Логика 1-го порядка. Теории и модели

1. Какие из следующих формул общезначимы:

$$\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x));$$

$$\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x\, P(x)) \vee (\exists x\, Q(x));$$

$$\exists y\,\forall x\, P(x,y,y) \to \forall x\,\exists y\,\forall z\, P(x,y,z)\,?$$

2. Вынесите все кванторы наружу в следующих формулах:

$$\neg\forall x\,\forall y P(x,y) \vee \forall x\,\exists y\, Q(x,y);$$

$$\forall x\,\exists y\, P(x,y) \to \exists x\,\forall y\, Q(x,y).$$

3. Докажите, что следующая формула истинна при стандартной интерпретации на множестве $\mathbb{N}$:

$$\forall x\,\exists z\,\forall y\,\exists u\,((y > z \to y > u) \wedge (u < z) \wedge \neg(u < x)).$$

4. Докажите, что следующая формула может быть истинна только в бесконечной интерпретации:

$$\forall x\,\exists y\, Q(x,y) \wedge \forall x\,\forall y\,\forall z\big(\neg Q(x,x) \wedge (Q(x,y) \to (Q(y,z) \to Q(x,z)))\big).$$

Моделью теории (формулы) называется интерпретация, в которой эта теория (формула) истинна.
Теория (формула) называется *выполнимой,* если у неё есть хотя бы одна модель.

5*. Рассмотрим конечную сигнатуру без констант и функциональных символов, все предикатные символы которой одноместны. Существует ли в этой сигнатуре выполнимая теория (множество замкнутых формул), не имеющая конечных моделей.

6*. Постройте формулу 1-го порядка *без равенства,* имеющую 8-элементную модель, но не имеющую 7-элементной.

7*. Докажите, что следующая формула истинна в любой интерпретации с трёхэлементным носителем:

$$\forall x\, R(x,x) \wedge \forall x\,\forall y\,\forall z\,\big(R(x,z) \to (R(x,y) \vee R(y,z))\big) \to \exists u\,\forall v\, R(u,v).$$

8. а) Докажите, что если сигнатура конечна или счётна, то любая теория в этой сигнатуре может иметь не больше, чем континуум попарно неизоморфных счётных моделей. **б)*** Постройте (в подходящей сигнатуре) теорию, имеющую континуум попарно неизоморфных счётных моделей.

Две интерпретации называются *элементарно эквивалентными,* если в них истинны одни и те же замкнутые формулы.

9. Рассмотрим сигнатуру $(=, <)$. Будут ли элементарно эквивалентны её естественные интерпретации **а)** на $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$? **б)** на $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$?

10. Рассмотрим сигнатуру $(+, =)$. Будут ли элементарно эквивалентны её естественные интерпретации **а)** на $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$? **б)*** на $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$? **в)**** на $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$?
(Знак $\oplus$ означает прямую сумму: декартово произведение с покомпонентно определяемым сложением.)

Формула A *семантически следует* из теории T (обозначение: $T \vDash A$), если A истинна в любой модели теории T. Выполнимая теория T называется *полной,* если для любой формулы A либо $T \vDash A$, либо $T \vDash \neg A$.

11. Докажите, что любая полная теория T обладает *дизъюнктивным свойством:* если $T \vDash A \vee B$, то $T \vDash A$ или $T \vDash B$. Существуют ли неполные теории с дизъюнктивным свойством?

12. Докажите, что все модели полной теории элементарно эквивалентны.

Теория называется *категоричной* в мощности $\varkappa$, если все её модели с мощностью носителя $\varkappa$ изоморфны.

13.** Приведите пример теории, не категоричной в счётной мощности, но категоричной в любой бесконечной несчётной мощности.