Задачи к спецкурсу "Категорная и алгебраическая логика" (2011)

1. Пусть $\mathbf{F}$ - отображение, переводящее объекты и морфизмы категории $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ соответственно в объекты и морфизмы категории $\boldsymbol{\mathcal{D}}$. Известно, что $\mathbf{F}$ сохраняет начала, концы и композиции. Известно также, что для некоторого объекта A из $\boldsymbol{\mathcal{C}}$

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}\,(\mathbf{F}(\mathrm{A}),\mathbf{F}(\mathrm{A})) = \mathbf{F}[\boldsymbol{\mathcal{C}}(\mathrm{A},\mathrm{A})]$$

Докажите, что $\mathbf{F}(1_{\mathrm{A}})=1_{\mathrm{F(A)}}$.

2. Докажите, что категория SET не изоморфна никакой полной подкатегории в SET°.

3. Докажите, что объект, изофорфный начальному, - начальный.

4. а) Существует ли полная подкатегория в SET, содержащая ровно 100 стрелок?

б) То же - для 20 стрелок.

5. Докажите, что если в категории все стрелки - изо, то она изоморфна своей двойственной.

6. Пусть φ - изоморфизм объекта X на объект-произведение AxB. Докажите, что $(\mathrm{X},\varphi\circ p_{\mathrm{A}}, \varphi\circ p_{\mathrm{B}})$ - произведение A и B.

7. В категории с произведениями и суммами постройте функторы Ax-, A+-, такие что для любого объекта X

(Ax-)(X) = AxX, (A+-)(X) = A+X.

8. Докажите: CAT - категория с конечными произведениями и суммами.

9. Постройте категорию, содержащую полные подкатегории с любым конечным числом стрелок.

10. Докажите, что в категории абелевых групп ABGR прямая сумма групп является их произведением и суммой.

11. Докажите, что ABGR - категория с суммами.

12. а) Докажите, что Ω-ALG - категория с произведениями.

б) То же - для категории моноидов MON.

в) То же - для категории коммутативных колец RING.

13. Докажите, что если C = A + B в категории RING, то $\mathrm{C}_+ \cong \mathrm{A}_+ \oplus \mathrm{B}_+$ ($_+$ обозначает аддитивную группу).

14. а) Постройте неизоморфные кольца с аддитивной группой $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$.

б) Докажите, что в RING не существует суммы двухэлементных полей.

15. Опишите уравнители в категориях GROUP, ABGR, RING.

16. Существуют ли уравнители в категории MON?

17. Определите понятие коуравнителя в категории как двойственного к понятию уравнителя. Докажите, что SET - категория с коуравнителями.

18. Докажите, что MON - категория с коуравнителями.

19. Рассмотрим категорию SET.

а) Пусть f: A $\longrightarrow$B; p_1, p_2 - обычные проекции AxA $\longrightarrow$A. Докажите что уравнитель пары ($p_1 \circ f$, $p_2 \circ f$) как множество является отношением эквивалентности на A. Назовем его ядром f.

б) Пусть R - бинарное отношение на A, <R> - наименьшее отношение эквивалентности, содержащее R. Докажите, что стандартное отображение A $\longrightarrow$A/<R> есть коуравнитель двух проекций R $\longrightarrow$A.

в) Докажите, что <R> есть ядро отображения A $\longrightarrow$A/<R>.

20. Дан декартов квадрат

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "m"'] & B \arrow[d, "n"] \\
C \arrow[r] & D
\end{tikzcd}$$

а) Докажите, что если n – монострелка, то m – монострелка.

б) Докажите, что если n – ретракция, то m – ретракция.

21. Докажите, что все пределы одной диаграммы изоморфны как объекты.

22. Что можно сказать о произведении, если один из сомножителей

а) финальный объект ?

б) начальный объект ?

23. Докажите, что если категория $\mathcal{J}$ имеет начальный объект, то любая диаграмма вида **D**:$\mathcal{J} \rightsquigarrow \mathcal{C}$ имеет предел.

24. Докажите, что m: A $\longrightarrow$B – монострелка, если и только если квадрат

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "1_A"'] & A \arrow[d, "m"] \\
A \arrow[r, "m"] & B
\end{tikzcd}$$

декартов.

25. Докажите, что если f, g: $A \longrightarrow B$ и квадрат

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "h_2"'] & A \arrow[d, "<1_A{,}f>"] \\
A \arrow[r, "<1_A{,}g>"] & A\times B
\end{tikzcd}$$

декартов, то $h_1 = h_2$ – уравнитель f и g.

26. Докажите, что множество $X^{\mathbf{N}}$ с проекциями q_n на первые n координат есть предел счетной диаграммы $\dots X^3 \xrightarrow{p_2} X^2 \xrightarrow{p_1} X$, где p_n – проекция на первые n координат. Докажите аналогичное утверждение для категории ABGR.

27. Найдите копредел счетной диаграммы $X \xrightarrow{j_1} X^2 \xrightarrow{j_2} X^3 \dots$ в категории ABGR, где $j_n(x_1,\dots,x_n)=(x_1,\dots,x_n,0)$.

28. Докажите, что в декартово замкнутой категории

а) $(A \times B)^C \cong A^C \times B^C$

б) $(A^B)^C \cong A^{B\times C}$