Арифметика

Сигнатурой формальной арифметики будем считать $(0, S, +, \cdot, =)$. Для натурального числа n через $\underline{n}$ обозначим терм $\underbrace{S(S(\ldots(S}_{n \text{ раз}}(0))\ldots))$ — *нумерал,* соответствующий n.

Мы считаем, что выбрана гёделева нумерация формул и их последовательностей в формальной арифметике; гёделев номер формулы φ обозначим через $\ulcorner\varphi\urcorner$. Буквой T (возможно, с индексами) далее будет обозначаться разрешимо аксиоматизируемая арифметическая теория, содержащая арифметику Пеано PA (естественным примером такой теории является сама PA). Для теории T можно построить формулу Prf_T с двумя параметрами x и y, кодирующую *свойство быть доказательством* в T:

- если $n = \ulcorner\varphi\urcorner$ и m — гёделев номер доказательства φ в T, то $\mathsf{PA} \vdash \mathrm{Prf}_T(\underline{n}, \underline{m})$;
- в противном случае (если, например, x или y не является корректным гёделевым номером, или m кодирует последовательность формул, не являющуюся доказательством формулы с гёделевым номером n), то $\mathsf{PA} \vdash \neg\mathrm{Prf}_T(\underline{n}, \underline{m})$.

Далее, по определению $\mathrm{Pr}_T(x) = \exists y\, \mathrm{Prf}_T(x, y)$ и $\mathrm{Con}_T = \neg\mathrm{Pr}_T(\ulcorner\bot\urcorner)$. Неформально, Pr_T кодирует *доказуемость* в T формулы с данным гёделевым номером, а Con_T — *непротиворечивость* теории T.

1. Докажите, что Con_T истинна в стандартной модели арифметики ($\mathbb{N} \vDash \mathrm{Con}_T$) тогда и только тогда, когда теория T непротиворечива.

Вторая теорема Гёделя о неполноте. Если разрешимо аксиоматизируемая арифметическая теория T, содержащая PA, доказывает свою собственную непротиворечивость, то она противоречива ($T \vdash \mathrm{Con}_T \Rightarrow \mathbb{N} \vDash \neg\mathrm{Con}_T$).

2. Докажите, что арифметика Пеано PA неполна (1-я теорема Гёделя о неполноте).

3. а) Существует ли формула вида $\varphi \vee \psi$, такая что $\mathsf{PA} \vdash \varphi \vee \psi$, но при этом $\mathsf{PA} \nvdash \varphi$ и $\mathsf{PA} \nvdash \psi$?
б)* Существует ли формула вида $\exists x\, \varphi(x)$, такая что $\mathsf{PA} \vdash \exists x\, \varphi(x)$, но при этом $\mathsf{PA} \nvdash \varphi(\underline{n})$ для любого натурального числа n?
в)* Существует ли формула вида $\forall x\, \psi(x)$, такая что $\mathsf{PA} \vdash \psi(\underline{n})$ для любого n, но при этом $\mathsf{PA} \nvdash \forall x\, \psi(x)$?

4*. Существует ли арифметическая формула τ с одним параметром x, что $\mathsf{PA} \vdash \tau(\ulcorner\varphi\urcorner) \iff \mathbb{N} \vDash \varphi$?

5*. Арифметическая теория T „доказывает собственную противоречивость“: $T \vdash \neg\mathrm{Con}_T$. Следует ли отсюда, что она противоречива?

Модальная логика

Модальные формулы строятся из счётного числа переменных ($\mathrm{Var} = \{p, q, r, \ldots\}$) при помощи классических связок $(\wedge, \vee, \to, \neg)$ и дополнительной одноместной связки $\Box$. Связка $\Diamond$ определяется как сокращённая запись комбинации $\neg\Box\neg$. *Шкала Крипке* есть ориентированный граф $\langle W, R\rangle$, где W — непустое множество (его элементы называются *«мирами»*), а $R \subseteq W \times W$ — произвольное бинарное отношение на W, называемое *отношением достижимости.* Утверждение $\langle x, y\rangle \in R$ мы будем записывать как xRy и иногда произносить как «мир x видит мир y». *Интерпретацией (оценкой)* переменных в данной шкале Крипке называется функция $\theta\colon W \times \mathrm{Var} \to \{0, 1\}$ (в каждом мире истинность переменных определяется независимо). Истинность сложных формул в данном мире определяется индукцией по их построению. Случай классических связок разбирается по таблицам истинности. Формула $\Box A$ истинна в мире u тогда и только тогда, когда во всех видимых из мира u мирах истинна формула v ($u \Vdash \Box A \iff (\forall v)\,(uRv \Rightarrow v \Vdash A)$). Из определений сразу получается, что $u \Vdash \Diamond A \iff (\exists v)\,(uRv$ и $v \Vdash A)$. Формула A называется *общезначимой* в шкале $\langle W, R\rangle$, если она истинна во всех мирах при всех возможных оценках переменных.

6. Рассмотрим шкалу Крипке $\langle \mathbb{Z}, <\rangle$ («миры» — целые числа, мир n «видит» мир m в точности тогда, когда $n < m$). Пусть в мире n истинна переменная p тогда и только тогда, когда n чётно; в мире n истинна переменная q тогда и только тогда, когда $n > 0$. В каких мирах верны формулы: **а)** $\Diamond\Box q \wedge \Box\Diamond p$; **б)** $\Diamond(p \wedge \neg q) \vee q$? **в)*** Постройте формулу, истинную во всех мирах, кроме -1.

7. Общезначима ли формула $\Box(\Box p \to p) \to (\Diamond\Box p \to \Box p)$ в шкале **а)** $\langle \mathbb{N}, <\rangle$; **б)** $\langle \mathbb{Z}, <\rangle$; **в)** $\langle \mathbb{Q}, <\rangle$?

8*. Для каждой из следующих формул опишите класс шкал Крипке, в которых эта формула общезначима: **а)** $\Box p$; **б)** $\Diamond(p \vee \neg p)$; **в)** $\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$; **г)** $\Diamond\Box p \to p$; **д)** $\Box p \to \Diamond p$; **е)** $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$.

9. Напишите модальную формулу, общезначимую в точности в тех шкалах Крипке, в которых **а)** из каждого мира достижимы не более n миров; **б)** длина максимального пути не больше n.

10*. Существует ли *конечная* шкала Крипке, в которой общезначимы в точности все формулы, общезначимые во всех шкалах Крипке?