МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И АЛГОРИТМЫ

(4 курс, весна 2008)

ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

1. Высказывания. Пропозициональные формулы. Аксиомы и правила вывода классического исчисления высказываний (CL) и интуиционистского исчисления высказываний (IL).

3. Доказательства (выводы) в исчислениях CL и IL. Теоремы (выводимые формулы). Доказательство формулы $A \to A$.

4. 2-значные оценки пропозициональных переменных. Значение формулы при оценке. Эквивалентные формулы. Тавтологии Теорема корректности для CL.

5. Вывод из множества формул (теории) Γ (в CL и IL). Теорема дедукции.

6. Лемма о доказательстве "от противного". Лемма о "разборе случаев".

7. Непротиворечивость и (синтаксическая) полнота пропозициональной теории. Свойства полных теорий.

8. Лемма Линденбаума. Выводимость формулы $\neg\neg A \to A$. Теорема о (семантической) полноте CL.

9. Интуиционистская логика. Шкала Крипке. Модель Крипке. Истинность формулы в точке ("мире") модели Крипке. Принцип сохранности.

10. Теорема корректности для IL относительно моделей Крипке. Недоказуемость закона исключенного третьего ($p \vee \neg p$) в IL. Теорема о полноте IL (формулировка).

ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

11. Сигнатура (язык 1-го порядка). Термы и формулы данной сигнатуры. Свободные и связанные вхождения переменной в формулу. Параметры формулы. Замкнутые формулы (предложения).

12. Интерпретация сигнатуры. Оцененные термы и формулы. Значение оцененного терма и оцененной формулы в интерпретации. Нормальные интерпретации.

13. Выполнимость и общезначимость замкнутой формулы. Универсальное замыкание. Общезначимость произвольной формулы. Эквивалентные формулы.

14. Теория первого порядка. Модель теории. Выполнимая теория. Примеры теорий 1-го порядка: теория графов; теория полугрупп ; теория строгого частичного порядка без максимальных элементов -- выполнимая теория, не имеющая конечных моделей.

15. Свободная подстановка терма вместо переменной в формулу.

15. Классическое исчисление предикатов сигнатуры Ω (PC_Ω). Вывод.Теоремы. Вывод из данного множества формул.

16. Теорема дедукции для PC_Ω .

17. Примеры теорем и допустимых правил исчисления предикатов: правила Бернайса; правила монотонности для кванторов; формулы $\neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi$, $\neg\forall x\varphi \leftrightarrow \exists x\neg\varphi$; формулы $\forall x\varphi(x) \to \forall y\varphi(y)$, $\exists x\varphi(x) \to \exists y\varphi(y)$ (с ограничениями).

18. Леммы о двойной подстановке в термы и формулы.

19. Теорема корректности для PC_Ω .

20. Логическое следование. Теорема корректности и теорема о непротиворечивости для теорий первого порядка.

21. Исчисление предикатов с равенством $PC^{=}_{\Omega}$. Лемма о замене термов на равные им термы в атомарных формулах. Теоремы корректности и непротиворечивости для $PC^{=}_{\Omega}$ и для теорий первого порядка с равенством.
22. Элементарная теория данной интерпретации. Полные теории 1-го порядка. Свойства полных теорий. Лемма Линденбаума.
23. Экзистенциально полные теории. Теории Хенкина.
24. Лемма о свежих константах. Лемма о расширении непротиворечивой теории до непротиворечивой теории Хенкина.
25. Построение счетной модели для полной и экзистенциально полной теории без равенства в счетной сигнатуре.
26. Теорема Гёделя о полноте для исчисления предикатов без равенства (в двух формах: существование модели для непротиворечивой теории и доказуемость общезначимых формул). Эквивалентность выводимости и логического следования. Теорема Лёвенгейма – Сколема для теорий первого порядка без равенства.
27. Эпиморфизм и изоморфизм интерпретаций. Сохранение значений термов и формул при изоморфизме.
28. Теорема о существовании нормальной модели для непротиворечивой теории с равенством.
29. Полнота исчисления предикатов с равенством. Теорема Лёвенгейма – Сколема для теорий первого порядка с равенством.
30. Теорема компактности Гёделя – Мальцева для теорий первого порядка. Признак существования бесконечных моделей.
31. Изоморфность и элементарная эквивалентность интерпретаций.
32. Полнота теории как элементарная эквивалетность всех ее моделей.
33. Сильная категоричность и счетная категоричность. Сильная категоричность элементарной теории конечной интерпретации в конечной сигнатуре.
34. Полнота счетно категоричных теорий без конечных моделей (признак Вота). Примеры счетной счетно категоричных теорий.

АЛГОРИТМЫ

32. Общее понятие алгоритма. Система Поста. Вывод в системе Поста.
33. Вариант определения выводимости в системе Поста с использованием одновременной подстановки. Выводимые (производные) правила. Лемма о подстановке в выводимые правила.
34. Перечислимые и разрешимые множества слов. Сохранение перечислимости для объединений и пересечений. Сохранение разрешимости для булевских операций.
33. Вычислимые частичные словарные функции. Разрешимость как вычислимость характеристической функции. Сохранение перечислимости для проекций.
34. Кодирование систем Поста. Гёделев номер системы Поста. Построение универсальной системы Поста (теорема о нумерации).
35. Построение перечислимого неразрешимого множества натуральных чисел.
36. Преобразование системы Поста в теорию первого порядка.
37. Перечислимые и разрешимые теории. Перечислимость исчисления предикатов в конечной сигнатуре. Перечислимость теории с перечислимым множеством аксиом.

Разрешимость полной теории с перечислимым множеством аксиом.
38. Теорема Чёрча о неразрешимости исчисления предикатов в подходящей сигнатуре.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ

39. Сигнатура арифметики. Стандартная модель. Полная арифметика.
Существование нестандартных моделей арифметики.
40. Арифметика Робинсона. Арифметика Пеано. Нумерическая выразимость вычислимых функций (без док.)
41. Арифметические множества. Перечислимое множество как множество значений всюду определенной вычислимой функции. Арифметичность перечислимых множеств. 1-я теорема Гёделя о неполноте.
42. Теорема о неподвижной точке (диагонализации).
43. Наследственная неразрешимость арифметики Робинсона.
44. Теорема Тарского о невыразимости истины. Неарифметичность полной арифметики.
2-я теорема Гёделя о неполноте (формулировка).

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.К. Верещагин, А.Х. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2 : Языки и исчисления. М., МЦНМО, 2000. http://www.mccme.ru

2. В.А. Успенский, Н.К. Верещагин, В.Е. Плиско. Вводный курс математической логики. Издательство МГУ. М., 1991 и 1997. Физматлит, 2002.

3. Справочная книга по математической логике под ред. Дж. Барвайса. Ч. 1. Теория моделей. М., Наука, 1982.

4. Э. Мендельсон. Введение в математическую логику. М.,1984.

5. А. Н. Колмогоров, А. Г. Драгалин. Введение в математическую логику, изд.2. М, 2005.

6. Дж. Булос, Р. Джеффри. Вычислимость и логика. М., Мир, 1994.