МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И АЛГОРИТМЫ

(4 курс, весна 2010)

ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

1. Пропозициональные формулы. Аксиомы и правила вывода классического исчисления высказываний (CL) и интуиционистского исчисления высказываний (IL).
2. Доказательства (выводы) в исчислениях CL и IL. Теоремы (выводимые формулы). Доказательство формулы $A \to A$.
3. 2-значные оценки пропозициональных переменных. Значение формулы при оценке. Тавтологии. Теорема корректности для CL. Непротиворечивость CL.
4. Вывод из множества формул (теории) Γ (в CL и IL). Теорема дедукции.
5. Транзитивность выводимости. Лемма о доказательстве "от противного". Лемма о "разборе случаев". Доказуемость всех формул в противоречивой теории.
6. Непротиворечивость и (синтаксическая) полнота пропозициональной теории. Свойства непротиворечивых полных теорий.
7. Лемма Линденбаума. Выводимость формулы $\neg\neg A \to A$. Теорема о (семантической) полноте CL.
8. Интуиционистская логика. Шкала Крипке. Модель Крипке. Истинность формулы в точке ("мире") модели Крипке. Принцип сохранения.
9. Теорема корректности IL в семантике Крипке. Недоказуемость закона исключенного третьего ($p \vee \neg p$) в IL. Теорема о полноте IL (формулировка).

ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

10. Сигнатура (язык 1-го порядка). Термы и формулы данной сигнатуры. Свободные и связанные вхождения переменной в формулу. Параметры формулы. Замкнутые формулы (предложения).
11. Интерпретация сигнатуры. Расширенная сигнатура. Оцененные термы и формулы. Значение оцененного терма и оцененной формулы в интерпретации. Нормальные интерпретации.
12. Выполнимость и общезначимость замкнутой формулы. Теория первого порядка. Модель теории. Выполнимая теория. Примеры теорий 1-го порядка: теория графов; теория полугрупп; теория строгого частичного порядка без максимальных элементов -- выполнимая теория, не имеющая конечных моделей.
13. Гомоморфизм, эпиморфизм и изоморфизм интерпретаций. Отношение изоморфности. Сохранение значений термов при гомоморфизме. Сохранение значений формул при изоморфизме.
14. Предикаты, выразимые в данной интерпретации. Необходимое условие выразимости. Примеры невыразимых предикатов.
15. Элементарная теория данной интерпретации. Отношение элементарной эквивалентности. Элементарная эквивалентность изоморфных интерпретаций.
16. Сильно категоричные теории 1-го порядка. Сильная категоричность элементарной теории конечной интерпретации в конечной сигнатуре.
17. Подстановка терма вместо переменной в терм и формулу. Коллизия переменных. Свободная подстановка терма вместо переменной в формулу.
18. Классическое исчисление предикатов сигнатуры Ω (PC_Ω). Вывод.Теоремы.

Вывод из данного множества формул. Транзитивность выводимости. Допустимые и производные правила вывода. Допустимость производных правил.
19. Теорема дедукции для PC_Ω. Сведе́ние выводимости в конечной теории к выводимости в исчислении предикатов.
20. Леммы о доказательстве "от противного" и о "разборе случаев" в исчислении предикатов. Правило контрапозиции. Примеры теорем и допустимых правил исчисления предикатов: правила Бернайса; правила монотонности для кванторов; формулы $\neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi$, $\neg\forall x\varphi \leftrightarrow \exists x\neg\varphi$; формулы $\forall x\varphi(x)\rightarrow \forall y\varphi(y)$, $\exists x\varphi(x)\rightarrow \exists y\varphi(y)$ (с ограничениями).
21. Условие истинности для формулы с несколькими кванторами общности. Универсальное замыкание формулы. Эквивалентность различных его вариантов.
22. Понятие общезначимости для произвольной формулы. Эквивалентные формулы.
23. Леммы о двойной подстановке в термы и формулы.
24. Теорема корректности для PC_Ω.
25. Логическое следование. Теорема корректности для теорий первого порядка. Непротиворечивость теории 1-го порядка. Непротиворечивость выполнимых теорий.
26. Исчисление предикатов с равенством $PC_\Omega^=$. Лемма о замене термов на равные им термы в атомарных формулах. Нормальная общезначимость и выполнимость. Теорема корректности и для $PC_\Omega^=$ и для теорий первого порядка с равенством. Непротиворечивость нормально выполнимых теорий первого порядка с равенством.
27. Экзистенциально полные теории первого порядка. Теории Хенкина.
28. Лемма о свежей константе. Лемма о расширении непротиворечивой теории до непротиворечивой теории Хенкина.
29. Полные теории 1-го порядка. Свойства полных непротиворечивых теорий. Лемма Линденбаума.
30. Построение счетной модели для полной и экзистенциально полной теории без равенства в счетной сигнатуре.
31. Теорема Гёделя о полноте для исчисления предикатов без равенства (в двух формах: существование модели для непротиворечивой теории и доказуемость общезначимых формул). Эквивалентность выводимости и логического следования. Теорема Лёвенгейма – Сколема для теорий первого порядка без равенства.
32. Теорема о существовании нормальной модели для непротиворечивой теории с равенством.
33. Полнота исчисления предикатов с равенством. Теорема Лёвенгейма – Сколема для теорий первого порядка с равенством.
34. Теорема компактности Гёделя – Мальцева для теорий первого порядка. Признак существования бесконечных моделей (теорема Лёвенгейма – Сколема "вверх").
35. Существование нестандартных моделей арифметики.
33. Счетная категоричность. Полнота счетно категоричных теорий без конечных моделей (признак Вота). Примеры счетной категоричности.

АЛГОРИТМЫ

34. Общее понятие алгоритма. Система Поста. Вывод в системе Поста.
35. Перечислимые и разрешимые множества слов. Сохранение перечислимости для объединений и пересечений. Сохранение разрешимости для булевских операций.
33. Вычислимые частичные словарные функции. Словарное прямое произведение множеств. Сохранение перечислимости для словарных прямых произведений. Сохранение перечислимости для проекций.
34. Разрешимость как вычислимость характеристической функции (теорема Поста). Сохранение перечислимости для образов и прообразов.
34. Кодирование систем Поста над данным основным алфавитом. Перечислимость множества кодов систем Поста.
35. Вычислимость "кодовой" функции подстановки терма вместо переменной в терм.
36. Построение универсальной системы Поста.
37. Лексикографическая нумерация слов. Вычислимость лексикографического номера.
38. Гёделев номер системы Поста. Теорема об универсальной нумерации систем Поста. Построение перечислимого неразрешимого множества натуральных чисел.
39. Преобразование системы Поста в теорию первого порядка.
40. Перечислимые и разрешимые теории. Перечислимость исчисления предикатов в конечной сигнатуре. Перечислимость теории с перечислимым множеством аксиом. Разрешимость перечислимой полной теории.
41. Теорема Чёрча о неразрешимости исчисления предикатов в подходящей сигнатуре.
42. Арифметические теории. Арифметика Робинсона, арифметика Пеано; их непротиворечивость. Истинная арифметика. Представимость общерекурсивных функций в арифметике Робинсона (без док.).
43. Перечислимое множество как множество значений общерекурсивной функции.
44. Арифметические множества. Арифметичность перечислимых множеств натуральных чисел.
45. Неперечислимость истинной арифметики. 1-я теорема Гёделя о неполноте.
46. Гёделевская нумерация арифметических формул. Теорема о неподвижной точке.
47. Существенная неразрешимость арифметики (теорема Тарского - Мостовского - Робинсона).
48. Теорема Тарского "о невыразимости истины". Неарифметичность истинной арифметики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.К. Верещагин, А.Х. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2: Языки и исчисления. М., МЦНМО, 2000. http://www.mccme.ru

2. В.А. Успенский, Н.К. Верещагин, В.Е. Плиско. Вводный курс математической логики. Издательство МГУ. М., 1991 и 1997. Физматлит, 2002.

3. Справочная книга по математической логике под ред. Дж. Барвайса. Ч. 1. Теория моделей. М., Наука, 1982.

4. Э. Мендельсон. Введение в математическую логику. М.,1984.

5. П. Мартин-Лёф. Очерки по конструктивной математике. М.,Мир, 1975.

6. А.Н.Колмогоров, А.Г.Драгалин. Математическая логика. Серия "Классический университетский учебник", 2005.