Задачи к спецкурсу «Математическая логика»

(весна 2016)

1. Постройте формулу в языке первого порядка *без равенства,* имеющую 3-элементную модель и не имеющую 2-элементной.

2. Рассмотрим сигнатуру, содержащую только двуместный предикатный символ равенства и двуместный предикатный символ R, интерпретации — множества с бинарными отношениями (ориентированные графы). Можно ли выразить формулами 1-го порядка следующие свойства отношения/графа: **а)** симметричность; **б)** рефлексивность; **в)** транзитивность; **г)** существование клики размера 6 (множества из 6 вершин, в котором каждая соединена с каждой стрелками в обе стороны); **д)** конечность множества вершин; **е)** «вершин либо чётное число, либо бесконечно много»; **ё)** ацикличность; **ж)** связность?

3. Существует ли теория первого порядка в сигнатуре $(+, \cdot, =, 0, 1)$, моделями которой являются **а)** в точности все конечные поля? **б)** в точности все поля ненулевой характеристики?

4. *Теорема о компактности для логики высказываний: топологическое доказательство.*

Интерпретацией логики высказываний называется отображение $\alpha\colon \{p_1, p_2, p_3, \dots\} \to \{0, 1\}$, где p_1, p_2, p_3, … — пропозициональные переменные. Отображение α естественным образом распространяется на все формулы логики высказываний. Формула A *истинна при интерпретации* α (пишем $\alpha \vDash A$), если $\alpha(A) = 1$.

Пусть T — множество формул логики высказываний *(пропозициональная теория).* Теория T истинна при интерпретации α ($\alpha \vDash T$), если $\alpha \vDash A$ для всех $A \in T$.

Теория T *выполнима,* если она истинна хотя бы при одной интерпретации.

Пусть Θ — множество всех интерпретаций. Определим на нём структуру метрического пространства следующим образом: если $\alpha, \beta \in \Theta$, причём $\alpha(p_i) = \beta(p_i)$ для всех $i < n$, а $\alpha(p_n) \neq \beta(p_n)$, то $\rho(\alpha, \beta) = 2^{-n}$ (а если $\alpha(p_i) = \beta(p_i)$ для всех i, то $\alpha = \beta$ и $\rho(\alpha, \beta) = 0$).

а) Докажите, что $\boldsymbol{\Theta} = \langle \Theta, \rho \rangle$ — метрическое пространство.

б) Докажите, что пространство $\boldsymbol{\Theta}$ компактно.

в) Пусть $T \subset \mathrm{Fm}$ — конечное множество пропозициональных формул. Докажите, что множество $\{\alpha \mid \alpha \vDash T\}$ открыто и замкнуто в $\boldsymbol{\Theta}$.

г) Выведите из предыдущих пунктов теорему о компактности для логики высказываний: если теория T такова, что любое её конечное подмножество выполнимо, то и вся теория T также выполнима.

5. Пусть теории T_1 и T_2 в одной и той же сигнатуре таковы, что $T_1 \cup T_2$ не имеет моделей. Докажите, что существует такая формула A, что $T_1 \vdash A$ и $T_2 \vdash \neg A$.

6. а) Докажите, что полная теория обладает *дизъюнктивным свойством:* если $T \vDash B \vee C$, то $T \vDash B$ или $T \vDash C$. **б)** Существуют ли неполные теории, обладающие дизъюнктивным свойством?

7. Рассмотрим сигнатуру, состоящую из одного символа $=$ (равенство), и пусть $E_k = \forall x_1 \dots \forall x_k \exists y$ $(y \neq x_1 \wedge \ldots \wedge y \neq x_k)$. Является ли теория $T = \{E_1, E_2, E_3, \dots\}$ полной?

8. Рассмотрим счётную сигнатуру $(<, c_0, c_1, c_2, \dots)$, где $<$ — двуместный предикатный символ, c_i — константные символы, и пусть теория T_3 задаётся аксиомами DLO (теория плотных неограниченных линейных порядков) и дополнительными аксиомами $c_0 < c_1$, $c_1 < c_2$, $c_2 < c_3$, …

а) Докажите, что теория T_3 имеет ровно три неизоморфные счётные модели.

б) Полна ли теория T_3?

* * *

9. Верно ли, что теория $\mathrm{Th}(\mathbb{Z}, \mathrm{S}, 0, =)$ категорична в мощности континуум? ($\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ — *элементарная теория* интерпретации $\mathcal{M}$, состоящая из всех формул данной сигнатуры, истинных в $\mathcal{M}$.)

10. Пусть $\mathcal{M}$ — конечная нормальная интерпретация конечной сигнатуры Ω. Докажите, что $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ **а)** задаётся конечным набором аксиом; **б)** *сильно категорична,* т.е. все её модели изоморфны $\mathcal{M}$.

11. Существует ли теория, имеющая в каждой бесконечной мощности модель, причём единственную с точностью до изоморфизма?

12. Существует ли конечная аксиоматизация **а)** теории $\mathrm{Th}(\mathbb{Z}, \mathrm{S}, 0, =)$? **б)** теории алгебраически замкнутых полей характеристики 0?

13. Покажите, что в теореме Эрбрана существенно, что ψ бескванторна.

Формулировка теоремы Эрбрана: если для некоторой бескванторной формулы $\psi(x, y_1, \dots, y_n)$ общезначима формула $\exists x\, \psi$, то существует конечный набор термов $t_1, \dots, t_k$ от переменных $y_1, \dots, y_n$, для которого общезначима дизъюнкция $\psi(t_1, y_1, \dots, y_n) \vee \dots \vee \psi(t_k, y_1, \dots, y_n)$.

14. Докажите теорему об устранении кванторов для теории плотных линейных порядков без наибольшего и наименьшего элементов (DLO).

15. Докажите, что в $(\mathbb{Z}, <, =)$ теорема об устранении кванторов не имеет места, а именно, отношение „$y = S(x)$“ выражается формулой с квантором, но не бескванторной формулой.

16. Постройте бескванторную формулу (от переменных p и q), эквивалентную формуле $\exists x\,(x^3 + p\cdot x + q = 0 \;\wedge\; x^2 + q\cdot x + p = 0)$ в теории алгебраически замкнутых полей характеристики 0 (x^3 — сокращение для $x\cdot x\cdot x$; x^2 — для $x\cdot x$).

17. Задайте бескванторной формулой множество всех пар комплексных чисел $\langle p, q\rangle$, при которых многочлен **а)** $z^2 + pz + q$; **б)** $z^3 + pz + q$ имеет кратный корень.

* * *

В следующих задачах PA — арифметика Пеано.

18. Приведите пример такой арифметической формулы $\varphi(x)$, что для любого конкретного натурального числа n формула $\varphi(\bar{n})$ выводима в PA, но при этом PA $\nvdash \forall x\,\varphi(x)$ (через $\bar{n}$ обозначается замкнутый арифметический терм $\underbrace{\mathrm{S}\ldots\mathrm{S}}_{n}0$).

19. Существует ли такая непротиворечивая арифметическая теория $T \supseteq$ PA, что $T \vdash \neg\mathrm{Con}(T)$ (т.е. непротиворечивая теория, которая доказывает свою собственную противоречивость)?

20. Докажите, что существует такая всюду определённая вычислимая функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что PA $\nvdash \forall x \exists y\,\varphi(x, y)$, где $\varphi(x, y)$ — Σ_1-формула, задающая график функции f (отношение “$f(x) = y$”) в арифметике.

* * *

21. Докажите, что интуиционистское исчисление высказываний Int обладает *дизъюнктивным свойством:* если $\mathrm{Int} \vdash (A \vee B)$, то $\mathrm{Int} \vdash A$ или $\mathrm{Int} \vdash B$. Верно ли это свойство для классической логики высказываний?

22. Выводима ли в Int формула **а)** $p \to \neg\neg p$? **б)** $\neg\neg\neg p \to \neg p$? **в)** $p \to ((p \to q) \to q)$? **г)** $((p \to q) \to p) \to p$?

23. **а)** Выводима ли формула $(p \to q) \vee (q \to p)$ в Int? **б)** Верно ли, что если добавить к Int схему аксиом $(A \to B) \vee (B \to A)$, то получится классическая логика высказываний?