W_{i+1}^x = p_{\lceil 0 \rceil}^{\lfloor 2k+1 \rfloor}$ для некоторых $p \in \mathbf{P}$ и $k \in \mathbb{N}$, и это не противоречит доказательному условию (6'). Во всех остальных случаях положим $M(i,j) = 0$.

Как определить значение $M(i,j)$, если мы уже знаем значения $M(g,h)$ для всех g и h таких, что $1 \leqslant g < h \leqslant n$ и $h - g < j - i$? Рассмотрим несколько случаев:

1. Подстрока $W_{[i,j]}^x$ имеет вид $p_{\lceil 0 \rceil}^{\lfloor 1 \rfloor} * U \rangle \langle V * p_{\lceil 0 \rceil}^{\lfloor 2 \rfloor}$, где U и V не содержат угловых скобок. Тогда положим $M(i,j) = 1$.

2. Предположим что W_i^x и W_j^x являются атомами. Если существует g такое что $i < g < j - 1$, $W_g^x \in \mathrm{Atn}$, $W_{g+1}^x \in \mathrm{Atn}$, $M(i,g) = 1$, и $M(g+1, j) = 1$, то положим $M(i,j) = 1$.

3. Пусть $W_i^x = p_{\lceil 0 \rceil}^{\lfloor m \rfloor}$ и $W_j^x = p_{\lceil 0 \rceil}^{\lfloor m+1 \rfloor}$ для некоторых $p \in \mathbf{P}$ и $m \in \mathbb{N}$. Если $M(i+1, j-1) = 1$ и m нечетно то положим $M(i,j) = 1$. Если m четно, то надо дополнительно проверить выполнение доказательного условия (5) или (6) для этого элемента.

4. Подстрока $W_{[i,j]}^x$ имеет вид $p_{\lceil 0 \rceil}^{\lfloor 1 \rfloor} * \ldots \rangle \ldots \langle \ldots p_{\lceil 0 \rceil}^{\lfloor 2 \rfloor}$. Если $M(g, j-1) = 1$, где g есть номер позиции в W^x первой угловой скобки в подстроке $W_{[i,j]}^x$, то положим $M(i,j) = 1$.

5. Подстрока $W_{[i,j]}^x$ имеет вид $\langle \ldots \rangle \ldots \langle \ldots p_{\lceil 0 \rceil}^{\lfloor k \rfloor}$. Если судествует g такое что $i < g < j$, $W_g^x = *$, подстрока $W_{[i+1,g]}^x$ не содержит угловых скобок, и $M(g+1, j) = 1$, то положим $M(i,j) = 1$.

Во всех остальных случаях положим $M(i,j) = 0$.

Лемма 5.2.1 (Корректность алгоритма)**.** *Описанный алгоритм корректно вычисляет $M(i;j)$.*

Доказательство. Будем называть подстроки $W_{[i,j]}^x$, для которых $M(i,j) = 1$ 'принятыми'. Мы будем доказывать, что алгоритм правильно вычисляет функцию $M(i,j)$ для всех подстрок, индукцией по длине подстроки. Каждая принятая подстрока заканчивается на атом, и он входит в ту часть подстроки, для которой существует сеть доказательства. Не существует принятых строк, содержащих звездочки, но не содержащих угловых скобок.

Принятые подстроки длины 2 могут быть только первого рода и иметь вид $p_{\lceil 0 \rceil}^{\lfloor 2k+1 \rfloor} p_{\lceil 0 \rceil}^{\lfloor 2k+2 \rfloor}$ для некоторых $p \in \mathbf{P}$ и $k \in \mathbb{N}$. В случае если грамматика основана на $\mathrm{L}^*(\backslash)$, подстрока также может иметь вид $p_{\lceil 0 \rceil}^{\lfloor 2k \rfloor} p_{\lceil 0 \rceil}^{\lfloor 2k+1 \rfloor}$ если это не противоречит доказательному условию (6'). Алгоритм правильно вычисляет $M(i, i+1)$ для всех i.

Теперь рассмотрим подстроки $W_{[i,j]}^x$ длины $l > 2$ такие, что для всех i и $j > i$ таких, что $j - i < l$, алгоритм правильно вычисляет функцию $M(i,j)$.

1. Предположим, что подстрока $W^x_{[i,j]}$ первого рода. Пусть она принята, то есть для нее есть сеть доказательства π, удовлетворяющая необходимым доказательным условиям. Есть два различных случая. Если $\pi(W^x_i) \neq W^x_{[i,j]}$, то, по предположению индукции, подстроки $W^x_{i,b}$ и $W^x_{[b+1,j}$, где b это номер позиции, соответствующий $\pi(W^x_i)$, были корректно приняты алгоритмом. Следовательно, алгоритм примет и подстроку $W^x_{[i,j]}$ по второму пункту из описания алгоритма. Если $\pi(W^x_i) \neq W^x_{[i,j]}$, то, значит, $W^x_{[i+1,j-1]}$ также принята и, по предположению индукции, алгоритм правильно это определил. Следовательно, алгоритм примет и подстроку $W^x_{[i,j]}$ по третьему пункту из описания алгоритма. Если сети доказательства не существует и подстрока $W^x_{[i,j]}$ не является принятой, то алгоритм корректно вычислит, что $M(i,j) = 0$.

2. Пусть подстрока $W^x_{[i,j]}$ второго рода. Если она принята, то для соответствующей строки $\mathbb{W}$ есть сеть доказательства π, удовлетворяющая всем необходимым доказательным условиям. Пусть i' есть номер позиции в строке W^x, соответствующей $\pi(W^x_i)$. Разберем сначала случай, когда $i' \neq j$. Ввиду выполнения доказательного условия (4'), имеем $d(W^x_{i'}) > 1$. Это значит, что $W^x_{i'+1}$ также является атомом. Это значит, что подстроки $W^x_{[i,i']}$ и $W^x_{[i'+1,j]}$ являются более которкими принятыми подстроками первого или второго рода. По предположению индукции, они были приняты алгоритмом. Следовательно, алгоритм примет и подстроку $W^x_{[i,j]}$ по второму пункту из описания алгоритма.

   Теперь предположим, что $i' = j$. Если $d(W^x_i) > 1$, то $d(W^x_j) > 2$. Значит и W^x_{i+1} и W^x_{j-1} являются атомами. Значит подстрока второго рода $W^x_{[i+1,j-1]}$ является более короткой и принятой. По предположению идукции, она была принята алгоритмом, а значит, алгоритм примет и подстроку $W^x_{[i,j]}$ по третьему пункту из описания алгоритма. Пусть теперь $d(W^x_i) = 1$ и, следовательно, $d(W^x_j) = 2$. Есть два

случая. Если W^x_{j-1} является атомом, то подстрока третьего рода $W^x_{[g,j-1]}$, где g есть номер позиции, соответствующий первой открывающей угловой скобке в $W^x_{[i,j]}$, является более короткой принятой подстрокой. По предположению индукции, она была принята алгоритмом. Следовательно, алгоритм примет и подстроку $W^x_{[i,j]}$ по четвертому пункту из описания алгоритма. Если же W^x_{j-1} является звездочкой, то подстрока $W^x_{[i,j]}$ может быть принята, только если она имеет вид $p^{\lfloor 1 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil} * U\rangle\langle V * p^{\lfloor 2 \rfloor}_{\lceil 0 \rceil}$, поскольку иначе не существует способа корректно определить функцию π для предпоследнего элемента $\mathbb{W}$, так как значение функции d на этом элементе равно 1. Алгоритм находит и принимает все строки такого вида по первому пункту описания.

Если не существует $\mathbb{W}$ требуемого вида, для которого существует сеть доказательства, удовлетворяющая всем необходимым доказательным условиям, то никакой из пунктов алгоритма не применим и алгоритм правильно вычислит $M(i,j) = 0$.

3. Предположим, что подстрока $W^x_{[i,j]}$ третьего рода. Если она принята, то между первой парой угловых скобок существует подстрока вида $*\mathbb{D}_1*$ такая, что $\mathbb{D}_1 \sqsubset \mathbb{W}$. Пусть i' это номер позиции, соответствующий первому атому из $\mathbb{D}_1$. Подстрока второго рода $W^x_{[i',j]}$ является более короткой принятой подстрокой. Следовательно, по предположению индукции, она была принята алгоритмом. Следовательно, алгоритм примет и подстроку $W^x_{[i,j]}$ по пятому пункту из описания алгоритма. Если грамматика основана на $\mathrm{L}^*(\backslash)$, то есть дополнительный случай, когда в подстроке $W^x_{[i,j]}$ нет ни одной пары угловых скобок. В этом случае она может быть принята только если принята строка первого рода $W^x_{[g,j]}$, где W^x_{g-1} является звездочкой. В этом случае алгоритм также примет подстроку $W^x_{[i,j]}$ по пятому пункту из описания алгоритма.

   В остальных случаях, алгоритм правильно вычислит $M(i,j) = 0$.

$\square$

Мы можем проверить все требуемые алгоритмом условия на строку $W^x_{[i,j]}$ за $O(j-i)$ шагов. Всего у нас есть $O(|W^x|^2)$. Длина строки линейно зависит от размера входных данных. Значит алгоритм определяет принадлежность слова языку, порождаемому данной грамматикой, основанной на $\mathrm{L}(\backslash)$ или $\mathrm{L}^*(\backslash)$ за кубическое время.

Литература

[1] Aarts E., Trautwein K. Non-associative Lambek categorial grammar in polynomial time // Mathematical logic Quarterly. — 1995. — Vol. 41, № 4. — P. 476—484.

[2] Buszkowski W. The equivalence of unidirectional Lambek categorial grammars and context-free grammars // Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. — 1985. — Vol. 31. — P. 369—384.

[3] Girard J.-Y. Linear logic // Theoretical Computer Science. — 1987. — Vol. 50, № 1. — P. 1—102.

[4] de Groote Ph. The non-associative Lambek calculus with product in polynomial time // Automated Reasoning with Analytic Tableaux and Related Methods / Editor N. V. Murray. — Berlin: Springer, 1999. — P. 128—139. — (Lecture Notes in Computer Science; vol. 1617).

[5] Lambek J. The mathematics of sentence structure // American Mathematical Monthly. — 1958. — Vol. 65, № 3. — P. 154—170. — Русский перевод: Ламбек И. Математическое исследование структуры предложений // Математическая лингвистика: Сборник переводов / Под ред. Ю. А. Шрейдера и др. — М.: Мир, 1964. — С. 47—68.

[6] Lecomte A. Towards efficient parsing with proof-nets // EACL 1993, 6th Conference of the European Chapter of the Association for Computational Linguistics, April 21-23, 1993. — Utrecht: OTS —

Research Institute for Language and Speech, Utrecht University, 1993. — P. 269—276.

[7] Métayer F. Polynomial equivalence among systems LLNC, LLNC_a and LLNC_0 // Theoretical Computer Science. — 1999. — Vol. 227, № 1. — P. 221—229.

[8] Montague R. English as a Formal Language // Linguaggi nella societa e nella tecnica. — / Editor Bruno Visentini. — Milan: Edizioni di Comunità, 1970. — P. 189—223.

[9] Moortgat M. Categorial type logic, // Handbook of Logic and Language / Editors J. van Benthem, A. ter Meulen. — Elsevier. — 1997. — P. 93—177.

[10] Morrill G. Type Logical Grammar: Categorial Logic of Signs // Berlin: Springer. — 1994. — 328 p.

[11] Penn G. A Graph-Theoretic Approach to Polynomial-Time Recognition with the Lambek Calculus // Electronic Notes in Theoretical Computer Science. — Elsevier. — 2005. — Vol. 53.

[12] Pentus M. Lambek calculus is NP-complete // Theoretical Computer Science. — 2006. — Vol. 357, № 1/3. — P. 186—201.

[13] Pentus M. Lambek grammars are context free // Proceedings of the 8th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science: June 19—23, 1993. Montreal, Canada. — Los Alamitos, California: IEEE Computer Society Press, 1993. — P. 429—433.

[14] Roorda D. Resource Logics: Proof-theoretical Investigations: Ph.D. thesis. — Amsterdam, 1991. — 138 p.

Работы автора по теме диссертации

[15] Savateev Y. Lambek grammars with one division are decidable in polynomial time // Computer Science — Theory and Applications /

Editors E.A. Hirsch et al.. — Berlin: Springer, 2008. — P. 273—282. — (Lecture Notes in Computer Science; vol. 5010).

[16] Savateev Y. Product-free Lambek calculus is NP-complete // Logical Foundations of Computer Science, International Symposium, LFCS 2009, Deerfield Beach, FL, USA, January 3—6, 2009. Proceedings / Editors S. N. Artemov and A. Nerode. — Berlin: Springer, 2009. — P. 380—394. — (Lecture Notes in Computer Science; vol. 5407).

[17] Саватеев Ю. В. Распознавание выводимости для исчисления Ламбека с одним делением // Вестник Московского университета. Серия 1, Математика. Механика. — 2009. — № 2. — С. 59—62.