# Логика 1-го порядка. Выводимость, полнота, компактность

**Исчисление предикатов** в сигнатуре $\Omega$ (обозначается $\mathrm{PC}_\Omega$) задаётся следующими аксиомами и правилами вывода.

I. Схемы аксиом классического исчисления высказываний (только теперь вместо метапеременных $A$, $B$, $C$ можно подставлять любые формулы сигнатуры $\Omega$).

II. Аксиомы с кванторами ($[a := t]$ означает подстановку терма $t$ вместо переменной $a$; при этом $t$ — терм, возможно составной):

1. $\forall x\, A[a := x] \to A[a := t]$, где $x$ не входит в $A$;
2. $A[a := t] \to \exists x\, A[a := x]$, где $x$ не входит в $A$;
3. $\forall x\, (A \to B[a := x]) \to (A \to \forall x\, B[a := x])$, где $x$ не входит в $A$ и $B$ и $a$ не входит в $A$;
4. $\forall x\, (B[a := x] \to A) \to (\exists x\, B[a := x] \to A)$, где $x$ не входит в $A$ и $B$ и $a$ не входит в $A$.

III. Правила вывода:

$$\frac{A \quad A \to B}{B}\ (\mathrm{MP}) \qquad \frac{A}{\forall x\, A[a := x]}\ (\mathrm{Gen}),\ \text{где } x \text{ не входит в } A$$

Напомним, что формула называется *замкнутой,* если все переменные в ней связанные. *Теорией* называется произвольное множество замкнутых формул. Выражение $T \vdash A$ означает „формула $A$ выводима из теории $T$“, т.е. существует вывод $A$ в исчислении предикатов, к которому формулы из $T$ добавлены как аксиомы.

**1.** Докажите *теорему о дедукции:* если $T$ — теория, $A$ — замкнутая формула, $B$ — произвольная формула. Докажите, что $T \cup \{A\} \vdash B$ тогда и только тогда, когда $T \vdash (A \to B)$. Покажите, что условие замкнутости $A$ здесь существенно.

**2.** Выведите в исчислении предикатов (возможно, применяя теорему о дедукции) следующие формулы: **а)** $(\forall x\, (P(x) \to Q(x)) \wedge \exists x\, P(x)) \to \exists x\, Q(x)$; **б)** $\exists x\, P(x) \to \forall x\, P(x)$; **в)** $\exists x\, \forall y\, R(x, y) \to \forall y\, \exists x\, R(x, y)$; **г)*** $\exists x\, (D(x) \to \forall y\, D(y))$.

**3*.** Докажите, что если $T \vdash (A \to B)$, то $T \vdash (\exists x\, A[a := x] \to \exists x\, B[a := x])$.

**4.** Покажите, что условие „$a$ не входит в $A$“ в аксиомах II.3 и II.4 существенно (если его убрать, то в исчислении можно будет вывести формулы, не являющиеся общезначимыми).

Теория $T$ называется *противоречивой,* если для некоторой формулы $A$ одновременно $T \vdash A$ и $T \vdash \neg A$.

**5*.** Пусть теории $T_1$ и $T_2$ в сигнатуре $\Omega$ таковы, что теория $T_1 \cup T_2$ противоречива. Докажите, что существует такая формула $A$ в сигнатуре $\Omega$, что $T_1 \vdash A$ и $T_2 \vdash \neg A$.

**Теорема Гёделя о полноте.** Всякая непротиворечивая теория имеет модель.

**6.** Выведите из теоремы Гёделя о полноте следующие следствия: **а)** формула $A$ выводима в исчислении предикатов (без дополнительных аксиом) тогда и только тогда, когда она общезначима; **б)** $T \vdash A \iff T \vDash A$ (формула выводима из теории тогда и только тогда, когда она истинна во всех моделях этой теории).

**Теорема Гёделя – Мальцева о компактности.** Пусть теория $T$ такова, что всякая её конечная подтеория $T_0 \subset T$ имеет модель. Тогда и вся теория $T$ имеет модель.

**7. а)** Докажите, что не существует системы аксиом, моделями которой были бы в точности все поля всевозможных конечных характеристик $p > 0$. **б)** Постройте систему аксиом, модели которой — в точности все поля нулевой характеристики. **в)** Существует ли конечная система аксиом для полей нулевой характеристики?

**8.** Существует ли **а)** бесконечная; **б)*** конечная система аксиом, модели которой — в точности все алгебраически замкнутые поля?

**9.** Рассмотрим сигнатуру, содержащую только двуместный предикатный символ равенства и двуместный предикатный символ $R$; интерпретации — множества с бинарными отношениями (ориентированные графы). Существует ли формула в этой сигнатуре, выражающее следующее свойство отношения/графа: **а)** симметричность; **б)** рефлексивность; **в)** транзитивность; **г)** существование клики размера 6 (множества из 6 вершин, в котором каждая соединена с каждой в обе стороны); **д)** конечность множества вершин; **е)** «вершин либо чётное число, либо бесконечно много»; **ё)*** ацикличность; **ж)*** связность?

**10*.** *Теорема Эрбрана.* Пусть формула $A$ в сигнатуре $\Omega$ содержит ровно одну свободную переменную, обозначаемую $a$. Докажите, что если формула $\exists x\, A[a := x]$ выводима в $\mathrm{PC}_\Omega$, то существует конечный набор термов $t_1, \ldots, t_n$ той же сигнатуры, что в $\mathrm{PC}_\Omega$ выводима дизъюнкция $A[a := t_1] \vee \ldots \vee A[a := t_n]$.

**11**.** Рассмотрим следующую интерпретацию сигнатуры $(=, d)$ (где $=$ — двуместный предикат равенства, $d$ — одноместный функциональный символ) на множестве $\mathbb{Z}$: $=$ интерпретируется нормальным образом (как совпадение элементов), а $d$ — функцией $\hat{d}\colon w \mapsto w + 2$. Определимо ли в этой интерпретации отношение „$x \equiv y \pmod 2$“ ?

**12**.** Пусть в сигнатуре $\Omega$ существуют две такие теории $T_1$ и $T_2$, что любая интерпретация сигнатуры $\Omega$ является моделью в точности одной из этих двух теорий. Докажите, что существует такая формула $A$, что класс всех моделей формулы $A$ совпадает с классом всех моделей теории $T_1$.