ЗАДАЧИ

к спецкурсу “Модальные и временные логики” (2007/08)

1. Докажите в $\mathbf{K}$:

   (a) $\Box A \wedge \Box B \supset \Box(A \wedge B)$

   (b) $\Diamond(A \vee B) \equiv \Diamond A \vee \Diamond B$

   (c) $\Box(A \supset B) \supset (\Diamond A \supset \Diamond B)$

   (d) $\Box A \wedge \Diamond T \supset \Diamond(A \wedge B) \vee \Diamond(A \wedge \neg B)$

2. Докажите, что $[K + \Diamond T] = [K + \Box p \supset \Diamond p]$.

3. Докажите, что логика K может быть задана аксиомами:

   (классические тавтологии)+ $\Box(p \wedge q) \equiv (\Box p \wedge \Box q)$

и правилами: modus ponens, подстановка,

$$\frac{A \equiv B}{\Box A \equiv \Box B}$$

4. Постройте модель Крипке с 4 мирами, в каждом из которых истинна формула

   $\Diamond \Box p \wedge \Diamond \Box \neg p$.

5. Докажите, что правило $\dfrac{A \supset B}{\Diamond A \supset \Diamond B}$ допустимо в любой 1-модальной логике.

6. Докажите, что правило $\dfrac{A \vee B}{\Box A \vee \Diamond B}$ допустимо в любой 1-модальной логике.

7. Найдите многообразие шкал для формулы $\Diamond \Box p \supset \Box p$.

8. Является ли теоремой K формула

$\Diamond p \supset \Box \Diamond (p \wedge q) \vee \Box \Diamond (p \wedge \neg q)$?

9. Докажите, что исчисление

$K_2 + \Box_1 p \supset \Diamond_1 \Diamond_2 p \vee \Box_1 \Diamond_2 \Box_1 p$ непротиворечиво.

10. Докажите, что $K.t + \Box p \supset \Box \Box p \vdash \Box^{-} p \supset \Box^{-} \Box^{-} p$

11. Докажите, что $K.t \vdash \Box \Box^{-} \Box p \supset \Box p$

12. Найдите многообразие шкал для логики

   $K.t + \Box p \wedge p \wedge \Box^{-} p \supset \Box^{-} \Box p$

13. Докажите, что всякая замкнутая модальная формула элементарна.

14. Верно ли, что если $\neg A \notin K$, то существует модель Крипке, в которой истинна формула A?

15. Верно ли, что если $\neg A \notin K$, то существует конечная модель Крипке, в которой истинна формула A?

16. Докажите, что многообразие шкал для логики $K4.1 = K4 + \Box \Diamond p \supset \Diamond \Box p$ состоит из всех тразитивных шкал (W, R), удовлетворяющих условию

$\forall x \exists y (xRy \wedge \forall z (yRz \to y = z))$.

17. Докажите, что логика $K4.1$ -- каноническая.

18. Докажите, что модальные логики шкал $(\omega, <)$ и $(\omega \cdot 2, <)$ различны.

19. Докажите, что все логики $L(\alpha, <)$, где $\alpha \leqslant \omega^2$, различны.

20. Докажите, что все логики $\mathbf{L}(\alpha,\leqslant)$, где $\alpha\leqslant\omega^2$, различны.
21. Докажите, что $\mathbf{L}(\omega^2,<)=\mathbf{D4.3}$.
22. Докажите, что $\mathbf{L}(\omega^2,\leqslant)=\mathbf{S4.3}$.
23. Докажите, что всякое многообразие 1-шкал содержит хотя бы одну конечную шкалу.
24. Докажите, что класс всех конечных шкал не является модальным многообразием.
25. Докажите, что класс всех иррефлексивных транзитивных шкал не является модальным многообразием.

26. Докажите, что логика $\mathbf{K}+\Diamond\Box p\supset\Box p$

а) каноническая

б) финитно аппроксимируема.

27. Докажите, что если $\mathbf{L}_1\subseteq\mathbf{L}_2$, то M_{L_2} – коническая подмодель M_{L_1} .

28. Постройте конечную аксиоматику для логики $\mathbf{n}$—элементного сгустка.

29. Докажите финитную аппроксимируемость логик **K4.1** и **S4.1 = K4.1**$+\Box p\supset p$.

30. Используя формулы Alt_n, покажите, что логика конечной шкалы Крипке не может совпадать ни с одной логик **K**, **D**, **T**, **K4**, **S4**, **S5**, **K.t**.

31. Докажите, что **S4.2 = L**(все конечные рефлексивные квазидеревья с добавленными наибольшими сгустками).

32. Докажите, что **S4.1 = L**(все конечные рефлексивные квазидеревья с тривиальными максимальными сгустками).

33. Постройте аксиоматику логики всех конечных рефлексивных транзитивных деревьев с добавленными наибольшими элементами.

34. Докажите, что **D = L**(все конечные деревья с петлями в тупиковых точках).

35. Существует ли такой строгий линейный порядок F, что **L**(F) = **K4.3** ?

36. Постройте аксиоматику временной логики отрезка на действительной прямой.

37. Докажите, что связка $\bigcirc$ не выразима через $\Box,\Box^-$ на $(\mathbf{Z},<,>)$.

38. Определите понятие бисимуляции для связки U и докажите, что $\bigcirc$ не выразима через U на $(\mathbf{N},<)$.

39. Пусть $\mathcal{T}$ –полусистема Туэ в алфавите $\{\Box_1,\ldots,\Box_n\}$. Положим $L(\mathcal{T}) = \mathbf{K_n} + \{\beta p\supset\alpha p \mid (\alpha,\beta)\in\mathcal{T}\}$. Докажите, что если $\mathcal{T}$ – неуничтожающая (т.е. если $(\alpha,\beta)\in\mathcal{T}$, то β непусто), то для любой пары слов (α,β) в алфавите $\{\Box_1,\ldots,\Box_n\}$,

$$L(\mathcal{T})\vdash\beta p\supset\alpha p \iff \alpha\vdash_{\mathcal{T}}\beta.$$