ЗАДАЧИ

к спецкурсу “Пространственные логики” (2012/13)

1. Булевы алгебры

1-1. Покажите, что в любой булевой алгебре

(i) $- - a = a$

(ii) $a \leq b \Leftrightarrow - b \leq - a$

(iii) $a \leq - b \Leftrightarrow a \cap b = 0$

(iv) $a \leq b \Leftrightarrow a \supset b = 1$

(v) $-(a \cup b) = - a \cap - b$

(vi) $-(a \cap b) = - a \cup - b$

(vii) $c \leq a \supset b \Leftrightarrow a \cap c \leq b$

1-2. *Атом* булевой алгебры - это минимальный ненулевой элемент, т.е. такой a, что $\forall x\ (x < a \Longrightarrow x = 0)$. Булева алгебра называется *атомной,* если любой ненулевой ее элемент ограничен снизу атомом, т.е.

$$\forall x \neq 0\ \exists a < x \text{ (a- атом).}$$

(i) Постройте счетную атомную булеву алгебру.

(ii) Постройте две неизоморфные счетные атомные булевы алгебры.

1-3. В булевой алгебре α рассмотрим операцию "симметрической разности":

$x+y := (x \cap - y) \cup (y \cap - x)$

Докажите, что α с операциями $+$, $\cap$, 1 образует коммутативное кольцо с единицей.

1-4. Коммутативное кольцо с единицей (и операциями +, ·) называется *булевым*, если умножение в нем идемпотентно, т.е. $x \cdot x = x$ для всех x. Докажите следующие свойства булевых колец.

(i) $x+x = 0$ для всех x.

(ii) Операции

$x \cap y := x \cdot y,\ - x := x+1,\ x \cup y := x + y + x \cdot y,\ 0,\ 1$

задают структуру булевой алгебры, причем

$x+y = (x \cap - y) \cup (y \cap - x)$.

1-5. Докажите, что всякое булево кольцо является векторным пространством над 2-элементным полем $\mathbf{F_2}$**.** Выведите отсюда, что конечная булева алгебра содержит

2^n элементов.

1-6. Докажите, что атомы булевой алгебры линейно независимы (в соответствующем векторном пространстве над $\mathbf{F_2}$).

1-7. а) Докажите, что конечная булева алгебра имеет линейный базис (т.е. базис в векторном пространстве), состоящий из атомов.

б) Выведите, отсюда, что она изоморфна $\mathbf{2}^n$ (алгебре всех подмножеств n-элементного множества), где n - число атомов.

в) Верно ли, что всякий линейный базис конечной булевой алгебры состоит из ее атомов?

1-8. Докажите, что если счетная булева алгебра имеет линейный базис, состоящий из атомов, то она изоморфна алгебре **2***, состоящей из всех конечных и всех ко-конечных множеств натуральных чисел.

1-9. Сколько автоморфизмов имеет булева алгебра $\mathbf{2}^n$?

1-10. Сколько 4-элементных булевых подалгебр содержит алгебра $\mathbf{2}^4$?

1-11. Подалгебра булевой алгебры, *порожденная множеством* M, - это наименьшая булева подалгебра, содержащая M. *Рангом* булевой алгебры называется наименьшая мощность порождающего ее подмножества. Аналогично определяется ранг булева кольца.

а) Докажите, что ранг булева кольца равен рангу соответствующей булевой алгебры (см. задачу 4).

б) Найдите ранг булевой алгебры $\mathbf{2}^3$.

в) Найдите мощность подалгебры конечной алгебры $\mathbf{2}^n$, порожденной множеством из m атомов.

г) Найдите наибольшую мощность булевой алгебры конечного ранга n.

1-12. Рассмотрим кольцо $\mathbf{F_2}[x_1,...,x_n]$ многочленов от n переменных над полем $\mathbf{F_2}$. *Кольцо* $\mathrm{Bool}[x_1,...,x_n]$ *булевых многочленов* (или *многочленов Жегалкина) от n переменных* - это факторкольцо $\mathbf{F_2}[x_1,...,x_n]/I$ по идеалу $I:=(x_1^2+x_1,..., x_n^2+x_n)$.

а) Найдите мощность этого кольца.

б) Найдите его ранг и укажите какое-нибудь минимальное порождающее подмножество.

1-13. Найдите ранг булевой алгебры $\mathbf{2}^n$ (где n конечно).

1-14. Докажите, что $\mathrm{Bool}[x_1,...,x_n]$ (задача 12) является *свободным булевым кольцом с базисом* $\{x_1,...,x_n\}$: всякое отображение $\{x_1,...,x_n\}$ в произвольное булево кольцо $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ единственным образом продолжается до гомоморфизма $\mathrm{Bool}[x_1,...,x_n] \to \boldsymbol{\mathcal{B}}$.

1-15. Докажите, что всякое свободное булево кольцо с базисом из n элементов изоморфно $\mathrm{Bool}[x_1,...,x_n]$.

1-16. а) Пусть $a_1,...,a_n$ - элементы булева кольца, $f(x_1,...,x_n)$ - булев многочлен от n переменных. Используя задачу 14, объясните, что должна обозначать запись $f(a_1,...,a_n)$.

б) Элементы $a_1,...,a_n$ булева кольца называются *алгебраически независимыми*, если $f(a_1,...,a_n)\neq 0$ для любого ненулевого булева многочлена $f(x_1,...,x_n)$. Докажите, что элементы $a_1,...,a_n$ образуют базис булева кольца $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ тогда и только тогда, когда они алгебраически независимы и порождают $\boldsymbol{\mathcal{B}}$.

1-17. Докажите, что мощность любого базиса конечного свободного булева кольца равна рангу этого кольца.

1-18. а) Используя задачу 9, найдите число базисов кольца $\mathrm{Bool}[x_1,...,x_n]$.

б) Найдите все базисы кольца $\mathrm{Bool}[x_1,x_2]$.

1-19. Пусть $a_1,...,a_n$ - элементы булевой алгебры α, $A(p_1,...,p_n)$ - классическая формула от переменных $p_1,...,p_n$. Обозначим $A(a_1,...,a_n) := |A|_\theta$ для оценки $\theta: PV \to \alpha$, такой что $\theta(p_i) = a_i$ для всех i (*значение формулы A на элементах* $a_1,...,a_n$). Элементы $a_1,...,a_n$ называются *алгебраически независимыми*, если любая формула $A(p_1,...,p_n)$, для которой $A(a_1,...,a_n)=1$, является тавтологией. *Базисом булевой алгебры* называется алгебраически независимое порождающее подмножество. Алгебра, имеющая базис, называется *свободной*.

а) Пусть α - булева алгебра с булевым кольцом $\boldsymbol{\mathcal{B}}$. Докажите, что $a_1,...,a_n$ алгебраически независимы в α, если и только если они алгебраически независимы в $\boldsymbol{\mathcal{B}}$.
б) Пусть α - булева алгебра с булевым кольцом $\boldsymbol{\mathcal{B}}$. Докажите, что $a_1,...,a_n$ образуют базис в α, если и только если они образуют базис в $\boldsymbol{\mathcal{B}}$.
1-20. *Алгебра Линденбаума классической логики с n переменными* Lind(**CL**↾n) определяется как фактормножество всех классических формул от переменных $p_1,...,p_n$ по отношению $A\sim B$:= "($A\equiv B$) - тавтология" с естественными булевыми операциями. Докажите, что Lind(**CL**↾n) - свободная булева алгебра ранга n.
1-21. а) Докажите, что алгебра **2*** из задачи 8 *атомно порождена*, т.е. порождается своими атомами.
б) Докажите, что все счетные атомно порожденные булевы алгебры изоморфны.
в) Докажите, что всякая конечная булева алгебра изоморфно вкладывается в **2***.
г) Докажите, что **2*** изоморфно вкладывается в любую счетную булеву алгебру.
1-22. *Кольцо булевых многочленов от счетного числа переменных* Bool[x_1,...] определяется аналогично задаче 12. *Алгебра Линденбаума классической логики* Lind(**CL**) определяется как фактормножество всех классических формул от переменных по отношению $A\sim B$:= "($A\equiv B$) - тавтология".
а) Докажите, что Bool[x_1,...] изоморфно булеву кольцу алгебры Lind(**CL**).
б) Докажите, что Bool[x_1,...] - свободное булево кольцо счетного ранга; аналогично - для алгебры Lind(**CL**).
1-23. Докажите, что алгебра Lind(**CL**) *безатомна*, т.е. в ней нет атомов.
1-24. Докажите, что любая счетная булева алгебра изоморфно вкладывается в Lind(**CL**).
1-25. Докажите, что все счетные безатомные булевы алгебры изоморфны.

2. Синтаксис модальных логик

2-1. Докажите, что правило $\dfrac{A \supset B}{\Diamond A \supset \Diamond B}$ допустимо в любой 1-модальной логике.

2-2. Докажите, что правило $\dfrac{A \vee B}{\Box A \vee \Diamond B}$ допустимо в любой 1-модальной логике.

2-3. Докажите, что логика **K** может быть задана аксиомами:

классические тавтологии + $\Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$

и правилами: modus ponens, подстановка, $\dfrac{A}{\Box A}$

2-4. Докажите, что $K + \Diamond\top = K + \Box p \supset \Diamond p$.

2-5. Докажите, что логика

$K_2 + \Box_1 p \supset \Diamond_1 \Diamond_2 p \vee \Box_1 \Diamond_2 \Box_1 p$ непротиворечива.

2-6. *Классической логикой высказываний* называется множество всех классических тавтологий (обозначение: **CL**). Докажите, что **CL** - "абсолютно полная логика", т.е. всякое множество классических формул, строго содержащее **CL** и замкнутое относительно правила подстановки, содержит все формулы.

2-7. а) Докажите, что логика $K + \Box\bot$ *максимальна,* т.е. всякая строго содержащая ее 1-модальная логика противоречива.

б) Докажите, что логика $K + \Box p \equiv p$ максимальна.

2-8. Докажите в **K** следующие теоремы:

(а) $\Diamond(A \vee B) \equiv \Diamond A \vee \Diamond B$

(б) $\Box(A \supset B) \supset (\Diamond A \supset \Diamond B)$

(в) $\Box A \wedge \Diamond\top \supset \Diamond(A \wedge B) \vee \Diamond(A \wedge \neg B)$

3. Топологические пространства

3-1. Пусть Y - множество в топологическом пространстве. Используя логику **S4**, докажите следующие утверждения.

а) Если Y открыто, то $Y \subseteq \Box\Diamond Y$.

б) Если Y замкнуто, то $\Diamond\Box Y \subseteq Y$.

в) $\Box Y \subseteq \Box\Diamond\Box Y \subseteq \Box\Diamond Y \subseteq \Diamond\Box\Diamond Y \subseteq \Diamond Y$.

г) $\Box\Diamond\Box Y \subseteq \Diamond\Box Y \subseteq \Diamond\Box\Diamond Y$.

3-2. Пусть Y - множество в топологическом пространстве. Докажите следующие утверждения.

а) $\Diamond\Box\Diamond\Box Y = \Diamond\Box Y$.

б) $\Box\Diamond\Box\Diamond Y = \Box\Diamond Y$.

в) Многократно применяя к Y операции $\Box$, $\Diamond$, $-$, можно построить не более 14 различных множеств.

3-3. Пусть Y, Z - множества в топологическом пространстве. Используя логику **S4**, докажите следующие утверждения.

а) $\partial \Diamond Y \subseteq \partial Y$.
б) $\partial \Box Y \subseteq \partial Y$.
в) $\partial Y = (Y \cap \Diamond (-Y)) \cup (\Diamond Y - Y)$.
г) $\partial Y \cup \partial Z = \partial (Y \cup Z) \cup \partial (Y \cap Z) \cup (\partial Y \cap \partial Z)$.
д) $\Diamond \Box \partial Y = \Diamond (Y \cap \Box \partial Y) = \Diamond (\Box \partial Y - Y)$.
е) $\partial\partial\partial Y = \partial\partial Y$.
ж) $\Box (Y - Z) \subseteq \Box Y - \Box Z$.
д) $\Diamond \Box \Diamond (Y \cup Z) = \Diamond \Box Y \Diamond \Box Z$.

3-4. Пересечение открытого и замкнутого множества в топологическом пространстве назовем *полуоткрытым*.
а) Докажите, что конечные объединения полуоткрытых множеств в пространстве $(X, \mathcal{T})$ образуют булеву алгебру; это - наименьшая подалгебра 2^X, содержащая топологию $\mathcal{T}$.
б) Докажите, что конечные объединения полуоткрытых множеств не составляют модальной подалгебры в MA(**R**).
3-5. Топологическое пространство называется *дискретным*, если все его подмножества открыты и *антидискретным,* если в нем нет собственных непустых открытых подмножеств. Существует ли топологическое пространство, в котором нет непустых дискретных подпространств, но которое не является антидискретным?
3-6. *T_1-пространством* называется топологическое пространство, в котором все точки (одноэлементные подмножества) замкнуты. Подмножество топологического пространства называется *дискретным*, если индуцированная на нем топология - дискретная. Докажите, что дискретное подмножество T_1-пространства не обязано быть замкнутым.
3-7. Подмножество Y топологического пространства X называется *(всюду) плотным*, если $\Diamond Y = X$.
а) Докажите, что Y плотно, если и только если оно пересекается с любым непустым открытым множеством.
б) Докажите, что если Y плотно, то для любого открытого U, $\Diamond (Y \cap U) = \Diamond U$.
3-8. Докажите, что в T_1-пространстве дополнение дискретного подмножества всюду плотно.
3-9. Докажите, что в **R** имеется континуум дискретных подмножеств.
3-10. Докажите, что в **R** имеется континуум счетных плотных подмножеств.
3-11. Докажите, что в **R** имеется гиперконтинуум плотных подмножеств.
3-12. Докажите, что если в равномощных топологических пространствах X и Y все точки плотны, то X и Y гомеоморфны.
3-13. Постройте бесконечное топологическое пространство, в котором не все точки плотны, но все двухэлементные подмножества плотны.

3-14. Подмножество Y топологического пространства X называется *нигде не плотным*, если $\square \Diamond Y = \varnothing$. Докажите, что замкнутое множество нигде не плотно, если и только если его граница