ЗАДАЧИ

к спецкурсу "Основы модальной логики" (2009/10)

1. Покажите, что в булевой алгебре имеется отношение порядка

$a \leq b := (a = a \cap b)$

2. Докажите, что $a \cap b = \inf(a,b)$ по этому отношению, т.е. для любого c

$c \leq b \ \& \ c \leq a \Leftrightarrow c \leq a \cap b.$

3. Докажите, что $a \cup b = \sup(a,b)$ по этому отношению, т.е. для любого c

$a \leq c \ \& \ b \leq c \Leftrightarrow a \cup b \leq c.$

4. Докажите, что если морфизм алгебр является биекцией, то обратное отображение - морфизм.

5. Докажите, что всякая конечная булева алгебра вкладывается в счетную атомно порожденную (изоморфную алгебре конечных множеств натуральных чисел и их дополнений).

6. Сколько 4-элементных подалгебр содержит 16-элементная булева алгебра?

7. Пусть α - булева алгебра с бесконечным множеством атомов. Докажите, что существует бесконечно много эпиморфизмов $\alpha \twoheadrightarrow 2$.

8. Постройте две неизоморфные счетные атомные булевы алгебры.

9. Докажите, что алгебра Линденбаума классической логики высказываний безатомна (т.е. в ней нет атомов).

10. Докажите, что все счетные безатомные булевы алгебры изоморфны.

11. Докажите, что если множество Y конечно, то всякий булев морфизм $2^Y \to 2^X$ имеет вид 2^f для некоторого отображения $f: X \to Y$.

12. Докажите, что

а) если 2^f - инъекция, то f - сюръекция;

б) если 2^f - сюръекция, то f - инъекция.

13. Постройте модель Крипке с 4 мирами, в каждом из которых истинна формула

$\Diamond\Box p \wedge \Diamond\Box\neg p.$

14. Являются ли теоремами **K** формулы

а) $\Diamond p \supset \Box\Diamond(p \wedge q) \vee \Box\Diamond(p \wedge \neg q)$,

б) $\Box p \wedge \Diamond T \supset \Diamond(p \wedge q) \vee \Diamond(p \wedge \neg q)$?

15. Найдите многообразие шкал Крипке для формулы $\Diamond\Box p \supset \Box p.$

16. Докажите, что класс всех конечных окрестностных шкал не является многообразием.

17. Докажите, что класс всех иррефлексивных транзитивных шкал Крипке не является модальным многообразием.

18. Докажите (семантически и синтаксически), что следующие формулы принадлежат **K**:

(a) $\Box A \wedge \Box B \supset \Box(A \wedge B)$

(b) $\Diamond(A \vee B) \equiv \Diamond A \vee \Diamond B$

(c) $\Box(A \supset B) \supset (\Diamond A \supset \Diamond B)$

(d) $\Box A \wedge \Diamond T \supset \Diamond(A \wedge B) \vee \Diamond(A \wedge \neg B)$

19. Докажите, что правило $\dfrac{A \supset B}{\Diamond A \supset \Diamond B}$ допустимо в любой классической 1-модальной логике.

20. Докажите, что правило $\dfrac{A \vee B}{\Box A \vee \Diamond B}$ допустимо в любой классической 1-модальной логике.

21. Докажите, что логика $\mathbf{K}$ может быть задана аксиомами:

классические тавтологии + $\Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$

и правилами: modus ponens, подстановка, $\dfrac{A}{\Box A}$

22. Докажите, что $\mathbf{K} + \Diamond\top = \mathbf{K} + \Box p \supset \Diamond p$.

23. Докажите, что логика

$\mathbf{K}_2 + \Box_1 p \supset \Diamond_1 \Diamond_2 p \vee \Box_1 \Diamond_2 \Box_1 p$ непротиворечива.

24. Пусть $\mathbf{L}$ - 2-модальная логика. Рассмотрим 1-модальные логики

$\Box_1(\mathbf{L}) = \{A \in \mathbf{L} \mid A$ не содержит $\Box_1\}$,

$\Box_2(\mathbf{L}) = \{A \in \mathbf{L} \mid A$ A не содержит $\Box_2\}$.

а) Докажите, что если $\mathbf{L}$ окрестностно полна, то $\Box_1(\mathbf{L})$, $\Box_2(\mathbf{L})$ окрестностно полны.

б) То же - для полноты по Крипке.

25. Пусть (X, $\Box_x$), (X, $\Box_Y$) - монотонные окрестностные шкалы, $x \in X$.
Отображение f: X $\to$ Y называется
непрерывным в x, если прообраз любой окрестности f(x) есть окрестность x,
открытым в x, если образ любой окрестности x есть окрестность f(x).
Отображение f называется *непрерывным (открытым),* если оно непрерывно (открыто) в любой точке из X. Докажите, что

f непрерывно $\Leftrightarrow$ $\forall U \subseteq Y\ f^{-1}(\Box_Y U) \subseteq \Box_X f^{-1}(U)$,

f открыто $\Leftrightarrow$ $\forall U \subseteq Y\ f^{-1}(\Box_Y U) \supseteq \Box_X f^{-1}(U)$.

26. а) Найдите многообразие шкал Крипке для формулы $\Diamond\Box p \supset \Box p$.

б) Докажите, что логика $\mathbf{K} + \Diamond\Box p \supset \Box p$ — каноническая.

27. а) Найдите многообразие шкал Крипке для формулы $\Box\Box p \supset \Box p$.

б) Докажите, что логика $\mathbf{K} + \Box\Box p \supset \Box p$ — каноническая.

28. Докажите, что следующие правила вывода допустимы в **K**:

а) $\dfrac{\Box A}{A}$ б) $\dfrac{\Diamond A}{A}$ в) $\dfrac{A}{\Diamond A}$.

Допустимы ли они в любой нормальной модальной логике?

29. Докажите, что всякая конечная дистрибутивная решетка - гейтингова.

30. Постройте счетную дистрибутивную решетку, которая не является гейтинговой.

31. Докажите, что гейтингова алгебра топологического пространства является полной решеткой.

32. Докажите, что пересечение двух табличных логик (модальных или суперинтуиционистских) является табличной логикой.

33. Докажите, что всякая финитно аппроксимируемая нетабличная логика есть пересечение строго убывающей последовательности табличных логик.

34. Докажите, что всякая табличная 1-модальная логика, содержащая **K4**, - каноническая.

35. Докажите, что всякая табличная 1-модальная логика - каноническая.

36. Постройте 2-модальные аналоги формул Alt_n и C_n.
37. Докажите 2-модальный аналог критерия табличности Чагрова.
38. Докажите, что если $\mathbf{K} \vdash \Box A \vee \Box B$, то $\mathbf{K} \vdash A$ или $\mathbf{K} \vdash B$.
39. Найдите многообразие интуиционистских шкал Крипке для формулы Крайзеля - Патнема $KP = (\neg p \supset q \vee r) \supset (\neg p \supset q) \vee (\neg p \supset r)$.

40. Докажите, что правило $\dfrac{\neg A \supset B \vee C}{(\neg A \supset B) \vee (\neg A \supset C)}$ допустимо в **H**.

41. Докажите, что логика **H**+KP - каноническая.
42. Докажите, что если **L** - суперинтуиционистская логика, $\mathbf{L} + A \vdash B$, то $\mathbf{L} \vdash A' \supset B$, для некоторого подстановочного примера A' формулы A.
43. Докажите, что если **Λ** - расширение **S4**, $\mathbf{\Lambda} + A \vdash B$, то $\mathbf{\Lambda} \vdash \Box A' \supset B$, для некоторого подстановочного примера A' формулы A.
44. Сформулируйте и докажите аналог задачи 43 для расширений **K4**.
45. Пусть **Σ** - суперинтуиционистская логика. Докажите, что если формулы A, B не содержат общих переменных, то $(\mathbf{\Sigma} + A) \cap (\mathbf{\Sigma} + B) = \mathbf{\Sigma} + A \vee B$.
46. Суперинтуиционистская логика **Σ** обладает *свойством Халлдена*, если

$$\mathbf{\Sigma} \vdash A \vee B \Rightarrow \mathbf{\Sigma} \vdash A \text{ или } \mathbf{\Sigma} \vdash B$$

для любых формул A, B без общих переменных. Докажите, что если чум F имеет наименьший элемент, то **IL**(F) обладает свойством Халлдена.
47. Докажите свойство Халлдена для логик $\mathbf{H} + \neg p \vee \neg\neg p$ и **LC**.
48. Докажите, что суперинтуиционистская логика со свойством Халлдена не является пересечением двух своих собственных расширений.
48. Логика $\mathbf{\Lambda} \supseteq \mathbf{S4}$ обладает *свойством Халлдена*, если

$$\mathbf{\Lambda} \vdash \Box A \vee \Box B \Rightarrow \mathbf{\Lambda} \vdash A \text{ или } \mathbf{\Lambda} \vdash B$$

для любых формул A, B без общих переменных. Докажите, что если F - **S4**-конус, то **L**(F) обладает свойством Халлдена.
49. Докажите свойство Халлдена для логик **S4.2** и **S4.3**.
50. Докажите, что среди собственных расширений финитно аппроксимруемой нетабличной логики нет минимальных (по включению).
51. Докажите, что логика $\mathbf{\Lambda} \supseteq \mathbf{S4}$ со свойством Халлдена не является пересечением двух своих собственных расширений.
52. Докажите, что если логика (суперинтуиционистская или модальная, содержащая **S4**) не является пересечением двух своих собственных расширений, то она обладает свойством Халлдена.
53. Постройте континуум попарно несравнимых по включению суперинтуиционистских логик.
54. Докажите дизъюнктивное свойство для логики **H**+KP (см. задачу 39).
55. Докажите, что если каноническая шкала суперинтуиционистской логики **Σ** содержит наименьший элемент, то **Σ** обладает дизъюнктивным свойством.
56. Докажите, что если суперинтуиционистская логика обладает дизъюнктивным свойством, то ее каноническая шкала содержит наименьший элемент.
57. Докажите, что локально табличные суперинтуиционистские логики не имеют дизъюнктивного свойства.
58. *Дизъюнктивное свойство* для 1-модальной логики **Λ**:

если $\mathbf{\Lambda} \vdash \Box A_1 \vee \ldots \vee \Box A_n$, то $\mathbf{\Lambda} \vdash A_i$ для некоторого i.

Докажите это свойство для логик **K, D** и **T.**

59. Докажите, что 1-модальная логика обладает дизъюнктивным свойством, если и только если в ее канонической шкале имеется точка, из которой достижимы все точки.