ЗАДАЧИ
к курсу "Мат. логика и алгоритмы" (2008)

1. Докажите разрешимость множества всех четных чисел.

2. Докажите, что если f – вычислимая (частичная) функция из **N** в **N**, то область определения и множество значений f перечислимы.

3. Докажите, что формула Даммета $(p \to q) \vee (q \to p)$ истинна в линейно упорядоченных моделях Крипке, но невыводима в IL.

4. Пусть T – полная теория с равенством, имеющая конечную модель. Докажите, что T не имеет бесконечных моделей.

5. Докажите, что сложение натуральных чисел является вычислимой функцией.

6. Докажите, что формула $p \to \neg\neg p$ является теоремой IL.

7. Докажите, что тождественная функция, заданная на словах конечного алфавита, вычислима.

8. Докажите разрешимость одноэлементного множества натуральных чисел.

10. Докажите, что не существует теории первого порядка в сигнатуре $\{+,\cdot,=,0,1\}$, моделями которой являются в точности все конечные поля. Аналогично -- для полей ненулевой характеристики.

11. Постройте формулу 1-го порядка без равенства, имеющую 2-элементную модель, но не имеющую 1-элементных моделей.

12. Переведите текст в логическую символику (в подходящей сигнатуре) и постройте конечную модель полученной теории:

`Существуют по крайней мере две прямые. Каждая прямая содержит более одной точки. Через любые 2 различные точки проходит ровно одна прямая. Прямые параллельны тогда и только тогда, когда они не имеют общих точек. Через любую точку, не лежащую на данной прямой, проходит ровно одна прямая, параллельная данной.`

13. Постройте формулу 1-го порядка без равенства, имеющую 3-элементную модель, но не имеющую 2-элементных моделей.

14. Докажите, что формула

$$\neg(p \vee q) \to \neg p \wedge \neg q$$

является теоремой CL.

15. Докажите, что пустое множество слов в конечном алфавите разрешимо.

16. Используя теорему о полноте, докажите, что формула $\neg(p \vee q) \to \neg p \wedge \neg q$ является теоремой IL.

17. Докажите, что формула

$\forall x \exists y P(x,y) \rightarrow \exists y \forall x P(x,y)$ невыводима в исчислении предикатов.

18. Пусть

$\varphi_n := \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists x_0 (x_0 \neq x_1 \wedge \ldots \wedge x_0 \neq x_n)$ (при $n>0$)

Докажите, что теория $T = \{\varphi_n \mid n>0\}$ полна (в сигнатуре с одним символом =).

19. Докажите, что если $\vdash_{CL} A$, то $\vdash_{IL} \neg\neg A$ (теорема Гливенко).

20. Докажите, что композиция вычислимых всюду определенных функций из **N** в **N** вычислима.

21. Докажите, что элементарная теория поля $\mathbf{Q}$ в сигнатуре $\{+,\cdot,=,0,1\}$ не является счетно категоричной.