Логика высказываний

1. Запишите пропозициональную формулу, выражающую следующее рассуждение:

> *Если инвестиции останутся постоянными, то вырастут правительственные расходы или возникнет безработица. Если правительственные расходы не вырастут, то налоги будут снижены. Если налоги будут снижены и инвестиции останутся постоянными, то безработица не возникнет. Следовательно, правительственные расходы вырастут.*

Является ли эта формула тавтологией?

2. а) Постройте пропозициональную формулу A, для которой обе формулы $(r \to A) \leftrightarrow (r \to (p \wedge q))$ и $(A \to r) \leftrightarrow ((\neg(p \vee q)) \to r)$ общезначимы (т.е. являются тавтологиями).

б) Можно ли построить такую формулу A, чтобы формула $((A \wedge q) \to \neg p) \to ((p \to \neg q) \to A)$ была общезначимой? Если да, то сколько неэквивалентных решений имеет задача?

3*. Пусть формула A не содержит других связок, кроме $\leftrightarrow$. Докажите, что A общезначима тогда и только тогда, когда каждая переменная входит в A чётное число раз.

Определения. Назовём *интерпретацией* произвольное отображение $\alpha\colon \mathrm{Var} \to \{0, 1\}$. Отображение α распространяется на все пропозициональные формулы по таблицам истинности; обозначим это расширение через $\bar{\alpha}$. Значение $\bar{\alpha}(A)$ называется *истинностным значением* формулы A при интерпретации α. Если для данной формулы A верно $\bar{\alpha}(A) = 1$, то говорят, что формула A *истинна при интерпретации* α, и пишут $\alpha \vDash A$. В противном случае A *ложна при интерпретации* α; $\alpha \nvDash A$.

Определения. Если T — множество формул *(пропозициональная теория)*, и все они истинны при интерпретации α, то пишем $\alpha \vDash T$ и говорим, что теория T истинна при интерпретации α и, наоборот, интерпретация α является *моделью* теории T. Пропозициональная теория, имеющая хотя бы одну модель, называется *выполнимой.*

4*. Пусть Θ — множество всех интерпретаций. Определим на нём структуру метрического пространства следующим образом: если $\alpha, \beta \in \Theta$, причём $\alpha(p_i) = \beta(p_i)$ для всех $i < n$, а $\alpha(p_n) \neq \beta(p_n)$, то $\rho(\alpha, \beta) = 2^{-n}$ (а если $\alpha(p_i) = \beta(p_i)$ для всех i, то $\alpha = \beta$ и $\rho(\alpha, \beta) = 0$). **а)** Докажите, что $\mathbf{\Theta} = \langle \Theta, \rho \rangle$ — метрическое пространство. **б)** Докажите, что пространство $\mathbf{\Theta}$ компактно. **в)** Пусть $T \subset \mathrm{Fm}$ — конечное множество пропозициональных формул. Докажите, что множество $\{\alpha \mid \alpha \vDash T\}$ открыто и замкнуто в $\mathbf{\Theta}$. **г)** *Теорема о компактности для логики высказываний.* Пусть теория T такова, что любое её конечное подмножество выполнимо. Докажите, что тогда вся теория T также выполнима.

Логика первого порядка: определимость

5. Выразите отношение $y = x + 1$ в естественной интерпретации сигнатуры $(=, <)$ на множестве $\mathbb{Z}$.

6. На множестве $\mathcal{P}(A)$ всех подмножеств данного множества A задано двухместное отношение $\subseteq$ («быть подмножеством»). Докажите, что следующие отношения определимы в структуре $\langle \mathcal{P}(A), \subseteq \rangle$: 1) $x = y$ (равенства как предикатного символа в сигнатуре нет!); 2) $x = \varnothing$; 3) $x = A$; 4) $x = y \cap z$; 5) $x = y \cup z$; 6) $x = A \setminus y$.

7. Выясните, определимы ли следующие отношения: 1) $x = y + 1$ в структуре $\langle \mathbb{Z}, d, = \rangle$, где $d(x) = x + 2$; 2) $x \equiv 1 \pmod 3$ в структуре $\langle \mathbb{Z}, +, = \rangle$; 3) $x = y^2$ в структуре $\langle \mathbb{Q}, +, < \rangle$; 4) «$x$ — простое число» в структуре $\langle \mathbb{N}, \cdot, = \rangle$.

8*. Придумайте интерпретацию сигнатуры с тремя одноместными предикатами, в которой каждый предикат выражается через два других, но ни один не выражается через другой.

9*. Рассмотрим естественную интерпретацию сигнатуры $(=, +, 0, 1)$ на множестве $\mathbb{R}$. При каких (фиксированных) значениях $\xi \in \mathbb{R}$ предикат «$x = \xi$» выразим формулой?

10*. Выразим ли предикат «$x = 3$» в множестве $\mathbb{N}$ с предикатами равенства и **а)** «y кратно z»? **б)** «$xy = z$»?