

Пространственные логики (2012/13)

Лекция 1

1. Модальный пропозициональный язык, формулы. Общее понятие пропозиционального языка. Лемма об однозначном чтении формул.
2. Решетки. Булевы алгебры. Модальные алгебры. Монотонность, регулярность, нормальность.
3. Оценка в модальной алгебре; ее продолжение на формулы. Истинность формулы в алгебре. Истинность классических тавтологий в булевых алгебрах.
4. Модальные логики. Теорема о корректности алгебраической семантики.

Лекция 2

1. Задание модальных логик с помощью аксиом и правил вывода.
2. Гомоморфизмы модальных алгебр. Лемма о сохранении значений формул при гомоморфизмах.
3. Вложения и наложения ("эпиморфизмы") модальных алгебр. Сохранение истинности формул для подалгебр и гомоморфных образов.
4. Алгебра Линденбаума.

Лекция 3

1. Теорема о полноте модальных логик в алгебраической семантике. относительно классических модальных алгебр.
2. Многообразия модальных алгебр. Двойственность между многообразиями и модальными логиками. Полнота решетки модальных логик. Замкнутость многообразий относительно подалгебр и гомоморфных образов.
3. Булевы алгебры подмножеств 2^X . Окрестностные шкалы; их алгебры и логики. Окрестностные модели. Индуктивное определение истинности в окрестностной модели. Общезначимость в окрестностной шкале.
4. Общезначимость в точке окрестностной шкалы. Примеры условий локальной общезначимости для некоторых формул.

Лекция 4

1. Окрестностная полнота. Окрестностные многообразия. Двойственность между окрестностными многообразиями и окрестностно полными логиками. Полнота решетки окрестностно полных логик.
2. Примеры модальных логик и их окрестностных многообразий.
3. Окрестностные шкалы для **S4** и топологические пространства. Эквивалентные определения топологических пространств.

Лекция 5

1. Замкнутые множества. Замыкание и граница множества. База и замкнутая база топологического пространства.

2. Булевы гомоморфизмы вида 2^f .
3. Непрерывные и открытые отображения топологических пространств. Гомеоморфизмы.
4. Индуцированная топология и подпространства топологических пространств.

Лекция 6

1. Связь между инъективностью и сюръективностью отображений f и 2^f .
2. Операция замыкания в подпространстве.
3. Фактортопология и факторные отображения. Локальные гомеоморфизмы.

Лекция 7

1. Несвязная сумма окрестностных шкал и декартово произведение модальных алгебр. Логика произведения модальных алгебр.
2. Всякая окрестностно полная логика задается одной окрестностной шкалой.
3. Шкалы Крипке и их окрестностные пространства. Индуктивное определение истинности в модели Крипке.
4. Полнота по Крипке. Многообразия шкал Крипке ("модально определимые классы"). Двойственность между многообразиями и полными логиками. Полнота решетки полных логик.
5. Примеры многообразий шкал Крипке.
6. Топология Александрова на S_4 -шкалах. Пространства Александрова. Характеризация открытых и замкнутых множеств в топологии Александрова.

Лекция 8

1. Конечные булевы алгебры как алгебры множеств.
2. Конечные модальные алгебры = алгебры конечных окрестностных шкал. Конечные нормальные модальные алгебры = алгебры конечных шкал Крипке.
3. Свойства монотонности и поднятия для отображений шкал Крипке. Морфизмы шкал Крипке и морфизмы окрестностных шкал.
4. p -морфизмы. Сохранение общезначимости при p -морфизмах.
5. Конические подшкалы. Сохранение общезначимости для конических подшкал.
6. Несвязные суммы шкал Крипке и их логики. Задание полной по Крипке логики одной шкалой.

Лекция 9

1. Пропозициональные теории. Выводимость в теории с данной логикой. Теорема дедукции для теорий.
2. Непротиворечивые и полные теории. Лемма Линденбаума о расширении непротиворечивой теории до полной.
3. Свойства полных теорий.

4. Каноническая шкала и модель Крипке для нормальной модальной логики.
Теорема о канонической модели Крипке. Полнота минимальной нормальной логики.
5. Каноническая окрестностная модель и шкала. Теорема о канонической окрестностной модели.
6. Каноническая шкала для расширения данной логики.
7. Канонические логики. Каноничность логики с замкнутыми аксиомами.
Сохранение каноничности для сумм.

Лекция 10

1. Примеры канонических логик.
2. Стандартный перевод модальных формул в классические. Связь между моделями формул и их переводов.
3. Теорема о счетной аппроксимируемости для модальных логик.
4. Теорема о перечислимости для модальных логик.
5. Рекурсивная аксиоматизируемость перечислимых логик.

Лекция 11

1. Путь и размеченный путь в шкале Крипке. Конусы. Лемма о конусах.
2. Деревья. Развертка шкалы Крипке. Канонический р-морфизм развертки на исходную шкалу.
3. Примеры модальных логик, полных относительно деревьев.

Лекция 12

1. Деревья кортежей. Всякое счетное дерево изоморфно дереву кортежей.
2. n-деревья и n-деревья кортежей. Всякое счетное n-дерево изоморфно n-дереву кортежей.
3. Морфизмы моделей Крипке. Сохранение истинности формулы в точке.
Сохранение множества общезначимых замкнутых формул при р-морфизмах шкал Крипке.
4. Полнота модальных логик с замкнутыми аксиомами относительно деревьев.

Лекция 13

1. Хорновы классические предложения 1-го порядка. Хорновское замыкание шкалы Крипке относительно классической хорновой теории
2. Хорновы модальные формулы. Примеры хорновых модальных формул: псевдотранзитивные формулы.

Лекция 14

1. Модальные логики хорновского типа. Теорема о полнота относительно деревьев.
2. Полнота логики **S4** относительно счетного дерева с бесконечным ветвлением.

3. Полнота логики **S4** относительно счетного бинарного дерева (теорема Драгалина).

Лекция 15

1. Фильтрации моделей Крипке. Лемма о фильтрации. Существование фильтраций. Наименьшая и наибольшая фильтрации.
2. Финитная аппроксимируемость модальных логик, допускающих фильтрацию. Фильтрации для логик с замкнутыми аксиомами.
3. Фильтрации для логик **T** и **K.t**. Фильтрация Леммона для транзитивных моделей Крипке.
4. Финитная аппроксимируемость логик **K4.3, S4.3**.
5. Теорема Харропа о разрешимости финитно аппроксимируемых конечно аксиоматизируемых логик.

Лекция 16

1. Пространство Минковского. Световой конус и причинное будущее. ρ -морфизм стандартного треугольника на нижней полуплоскости Минковского на бесконечное бинарное дерево. Логика нижней полуплоскости Минковского с отношением причинного следования.
2. Аксиома Чёрча – Россера, ее каноничность. Логика **S4.2**; ее каноничность и финитная аппроксимируемость.

Лекция 17

1. Ступки в квазиупорядоченном множестве. Скелет.
2. Характеризация конечных **S4.2**-конусов. ρ -морфизм плоскости Минковского с отношением причинного следования на конечный **S4.2**-конус.

Лекция 18

1. Лемма о графике функции с ограниченной производной. ρ -морфизм стандартного сектора в ограниченной открытой области плоскости Минковского с гладкой границей на бесконечное бинарное дерево.
2. Логика ограниченной открытой области плоскости Минковского с гладкой границей.
3. Универсальная модальность. **S5** как логика универсальной модальности.
4. Логика **S4U**; ее каноничность и финитная аппроксимируемость.

Лекция 19

1. Аксиома связности. Характеризация связных пространств Александра.
2. Финитная аппроксимируемость логики **S4UC**.
3. Аксиомы отделимости $T_0 - T_4$; связь между ними. Регулярность. Нормальность. Эквивалентная форма аксиомы T_4 .

Литература

1. A. Chagrov, M. Zakharyashev. Modal logic. Oxford, 1997.
2. Е. Расева, Р. Сикорский. Математика метаматематики. М., 1972.
3. Р. Сикорский. Булевы алгебры. М., 1968.
4. Г. Биркгоф. Теория решеток. М., 1967.
5. Г. Биркгоф Г., Т. Барти. Современная прикладная алгебра. М., 1976.
6. Л. А. Скорняков. Элементы общей алгебры. М., 1983.
7. А.И. Мальцев. Алгебраические системы. М., 1970.
8. К. Куратовский. Топология, т. 1. М., 1966.
9. Р. Энгелькинг. Общая топология. М., 1986.
10. Н. Бурбаки. Общая топология. Основные структуры. М., 1968.
11. S. Morris. Topology without tears. 2011 (ищется в Интернете)
12. R. Goldblatt. Logics of time and computation. CSLI Lecture Notes, v.7. Stanford, 1992.