Разрешимость и полнота

Пусть зафиксировано конечное непустое множество Σ — *алфавит.* Через Σ^* обозначим множество всех *слов,* составленных из букв алфавита Σ. Мы будем рассматривать множества $A \subseteq \Sigma^*$ и функции $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$. Если считать, что в Σ есть элементы 0 и 1, то каждому множеству $A \subseteq \Sigma^*$ можно сопоставить *характеристическую функцию,* определяемую следующим образом:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin A, \\ 1, & \text{если } x \in A. \end{cases}$$

Вычислимая функция — это функция, вычисляемая некоторым алгоритмом. Заметим, что вычислимая функция может быть определена не всюду: на некоторых входных данных алгоритм может «зависнуть».

Понятие алгоритма можно формализовывать многими различными способами; оказывается, что все они приводят к одному и тому же классу вычислимых функций. Это утверждение (называемое иногда *тезисом Чёрча)* не может быть полностью доказано как математическая теорема (поскольку квантор «для всех разумных формализаций понятия алгоритма» нематематический), однако для двух конкретных формализаций эквивалентность может быть проверена непосредственно.

Разрешимое множество — это множество, характеристическая функция которого вычислима.

Перечислимое множество — это множество значений некоторой вычислимой функции. (Есть также другие эквивалентные определения перечислимого множества.)

Существует вычислимая частичная функция, у которой нет всюду определённого вычислимого продолжения (этим фактом можно пользоваться без доказательства). Область определения этой функции — **перечислимое, но не разрешимое множество.**

1. Докажите, что функция f вычислима тогда и только тогда, когда её *график* (множество $\Gamma_f = \{\langle x, f(x)\rangle \mid x \in D(f)\}$) перечислим.

2. а) Докажите, что существуют непересекающиеся перечислимые множества $X, Y \subseteq \mathbb{N}$, которые не отделяются никаким разрешимым множеством (т. е. не существует такого разрешимого $Z \subseteq \mathbb{N}$, что $X \subseteq Z$ и $Y \cap Z = \varnothing$).
б)*Докажите, что существует счётное семейство непересекающихся неотделимых перечислимых множеств $X_1, X_2, \dots$ — т.е. таких, что не найдётся таких разрешимых множеств $Z_1, Z_2, \dots$, что $X_i \in Z_i$ и $Z_i \cap Z_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

3. Пусть функция $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ всюду определена, вычислима и обладает следующим свойством: для любого $x \in \Sigma^*$ длина $f(x)$ не меньше длины x. Докажите, что область значений f — разрешимое множество.

4*. Докажите, что всякое бесконечное перечислимое множество содержит бесконечное разрешимое подмножество.

5*. Множество $F \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ таково, что для любого $x \in \Sigma^*$ множества $F_x^{(1)} = \{m \mid \langle n, m\rangle \in F\}$ и $F_x^{(2)} = \{m \mid \langle m, n\rangle \in F\}$ разрешимы. Всегда ли разрешимо само множество F?

Формулы логики предикатов (в конечной сигнатуре) также являются словами в некотором подходящем алфавите. Значит, применительно к множествам формул (теориям 1-го порядка) также можно говорить о разрешимости и перечислимости. Отметим важную терминологическую тонкость: теория T называется *разрешимой,* если разрешимо, как множество слов, множество *теорем* теории T, т.е. множество $[T] = \{\varphi \mid T \vdash \varphi\}$; аналогично определяется понятие *перечислимой* теории.

Теория T называется *разрешимо аксиоматизируемой,* если существует разрешимое множество формул T', такое что $[T'] = [T]$ (при этом исходная аксиоматизация, T, могла быть неразрешимым множеством). Аналогично определяется понятие перечислимо аксиоматизируемой теории.

6. а) Докажите, что всякая перечислимо аксиоматизируемая теория перечислима.

б) Докажите, что для всякой теории $T = \{\psi_1, \psi_2, \dots\}$ существует эквивалентная ей теория $T' = \{\psi_1', \psi_2', \dots\}$, такая что длина формулы ψ_n' (как слова в подходящем алфавите) больше n.

в)* *Трюк Крейга.* Докажите, что всякая перечислимая теория разрешимо аксиоматизируема.

7*. Некоторое множество S натуральных чисел разрешимо (натуральное число n можно кодировать, например, унарной записью: $\underbrace{aa\dots a}_{n}$). Разложим все числа из S на простые множители и составим множество D из всех простых чисел, встречающихся в этих разложениях. Можно ли утверждать, что множество D разрешимо?

8*. Пусть $\mathcal{D} \subset \mathbb{N}$ — перечислимое, но не разрешимое множество натуральных чисел. Рассмотрим сигнатуру $\Omega = (0, S, D, =)$, где 0 — константа, S — одноместный функциональный символ, D — одноместный предикатный символ, $=$ — символ равенства. Пусть $T = \{D(\underbrace{S(S \ldots S}_{k \text{ раз}}(0) \ldots)) \mid k \in \mathcal{D}\}$. Докажите, что теория T разрешимо аксиоматизируема, но не разрешима.

Таким образом, классы перечислимых теорий, перечислимо аксиоматизируемых теорий и разрешимо аксиоматизируемых теорий совпадают, и строго содержат класс разрешимых теорий. С другой стороны, если теория полна и перечислима, то она разрешима (теорема Поста). Примером такой теории является DLO — теория плотных линейных порядков, не имеющих наименьшего и наибольшего элементов. Эта теория категорична в счётной мощности, не имеет конечных моделей и, следовательно, полна по теореме Лося – Воота. С другой стороны, она задаётся конечным множеством аксиом и потому перечислима. Значит, по теореме Поста DLO разрешима.

9. Рассмотрим сигнатуру, состоящую из одного двухместного предикатного символа равенства $(=)$, и пусть $\xi_k = \forall x_1 \ldots \forall x_k \, \exists y (y \neq x_1 \wedge \ldots \wedge y \neq x_k)$. Разрешима ли теория $T = \{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$?

10. Рассмотрим (в сигнатуре $(<, =)$) теорию $T_{[-)}$ всех строгих плотных линейных порядков, имеющих наименьший элемент, но не имеющих наибольшего. Является ли эта теория **а)** полной; **б)** разрешимой?

11*. Рассмотрим (в сигнатуре $(<, =)$) теорию $T_{[-]}$ всех строгих плотных линейных порядков, имеющих наименьший и наибольший элементы. Является ли эта теория **а)** полной; **б)** разрешимой?

12*. Рассмотрим счётную сигнатуру $(<, c_0, c_1, c_2, \ldots)$, где $<$ — двуместный предикатный символ, c_i — константные символы, и пусть теория T_3 задаётся аксиомами DLO (теория плотных неограниченных линейных порядков) и дополнительными аксиомами $c_0 < c_1$, $c_1 < c_2$, $c_2 < c_3$, $\ldots$. **а)** Докажите, что теория T_3 имеет ровно три неизоморфные счётные модели. **б)** Полна ли теория T_3?