

Задачи к спецкурсу "Категорная и алгебраическая логика" (2011)

1. Пусть F - отображение, переводящее объекты и морфизмы категории \mathcal{C} соответственно в объекты и морфизмы категории \mathcal{D} . Известно, что F сохраняет начала, концы и композиции. Известно также, что для некоторого объекта A из \mathcal{C}

$$\mathcal{D}(F(A), F(A)) = F[\mathcal{C}(A, A)]$$

Докажите, что $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

2. Докажите, что категория SET не изоморфна никакой полной подкатегории в SET^o.

3. Докажите, что объект, изоморфный начальному, - начальный.

4. а) Существует ли полная подкатегория в SET, содержащая ровно 100 стрелок?

б) То же - для 20 стрелок.

5. Докажите, что если в категории все стрелки - изо, то она изоморфна своей двойственной.

6. Пусть φ - изоморфизм объекта X на объект-произведение $A \times B$. Докажите, что $(X, \varphi \circ r_A, \varphi \circ r_B)$ - произведение A и B .

7. В категории с произведениями и суммами постройте функторы $A \times -$, $A + -$, такие что для любого объекта X
 $(A \times -)(X) = A \times X$, $(A + -)(X) = A + X$.

8. Докажите: CAT - категория с конечными произведениями и суммами.

9. Постройте категорию, содержащую полные подкатегории с любым конечным числом стрелок.

10. Докажите, что в категории абелевых групп ABGR прямая сумма групп является их произведением и суммой.

11. Докажите, что ABGR - категория с суммами.

12. а) Докажите, что Ω -ALG - категория с произведениями.

б) То же - для категории моноидов MON.

в) То же - для категории коммутативных колец RING.

13. Докажите, что если $C = A + B$ в категории RING, то $C_+ \cong A_+ \oplus B_+$
($_+$ обозначает аддитивную группу).

14. а) Постройте неизоморфные кольца с аддитивной группой $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$.

б) Докажите, что в RING не существует суммы двухэлементных полей.

15. Опишите уравнители в категориях GROUP, ABGR, RING.

16. Существуют ли уравнители в категории MON?

17. Определите понятие коуравнителя в категории как двойственного к понятию уравнивателя. Докажите, что SET - категория с коуравнителями.

18. Докажите, что MON - категория с коуравнителями.

19. Рассмотрим категорию SET.

а) Пусть $f: A \rightarrow B$; p_1, p_2 - обычные проекции $A \times A \rightarrow A$. Докажите что уравниватель пары $(p_1 \circ f, p_2 \circ f)$ как множество является отношением эквивалентности на A . Назовем его ядром f .

б) Пусть R - бинарное отношение на A , $\langle R \rangle$ - наименьшее отношение эквивалентности, содержащее R . Докажите, что стандартное отображение $A \rightarrow A/\langle R \rangle$ есть коуравнитель двух проекций $R \rightarrow A$.

в) Докажите, что $\langle R \rangle$ есть ядро отображения $A \rightarrow A/\langle R \rangle$.

20. Дан декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ m \downarrow & & \downarrow n \\ C & \longrightarrow & D \end{array}$$

а) Докажите, что если n – монострелка, то m – монострелка.

б) Докажите, что если n – ретракция, то m – ретракция.

21. Докажите, что все пределы одной диаграммы изоморфны как объекты.

22. Что можно сказать о произведении, если один из сомножителей

а) финальный объект ?

б) начальный объект ?

23. Докажите, что если категория \mathcal{J} имеет начальный объект, то любая диаграмма вида $\mathbf{D}: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ имеет предел.

24. Докажите, что $m: A \rightarrow B$ – монострелка, если и только если квадрат

$$\begin{array}{ccc} & 1_A & \\ A & \longrightarrow & A \\ 1_A \downarrow & & \downarrow m \\ & m & \\ A & \longrightarrow & B \end{array}$$

декартов.

25. Докажите, что если $f, g: A \rightarrow B$ и квадрат

$$\begin{array}{ccc} & h_1 & \\ A & \longrightarrow & A \\ h_2 \downarrow & & \downarrow \langle 1_A, f \rangle \\ & \langle 1_A, g \rangle & \\ A & \longrightarrow & A \times B \end{array}$$

декартов, то $h_1 = h_2$ – уравнитель f и g .

26. Докажите, что множество $X^{\mathbb{N}}$ с проекциями q_n на первые n координат есть

предел счетной диаграммы $\dots X^3 \xrightarrow{p_2} X^2 \xrightarrow{p_1} X$, где p_n – проекция на первые

n координат. Докажите аналогичное утверждение для категории $ABGR$.

27. Найдите копредел счетной диаграммы $X \xrightarrow{j_1} X^2 \xrightarrow{j_2} X^3 \dots$ в категории

$ABGR$, где $j_n(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0)$.

28. Докажите, что в декартово замкнутой категории

а) $(A \times B)^C \cong A^C \times B^C$

б) $(A^B)^C \cong A^{B \times C}$