Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

УДК 519.766

С. Л. Кузнецов

Исчисление Ламбека с операцией обращения

Автор _____ С. Л. Кузнецов

Москва, 2012

Депонированная научная работа

УДК 519.766

Исчисление Ламбека с операцией обращения / Кузнецов С. Л.; МГУ. — М., 2012. — 17 с. — Библиогр.: 9 назв. — Рус. — Деп. в ВИНИТИ

Содержание

1 Исчисление L и его фрагменты

Определим *исчисление Ламбека* L, впервые введённое в [5]. Счётное множество $\mathrm{Pr} \leftrightharpoons \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ называется множеством *примитивных типов* (здесь и далее значок «$\leftrightharpoons$» означает «равно по определению»). *Типы* исчисления Ламбека образуются из примитивных с помощью двуместных связок $\setminus$ (левое деление), $/$ (правое деление) и $\cdot$ (умножение); их множество обозначается Tp. Формально множество Tp определяется индуктивно как наименьшее в смысле включения множество, удовлетворяющее следующим двум условиям:

1. $\mathrm{Pr} \subset \mathrm{Tp}$;
2. если $A, B \in \mathrm{Tp}$, то $(A \setminus B), (B / A), (A \cdot B) \in \mathrm{Tp}$.

Типы обозначаются большими латинскими буквами, их конечные (возможно пустые) последовательности — заглавными греческими; пустая последовательность обозначается буквой Λ. Выводимыми объектами в исчислении Ламбека являются *секвенции* — выражения вида $\Pi \to C$; Π называется *антецедентом*, а C — *сукцедентом* секвенции.

Исчисление L задаётся аксиомами вида $p_i \to p_i$ (обозначение: (акс.)) и правилами вывода

$$\frac{A\,\Pi \to B}{\Pi \to A \setminus B}\ (\to \setminus), \text{ где } \Pi \neq \Lambda; \qquad \frac{\Pi \to A \quad \Gamma\,B\,\Delta \to C}{\Gamma\,\Pi\,(A \setminus B)\,\Delta \to C}\ (\setminus \to);$$

$$\frac{\Pi\,A \to B}{\Pi \to B / A}\ (\to /), \text{ где } \Pi \neq \Lambda; \qquad \frac{\Pi \to A \quad \Gamma\,B\,\Delta \to C}{\Gamma\,(B / A)\,\Pi\,\Delta \to C}\ (/ \to);$$

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Delta \to B}{\Gamma\,\Delta \to A \cdot B}\ (\to \cdot); \qquad \frac{\Gamma\,A\,B\,\Delta \to C}{\Gamma\,(A \cdot B)\,\Delta \to C}\ (\cdot \to);$$

$$\frac{\Pi \to A \quad \Gamma\,A\,\Delta \to C}{\Gamma\,\Pi\,\Delta \to C}\ (\mathrm{cut}).$$

Легко видеть, что секвенции с пустыми антецедентами в L выводиться не могут.

Правило (cut), называемое *правилом сечения,* устранимо:

Теорема 1 (И. Ламбек, 1958)**.** *Если секвенция выводима в* L*, то она выводима без применения правила* (cut). [5]

Обозначим через $\mathrm{Tp}(\setminus)$ множество типов, не содержащих ни $\cdot$, ни $/$. Исчисление, заданное аксиомами (акс.) и правилами $(\setminus \to)$ и $(\to \setminus)$, обозначается $\mathrm{L}(\setminus)$. Вместо $\setminus$

можно рассматривать другое деление $/$, при этом получится полностью симметричная теория; мы будем везде рассматривать левое деление $\backslash$. Аналогичным образом определяются исчисления $\mathrm{L}(\cdot, \backslash)$ и $\mathrm{L}(\backslash, /)$.

Метапеременная $\mathscr{L}$ будет обозначать один из вариантов исчисления Ламбека: L, $\mathrm{L}(\backslash)$, $\mathrm{L}(\cdot, \backslash)$, $\mathrm{L}(\backslash, /)$, а также исчисление L^{R}, которое мы определим позже. обозначать множество типов, соответствующее исчислению $\mathscr{L}$ (Tp для L и L^*, $\mathrm{Tp}(\backslash)$ для $\mathrm{L}(\backslash)$ и т. д.).

Определение. Исчисление $\mathscr{L}_1$ называется *фрагментом* исчисления $\mathscr{L}_2$ (соответственно, $\mathscr{L}_2$ называется *расширением* $\mathscr{L}_1$), если $\mathrm{Tp}_{\mathscr{L}_1} \subseteq \mathrm{Tp}_{\mathscr{L}_2}$ и всякая секвенция, выводимая в $\mathscr{L}_1$, выводима в $\mathscr{L}_2$. Фрагмент (соответственно, расширение) называется *консервативным,* если, кроме того, для секвенций, составленных исключительно из типов из множества $\mathrm{Tp}_{\mathscr{L}_1}$, выводимость в $\mathscr{L}_1$ равносильна выводимости в $\mathscr{L}_2$.

Из теоремы 1 следует, например, что исчисление $\mathrm{L}(\backslash)$ является консервативным фрагментом исчисления L.

2 Категориальные грамматики Ламбека

Алфавитом называется произвольное непустое конечное множество. Множество всех конечных последовательностей (включая пустую), составленных из элементов алфавита Σ *(слов над алфавитом* Σ*)* обозначается Σ^*. Пустое слово обозначается через ε. Множество всех слов, кроме пустого, обозначается Σ^+. Подмножества Σ^* называются *формальными языками* (или просто *языками*) над алфавитом Σ.

Для конечного описания формальных языков (как правило бесконечных как множества) используются формальные грамматики различных видов. Исчисление Ламбека и его варианты служат основой для *категориальных грамматик Ламбека.*

Определение. *Грамматикой, основанной на исчислении* $\mathscr{L}$*, (*$\mathscr{L}$*-грамматикой)* называется тройка $\mathcal{G} = \langle \Sigma, H, \rhd \rangle$, где Σ — некоторое непустое конечное множество (алфавит), $H \in \mathrm{Tp}_{\mathscr{L}}$, а $\rhd \subset \mathrm{Tp}_{\mathscr{L}} \times \Sigma$ — произвольное конечное бинарное соответствие. Язык, порождаемый грамматикой $\mathcal{G}$, есть $Я(\mathcal{G}) \rightleftharpoons \{a_1 \dots a_k \in \Sigma^* \mid \exists B_1, \dots, B_k \colon B_i \rhd a_i$ и $\mathscr{L} \vdash B_1 \dots B_k \to H\}$. Такие языки называются $\mathscr{L}$*-языками.*

Предложение 1. *Если исчисление* $\mathscr{L}$ *является консервативным фрагментом исчисления* $\mathscr{L}'$*, то любой* $\mathscr{L}$*-язык является* $\mathscr{L}'$*-языком.*

Доказательство. Всякую $\mathscr{L}$-грамматику можно рассмотреть как $\mathscr{L}'$-грамматику. Из-за консервативности язык при этом не изменится. □

И наоборот, если в $\mathscr{L}'$-грамматике встречаются только типы из $\mathrm{Tp}_{\mathscr{L}}$, то эту грамматику можно рассмотреть как $\mathscr{L}$-грамматику, задающую тот же язык.

Наряду с категориальными грамматиками, основанными на исчислении Ламбека и его вариантах, широко известно также семейство формализмов, называемое *иерархией Хомского* [4]. Мы будем рассматривать грамматики Хомского типа 2, называемые также контекстно-свободными грамматиками.

Определение. *Контекстно-свободной грамматикой* называется четвёрка

$$G = \langle N, \Sigma, P, S \rangle,$$

где N и Σ — непересекающиеся алфавиты (элементы N и Σ называются, соответственно, *нетерминальными* и *терминальными* символами), P — конечное подмножество декартова произведения $N \times (N \cup \Sigma)^*$ и $S \in N$. Пары $\langle A, \alpha \rangle \in P$ называются *правилами (продукциями)* грамматики G и записываются так: $A \to \alpha$. Пусть $\varphi, \psi \in (N \cup \Sigma)^*$. Слово ψ *непосредственно выводимо* из φ в грамматике G (обозначение: $\varphi \Rightarrow_G \psi$), если найдутся такие $\alpha, \gamma, \delta \in (N \cup \Sigma)^*$ и $A \in N$, что $\varphi = \gamma A \delta$, $\psi = \gamma \alpha \delta$ и $(A \to \alpha) \in P$. Бинарное отношение $\Rightarrow_G^*$ есть рефлексивно-транзитивное замыкание отношения $\Rightarrow_G$. Если $\varphi \Rightarrow_G^* \psi$, говорят, что ψ *выводимо* из φ в грамматике G. Язык, порождаемый грамматикой G, есть множество всех слов, составленных только из нетерминальных символов и выводимых в грамматике G из однобуквенного слова S: $\text{Я}(G) \leftrightharpoons \{w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow_G^* w\}$. Такие языки называются *контекстно-свободными.*

Интересен вопрос о взаимном включении классов языков, задаваемых, с одной стороны, контекстно-свободными грамматиками, и, с другой стороны, $\mathscr{L}$-грамматиками для различных исчислений $\mathscr{L}$. Для $\mathscr{L} = \mathrm{L}$ и $\mathscr{L} = \mathrm{L}(\backslash)$ ответ на этот вопрос дают следующие теоремы:

Теорема 2 (Х. Гайфман, 1960; В. Бушковский, 1985)**.** *Всякий контекстно-свободный язык, не содержащий пустого слова, является* $\mathrm{L}(\backslash)$*-языком.* [1][3]

Теорема 3 (М. Р. Пентус, 1993)**.** *Всякий* L*-язык контекстно-свободен и не содержит пустого слова.* [8]

В силу предложения 1 получаем, что классы L-языков, $\mathrm{L}(\backslash)$-языков и контекстно-свободных языков без пустого слова совпадают.

3 L-модели для исчисления L

В этом и следующих трёх разделах алфавит Σ считается произвольным непустым конечным *или счётным* множеством. Три связки исчисления L соответствуют трём операциям над языками без пустого слова ($M, N \subseteq \Sigma^+$): $M \cdot N \rightleftharpoons \{uv \mid u \in M, v \in N\}$, $M \setminus N \rightleftharpoons \{u \in \Sigma^+ \mid (\forall v \in M)\, vu \in N\}$, $N \setminus M \rightleftharpoons \{u \in \Sigma^+ \mid (\forall v \in M)\, uv \in N\}$.

Определение. L-моделью называется пара $\mathcal{M} = \langle \Sigma, w \rangle$, где Σ — алфавит, а w — отображение типов исчисления Ламбека в формальные языки над Σ, не содержащие пустого слова, причём для любых $A, B \in \mathrm{Tp}$ выполняются соотношения $w(A \cdot B) = w(A) \cdot w(B)$, $w(A \setminus B) = w(A) \setminus w(B)$ и $w(B \,/\, A) = w(B) \,/\, w(A)$. Отображение w называется *интерпретацией* типов языками над Σ.

Отображение w определяется произвольным образом на примитивных типах, а на остальные типы распространяется единственным образом.

Поскольку множество Σ^+ с операцией приписывания слов является свободной полугруппой, порождённой алфавитом Σ, L-модели также называются *моделями на подмножествах свободных полугрупп.*

Определение. Секвенция вида $F \to G$ считается *истинной* в модели $\mathcal{M} = \langle \Sigma, w \rangle$ (обозначение: $\mathcal{M} \vDash F \to G$), если $w(F) \subseteq w(G)$.

Исчисление L корректно и полно относительно класса L-моделей (далее мы кратко будем называть это свойство «L-полнотой»):

Теорема 4 (М. Р. Пентус, 1995)**.** *Секвенция $F \to G$ выводима в* L *тогда и только тогда, когда она истинна во всех L-моделях.*

Эта теорема доказана в [9]; доказательство для частного случая — исчисления Ламбека без операции умножения — гораздо проще и приведено в [2].

Заметим, что, хотя теорема 4 сформулирована только для секвенций вида $F \to G$ (с одним типом в антецеденте), её легко обобщить на случай секвенции произвольного вида, потому что секвенция $F_1 F_2 \ldots F_n \to G$ выводима в исчислении Ламбека тогда и только тогда, когда выводима секвенция $F_1 \cdot F_2 \cdot \ldots \cdot F_n \to G$ (в силу ассоциативности операции умножения расстановка скобок в левой части не имеет значения) Определение интерпретации также естественно распространяется на последовательности типов: $\bar{w}(F_1 F_2 \ldots F_n) \rightleftharpoons w(F_1) \cdot w(F_2) \cdot \ldots \cdot w(F_n)$, и окончательно получаем, что $\mathrm{L} \vdash \Pi \to G$, если и только если для любой модели $\mathcal{M} = \langle \Sigma, w \rangle$ имеем $\mathcal{M} \vDash \Pi \to C$, т. е. $\bar{w}(\Pi) \subseteq w(G)$. В силу этого соображения достаточно рассматривать только секвенции вида $F \to G$.

4 Исчисление L^{R}

Рассмотрим ещё одну операцию над формальными языками — *обращение* языка. Для $u = a_1 a_2 \dots a_n$ ($a_1, \dots, a_n \in \Sigma$, $n \geqslant 1$) положим $u^{\mathrm{R}} \leftrightharpoons a_n \dots a_2 a_1$; для $M \subseteq \Sigma^+$ положим $M^{\mathrm{R}} \leftrightharpoons \{u^{\mathrm{R}} \mid u \in M\}$. Добавим к языку исчисления Ламбека новую одноместную связку ${}^{\mathrm{R}}$ (записывается в постфиксной форме: A^{R}); новое множество типов обозначим через Tp^{R}. Если $\Gamma = A_1 A_2 \dots A_n$, положим $\Gamma^{\mathrm{R}} \leftrightharpoons A_n^{\mathrm{R}} \dots A_2^{\mathrm{R}} A_1^{\mathrm{R}}$.

Понятие L-модели обобщается естественным образом — добавлением условия $w(A^{\mathrm{R}}) = w(A)^{\mathrm{R}}$ на интерпретацию типов (уже из расширенного множества Tp^{R}).

Исчисление L^{R} получается из исчисления L добавлением трёх новых правил для новой связки ${}^{\mathrm{R}}$:

$$\frac{\Gamma \to C}{\Gamma^{\mathrm{R}} \to C^{\mathrm{R}}}\ ({}^{\mathrm{R}} \to {}^{\mathrm{R}}) \qquad \frac{\Gamma\, A\, \Delta \to C}{\Gamma\, A^{\mathrm{RR}}\, \Delta \to C}\ ({}^{\mathrm{RR}} \to) \qquad \frac{\Gamma \to C}{\Gamma \to C^{\mathrm{RR}}}\ (\to {}^{\mathrm{RR}})$$

Легко видеть, что исчисление L^{R} корректно относительно L-моделей (любая L^{R}-выводимая секвенция истинна во всех моделях).

Предложение 2. *Исчисление* L^{R} *является консервативным расширением исчисления* L.

Доказательство. Очевидно, что L есть фрагмент L^{R}. Докажем консервативность. Пусть секвенция $F \to G$ выводима в L^{R}, причём $F, G \in \mathrm{Tp}$. Тогда эта секвенция истинна во всех L-моделях и, в силу теоремы 4 выводима в L.

Случай секвенций со многими типами в антецеденте сводится к уже рассмотренному (см. окончание предыдущего раздела). □

Заметим, что, поскольку правило сечения в приведённом выше исчислении неустранимо (например, выводимая (см. лемму 3) секвенция $(p_1 \cdot p_2)^{\mathrm{R}} \to p_2^{\mathrm{R}} \cdot p_1^{\mathrm{R}}$ не имеет вывода без применений правила сечения), консервативность L^{R} над L нетривиальна. Вопрос о построении исчисления без правила сечения, эквивалентного исчислению L^{R}, открыт.

L-полнота фрагмента исчисления L^{R} без умножения доказана в [7] с помощью модифицированного метода Бушковского [2]; там же доказана L-полнота вырожденного фрагмента, в котором из связок оставлены только умножение и обращение. Мы докажем L-полноту всего исчисления L^{R}:

Теорема 5. *Секвенция* $F \to G$ *(*$F, G \in \mathrm{Tp}^{\mathrm{R}}$*) выводима в* L^{R} *тогда и только тогда, когда она истинна во всех L-моделях.*

5 Нормальная форма типов исчисления L^{R}

Два типа $A, B \in \mathrm{Tp}^{\mathrm{R}}$ называются *эквивалентными* в исчислении L^{R} (обозначение: $A \leftrightarrow_{\mathrm{L}^{\mathrm{R}}} B$), если $\mathrm{L}^{\mathrm{R}} \vdash A \to B$ и $\mathrm{L}^{\mathrm{R}} \vdash B \to A$. Отношение $\leftrightarrow_{\mathrm{L}^{\mathrm{R}}}$ является отношением эквивалентности, а также конгруэнцией относительно всех связок.

Лемма 3. *B L^{R} имеют место следующие эквивалентности (A и B — произвольные типы из Tp^{R}):*

1. $A^{\mathrm{RR}} \leftrightarrow A$;
2. $(A \cdot B)^{\mathrm{R}} \leftrightarrow B^{\mathrm{R}} \cdot A^{\mathrm{R}}$;
3. $(A \setminus B)^{\mathrm{R}} \leftrightarrow B^{\mathrm{R}} \,/\, A^{\mathrm{R}}$;
4. $(B \,/\, A)^{\mathrm{R}} \leftrightarrow A^{\mathrm{R}} \setminus B^{\mathrm{R}}$.

Доказательство. Первая эквивалентность очевидна из правил $({}^{\mathrm{RR}}\!\to)$ и $(\to {}^{\mathrm{RR}})$. Вторая и третья эквивалентности устанавливаются следующими выводами:

$$\dfrac{\dfrac{A \to A^{\mathrm{RR}} \quad \dfrac{B \to B^{\mathrm{RR}} \quad \dfrac{\dfrac{B^{\mathrm{R}} \to B^{\mathrm{R}} \quad A^{\mathrm{R}} \to B^{\mathrm{R}}}{B^{\mathrm{R}}\, A^{\mathrm{R}} \to B^{\mathrm{R}} \cdot A^{\mathrm{R}}}}{A^{\mathrm{RR}}\, B^{\mathrm{RR}} \to (B^{\mathrm{R}} \cdot A^{\mathrm{R}})^{\mathrm{R}}}}{A^{\mathrm{RR}}\, B \to (B^{\mathrm{R}} \cdot A^{\mathrm{R}})^{\mathrm{R}}}}{A\, B \to (B^{\mathrm{R}} \cdot A^{\mathrm{R}})^{\mathrm{R}}}}{A \cdot B \to (B^{\mathrm{R}} \cdot A^{\mathrm{R}})^{\mathrm{R}}}}{(A \cdot B)^{\mathrm{R}} \to (B^{\mathrm{R}} \cdot A^{\mathrm{R}})^{\mathrm{RR}}} \qquad (B^{\mathrm{R}} \cdot A^{\mathrm{R}})^{\mathrm{RR}} \to B^{\mathrm{R}} \cdot A^{\mathrm{R}}}{(A \cdot B)^{\mathrm{R}} \to B^{\mathrm{R}} \cdot A^{\mathrm{R}}}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to A \quad B \to B}{A\, B \to A \cdot B}}{B^{\mathrm{R}}\, A^{\mathrm{R}} \to (A \cdot B)^{\mathrm{R}}}}{B^{\mathrm{R}} \cdot A^{\mathrm{R}} \to (A \cdot B)^{\mathrm{R}}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to A \quad B \to B}{A\,(A \setminus B) \to B}}{(A \setminus B)^{\mathrm{R}}\, A^{\mathrm{R}} \to B^{\mathrm{R}}}}{(A \setminus B)^{\mathrm{R}} \to B^{\mathrm{R}} \,/\, A^{\mathrm{R}}}$$

$$\dfrac{B^{\mathrm{R}} \,/\, A^{\mathrm{R}} \to (B^{\mathrm{R}} \,/\, A^{\mathrm{R}})^{\mathrm{RR}} \qquad \dfrac{\dfrac{A \to A^{\mathrm{RR}} \qquad \dfrac{\dfrac{A^{\mathrm{R}} \to A^{\mathrm{R}} \quad B^{\mathrm{R}} \to B^{\mathrm{R}}}{(B^{\mathrm{R}} \,/\, A^{\mathrm{R}})\, A^{\mathrm{R}} \to B^{\mathrm{R}}}}{A^{\mathrm{RR}}\,(B^{\mathrm{R}} \,/\, A^{\mathrm{R}})^{\mathrm{R}} \to B^{\mathrm{RR}}} \quad B^{\mathrm{RR}} \to B}{A^{\mathrm{RR}}\,(B^{\mathrm{R}} \,/\, A^{\mathrm{R}})^{\mathrm{R}} \to B}}{A\,(B^{\mathrm{R}} \,/\, A^{\mathrm{R}})^{\mathrm{R}} \to B}}{(B^{\mathrm{R}} \,/\, A^{\mathrm{R}})^{\mathrm{R}} \to A \setminus B}}{(B^{\mathrm{R}} \,/\, A^{\mathrm{R}})^{\mathrm{RR}} \to (A \setminus B)^{\mathrm{R}}}}{B^{\mathrm{R}} \,/\, A^{\mathrm{R}} \to (A \setminus B)^{\mathrm{R}}}$$

Четвёртая эквивалентность симметрична третьей. □

Определение. Для произвольного типа $A \in \mathrm{Tp}^{\mathrm{R}}$ определим тип $tr(A)$ индуктивно по числу связок в A:

1. $tr(p_i) \leftrightharpoons p_i$;
2. $tr(p_i^{\mathrm{R}}) \leftrightharpoons p_i^{\mathrm{R}}$;
3. $tr(A \cdot B) \leftrightharpoons tr(A) \cdot tr(B)$;
4. $tr(A \setminus B) \leftrightharpoons tr(A) \setminus tr(B)$;
5. $tr(B \,/\, A) \leftrightharpoons tr(B) \,/\, tr(A)$;
6. $tr((A \cdot B)^{\mathrm{R}}) \leftrightharpoons tr(B^{\mathrm{R}}) \cdot tr(A^{\mathrm{R}})$;
7. $tr((A \setminus B)^{\mathrm{R}}) \leftrightharpoons tr(B^{\mathrm{R}}) \,/\, tr(A^{\mathrm{R}})$;
8. $tr((B \,/\, A)^{\mathrm{R}}) \leftrightharpoons tr(A^{\mathrm{R}}) \setminus tr(B^{\mathrm{R}})$;
9. $tr(A^{\mathrm{RR}}) \leftrightharpoons tr(A)$.

Следующее утверждение доказывается индукцией по количеству связок в типе A; на шаге индукции применяется лемма 3:

Предложение 4. *Всякий тип $A \in \mathrm{Tp}^{\mathrm{R}}$ эквивалентен в исчислении L^{R} типу $tr(A)$.*

Будем называть $tr(A)$ *нормальной формой* типа A. В нормальной форме связка $^{\mathrm{R}}$ может появляться только непосредственно у примитивных типов.

6 L-полнота исчисления L^{R} (доказательство)

Докажем теорему 5 от противного. Пусть $\mathrm{L}^{\mathrm{R}} \not\vdash F_0 \to G_0$. Необходимо построить *контрмодель* для секвенции $F_0 \to G_0$, т. е. модель, в которой эта секвенция ложна.

Пусть $\mathrm{Pr}' \leftrightharpoons \mathrm{Pr} \cup \{p^{\mathrm{R}} \mid p \in \mathrm{Pr}\}$ и пусть L' есть исчисление Ламбека с Pr' вместо Pr в качестве множества примитивных типов. Здесь $^{\mathrm{R}}$ не является связкой, и p^{R} рассматривается как новый, независимый от p примитивный тип. Очевидно, что если $\mathrm{L}' \vdash F \to G$, то $\mathrm{L}^{\mathrm{R}} \vdash F \to G$.

Положим $F \leftrightharpoons tr(F_0)$, $G \leftrightharpoons tr(G_0)$. Тогда $\mathrm{L}^{\mathrm{R}} \not\vdash F \to G$, и, следовательно, $\mathrm{L}' \not\vdash F \to G$. Исчисление L' по сути совпадает с L, поэтому в силу теоремы 4 существует структура $\mathcal{M} = \langle \Sigma, w \rangle$ такая, что $w(F) \not\subseteq w(G)$. В $\mathcal{M}$ секвенция $F \to G$ ложна, однако $\mathcal{M}$ не является моделью в смысле расширенной сигнатуры: некоторые из условий $w(p_i^{\mathrm{R}}) = w(p_i)^{\mathrm{R}}$ могут не выполняться.

Обозначим через Φ множество всех подтипов секвенции $F \to G$ (включая сами F и G). Конструкция $\mathcal{M}$ такова (см. [9]), что $w(A) \neq \varnothing$ для любого $A \in \Phi$. Других особых свойств модели $\mathcal{M}$ нам не потребуется.

Определим счётчик $f(A)$, $A \in \Phi$, индукцией по построению типа A: $f(p_i) \leftrightharpoons 1$, $f(p_i^{\mathrm{R}}) \leftrightharpoons 1$, $f(A \cdot B) \leftrightharpoons f(A) + f(B) + 10$, $f(A \setminus B) \leftrightharpoons f(B)$, $f(B \,/\, A) \leftrightharpoons f(B)$. Пусть $K \leftrightharpoons \max\{f(A) \mid A \in \Phi\}$ и $N \leftrightharpoons 2K + 25$ (N выбирается нечётным, бóльшим K и достаточно большим само по себе).

Положим $\Sigma_1 \leftrightharpoons \Sigma \times \{1, \ldots, N\}$. Пару $\langle a, j \rangle \in \Sigma_1$ будем обозначать $a^{(j)}$. Элементы Σ и Σ_1 условимся называть *буквами* и *символами* соответственно. Символ будем называть *чётным* или *нечётным* в зависимости от чётности его верхнего индекса.

Рассмотрим гомоморфизм $h\colon \Sigma^+ \to \Sigma_1^+$, определяемый следующим образом: $h(a) \leftrightharpoons a^{(1)}a^{(2)} \ldots a^{(N)}$ $(a \in \Sigma)$, $h(a_1 \ldots a_n) \leftrightharpoons h(a_1) \ldots h(a_n)$. Положим $P \leftrightharpoons h(\Sigma^+) = \{a_1^{(1)} \ldots a_1^{(N)} \ldots a_n^{(1)} \ldots a_n^{(N)} \mid n \geqslant 1, a_i \in \Sigma\}$. Отображение h является взаимнооднозначным соответствием между Σ^+ и P.

Лемма 5. *Для любых $M, N \subseteq \Sigma^+$ имеют место соотношения:*

1. $h(M \cdot N) = h(M) \cdot h(N)$;
2. *если $M \neq \varnothing$, то $h(M \setminus N) = h(M) \setminus h(N)$ и $h(N \,/\, M) = h(N) \,/\, h(M)$.*

Доказательство.

1. По определению гомоморфизма.

2. $\boxed{\subseteq}$ Пусть $u \in h(M \setminus N)$. Тогда $u = h(u')$ для некоторого $u' \in M \setminus N$. Для всех $v' \in M$ имеем $v'u' \in N$. Возьмём произвольное $v \in h(M)$, $v = h(v')$ для некоторого $v' \in M$. Поскольку $u' \in M \setminus N$, $v'u' \in N$, следовательно, $vu = h(v')h(u') = h(v'u') \in h(N)$. Значит, $u \in h(M) \setminus h(N)$.

   $\boxed{\supseteq}$ Пусть $u \in h(M) \setminus h(N)$. Сначала покажем, что $u \in P$. Предположим противное: $u \notin P$. Возьмём $v' \in M$ (множество M непусто по условию). Поскольку $v = h(v') \in P$, $vu \notin P$. С другой стороны, $vu \in h(N) \subseteq P$, что приводит нас к противоречию.

   Поскольку $u \in P$, $u = h(u')$ для некоторого $u' \in \Sigma^+$. Для произвольного $v' \in M$ и $v \leftrightharpoons h(v')$ имеем $h(v'u') = vu \in h(N)$, откуда $v'u' \in N$. Следовательно, $u' \in M \setminus N$. Значит, $u = h(u') \in h(M \setminus N)$.

   Случай / рассматривается аналогичным образом.

□

Построим новую модель $\mathcal{M}_1 = \langle \Sigma_1, w_1 \rangle$, где $w_1(z) \leftrightharpoons h(w(z))$ $(z \in \mathrm{Pr}')$. В силу леммы 5 $w_1(A) = h(w(A))$ для всех $A \in \Phi$, поэтому $w_1(F) = h(w(F)) \not\subseteq h(w(G)) = w_1(G)$ (иначе говоря, $\mathcal{M}_1$, как и $\mathcal{M}$ является контрмоделью для секвенции $F \to G$ в сигнатуре без связки $^{\mathrm{R}}$).

Введём в рассмотрение несколько дополнительных подмножеств Σ_1^+. Через $\mathrm{Subw}(M)$ обозначим множество всех непустых подслов слов из M, т. е. $\mathrm{Subw}(M) \leftrightharpoons \{u \in \Sigma_1^+ \mid (\exists v_1, v_2 \in \Sigma^*)\, v_1 u v_2 \in M\}$. Положим

$T_1 \leftrightharpoons \{u \in \Sigma_1^+ \mid u \notin \mathrm{Subw}(P \cup P^{\mathrm{R}})\}$;

$T_2 \leftrightharpoons \{u \in \mathrm{Subw}(P \cup P^{\mathrm{R}}) \mid$ первый или последний символ слова u чётен $\}$;

$E \leftrightharpoons \{u \in \mathrm{Subw}(P \cup P^{\mathrm{R}}) - (P \cup P^{\mathrm{R}}) \mid$ первый и последний символы слова u нечётны $\}$.

Множества Σ^+ разбито на пять непересекающихся подмножеств P, P^{R}, T_1, T_2 и E. Например, $a^{(1)}b^{(10)}a^{(2)} \in T_1$, $a^{(N)}b^{(1)} \ldots b^{(N-1)} \in T_2$, $a^{(7)}a^{(6)}a^{(5)} \in E$ $(a, b \in \Sigma)$.

Положим $T \leftrightharpoons T_1 \cup T_2$, $T_i(k) \leftrightharpoons \{u \in T_i \mid |u| \geqslant k\}$ $(i = 1, 2$, через $|u|$ обозначена длина слова $u)$, $T(k) \leftrightharpoons T_1(k) \cup T_2(k) = \{u \in T \mid |u| \geqslant k\}$.

Заметим, что если первый или последний символы слова u чётен, то это слово лежит в T независимо от того, лежит ли оно в $\mathrm{Subw}(P \cup P^{\mathrm{R}})$.

Буква k (возможно, с нижними индексами) далее будет обозначать натуральное число от 1 до K. Для всех таких k имеем $T(k) \supseteq T(K)$.

Лемма 6. *Рассматриваемые множества обладают следующими свойствами:*

1. $P \cdot P \subseteq P$, $P^{\mathrm{R}} \cdot P^{\mathrm{R}} \subseteq P^{\mathrm{R}}$;
2. $T^{\mathrm{R}} = T$, $T(k)^{\mathrm{R}} = T(k)$;
3. $P \cdot P^{\mathrm{R}} \subseteq T(K)$, $P^{\mathrm{R}} \cdot P \subseteq T(K)$;
4. $P \cdot T \subseteq T(K)$, $T \cdot P \subseteq T(K)$;
5. $P^{\mathrm{R}} \cdot T \subseteq T(K)$, $T \cdot P^{\mathrm{R}} \subseteq T(K)$;
6. $T \cdot T \subseteq T$;

Доказательство.

1. Очевидно.
2. Непосредственно следует из определения.
3. Любой элемент $P \cdot P^{\mathrm{R}}$ или $P^{\mathrm{R}} \cdot P$ не принадлежит множеству $\mathrm{Subw}(P \cup P^{\mathrm{R}})$ и имеет длину хотя бы $2N > K$. Следовательно, он принадлежит $T_1(K) \subseteq T(K)$.
4. Пусть $u \in P$ и $v \in T$. Если $v \in T_1$, то uv также лежит в T_1. Пусть $v \in T_2$. Если последний символ v чётен, то $uv \in T$. В противном случае чётен первый символ v, поэтому $uv \notin \mathrm{Subw}(P \cup P^{\mathrm{R}})$, следовательно, $uv \in T_1 \subseteq T$. Поскольку $|uv| > |u| \geqslant N > K$, получаем, что $uv \in T(K)$.

   Утверждение $T \cdot P \subseteq T$ доказывается симметричным образом.
5. $P^{\mathrm{R}} \cdot T = P^{\mathrm{R}} \cdot T^{\mathrm{R}} = (T \cdot P)^{\mathrm{R}} \subseteq T(K)^{\mathrm{R}} = T(K)^{\mathrm{R}}$; $T \cdot P^{\mathrm{R}} = T^{\mathrm{R}} \cdot P^{\mathrm{R}} = (P \cdot T)^{\mathrm{R}} \subseteq T(K)^{\mathrm{R}} = T(K)$.
6. Пусть $u, v \in T$. Если хотя бы одно из этих двух слов лежит в T_1, то $uv \in T_1$. Пусть $u, v \in T_2$. Если первый символ u или последний символ v чётен, то $uv \in T$. В противном случае последний символ u и первый символ v чётны, и в слове uv встречаются два чётных символа подряд. Значит, $uv \notin \mathrm{Subw}(P \cup P^{\mathrm{R}})$, т. е. $uv \in T_1 \subseteq T$.

□

Назовём слова вида $a^{(i)}a^{(i+1)}a^{(i+2)}$, $a^{(N-1)}a^{(N)}b^{(1)}$ и $a^{(N)}b^{(1)}b^{(2)}$ $(a, b \in \Sigma, 1 \leqslant i \leqslant N-2)$ *допустимыми тройками типа I,* а обращённые допустимые тройки типа I (а именно, слова вида $a^{(i+2)}a^{(i+1)}a^{(i)}$, $b(1)a^{(N)}a^{(N-1)}$ и $b^{(2)}b^{(1)}a^{(N)}$) *допустимыми тройками типа II.*

Допустимые тройки типа I (типа II) в точности являются возможными трёхбуквенными подсловами слов из P (соответственно, P^{R}).

Лемма 7. *Пусть $|u| \geqslant 3$. Тогда $u \in \mathrm{Subw}(P \cup P^{\mathrm{R}})$ в том и только в том случае, когда все трёхбуквенные подслова́ сло́ва u являются допустимыми тройками типа I или II.*

Доказательство. Нетривиальна импликация справа налево. Рассуждаем индукцией по длине слова u. База индукции ($|u| = 3$) очевидна. Пусть теперь u — слово длины $m+1$, удовлетворяющее условию и пусть $x \in \Sigma_1$ — последний его символ ($u = u'x$). По индуктивному предположению $u' \in \mathrm{Subw}(P \cup P^{\mathrm{R}})$. Пусть $u' \in \mathrm{Subw}(P)$ (второй случай симметричен), иначе говоря, u' является подсловом некоторого слова $v \in P$. Рассмотрим три последних символа u. Поскольку первые два из них принадлежат также u' и, следовательно, v, это трёхсимвольное слово является допустимой тройкой типа I, а не типа II. Если она имеет вид $a^{(i)}a^{(i+1)}a^{(i+2)}$) или $a^{(N)}b^{(1)}b^{(2)}$, то x совпадает с символом, следующим за вхождением u' в v, следовательно, слово $u = u'x$ также является подсловом v. Если же эта тройка имеет вид $a^{(N-1)}a^{(N)}b^{(1)}$, то, представив слово v в виде $v_1u'v_2$, мы видим, что $v'u$ также лежит в P, и слово $v_1u'b^{(1)}b^{(2)}\dots b^{(N)} \in P$ содержит слово $u = u'b^{(1)}$ в качестве подслова. Итак, во всех случаях $u \in \mathrm{Subw}(P)$. Индуктивный переход обоснован. □

Построим ещё одну модель — $\mathcal{M}_2 = \langle \Sigma_1, w_2 \rangle$, где $w_2(p_i) \leftrightharpoons w_1(p_i) \cup w_1(p_i^{\mathrm{R}})^{\mathrm{R}} \cup T$, $w_2(p_i^{\mathrm{R}}) \leftrightharpoons w_1(p_i)^{\mathrm{R}} \cup w_1(p_i^{\mathrm{R}}) \cup T$. Эта модель, в отличие от $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}_1$, удовлетворяет условиям $w_2(A^{\mathrm{R}}) \leftrightharpoons w_2(A)^{\mathrm{R}}$, т. е. является L-моделью в смысле расширенной сигнатуры. Для завершения доказательства теоремы 5 достаточно показать, что $\mathcal{M}_2 \not\models F \to G$.

Лемма 8. *Для любого $A \in \Phi$ верны следующие утверждения:*

1. $w_2(A) \subseteq P \cup P^{\mathrm{R}} \cup T$;
2. $w_2(A) \supseteq T(f(A))$;
3. $w_2(A) \cap P = w_1(A)$ *(в частности, $w_2(A) \cap P \neq \varnothing$)*;
4. $w_2(A) \cap P^{\mathrm{R}} = w_1(tr(A^{\mathrm{R}}))^{\mathrm{R}}$ *(в частности, $w_2(A) \cap P^{\mathrm{R}} \neq \varnothing$)*.

Доказательство. Будем доказывать эти четыре утверждения совместной индукцией по построению типа A. База индукции тривиальна. В дальнейшем мы будем обозначать i-е утверждение из предположения индукции через «ИП-i».

1. Рассмотрим три случая:

а) $A = B \cdot C$. Тогда $w_2(A) = w_2(B) \cdot w_2(C) \subseteq (P \cup P^{\mathrm{R}} \cup T) \cdot (P \cup P^{\mathrm{R}} \cup T) \subseteq P \cup P^{\mathrm{R}} \cup T$ (лемма 6).

б) $A = B \setminus C$. Предположим противное: в $w_2(A)$ есть элемент $u \in E$. Тогда $vu \in w_2(C)$ для любого $v \in w_2(C)$. Рассмотрим несколько подслучаев, и в каждом из них получим противоречие.

i) $u \in \mathrm{Subw}(P)$, причём верхний индекс первого символа слова u не равен 1. Пусть первый символ u есть $a^{(i)}$. Заметим, что i нечётно. Возьмём $v = a^{(3)} \dots a^{(N)} a^{(1)} \dots a^{(i-1)}$. Длина слова v не меньше $N - 2 \geqslant K$, и слово v оканчивается нечётным символом. Следовательно, $v \in T(K) \subseteq T(f(B)) \subseteq w_2(B)$ (ИП-2). С другой стороны, $vu \in \mathrm{Subw}(P)$, и первый и последний символы vu нечётны. Значит, $vu \in E$ и $vu \in w_2(C)$. Противоречие: $w_2(C) \cap E = \varnothing$ (ИП-1).

ii) $u \in \mathrm{Subw}(P)$, и первый символ слова u есть $a^{(1)}$. Значит, верхний индекс последнего символа u не равен N, потому что иначе $u \in P$. Возьмём произвольное слово $v \in w_2(B) \cap P$ (это множество непусто в силу ИП-3). Первый и последний символы слова vu нечётны, и $vu \in \mathrm{Subw}(P) - P$, следовательно, $vu \in E$. Противоречие.

iii) $u \in \mathrm{Subw}(P^{\mathrm{R}})$, верхний индекс первого символа u не равен N (первый символ u есть $a^{(i)}$, i нечётно). Возьмём $v = a^{(N-2)} \dots a^{(1)} a^{(N)} \dots a^{(i+1)}$. $vu \in E$.

iv) $u \in \mathrm{Subw}(P^{\mathrm{R}})$ и u начинается с $a^{(N)}$. Возьмём $v \in w_2(B) \cap P^{\mathrm{R}}$ (непусто по ИП-4). $vu \in E$.

в) $A = C \,/\, B$. Симметрично.

2. Рассмотрим три случая.

а) $A = B \cdot C$. Пусть $k_1 \rightleftharpoons f(B)$, $k_2 \rightleftharpoons f(C)$, $k \rightleftharpoons k_1 + k_2 + 10 = f(A)$. По ИП-2 $w_2(B) \supseteq T(k_1)$, $w_2(C) \supseteq T(k_2)$. Возьмём $u \in T(k)$. Докажем, что $u \in w_2(A)$. Рассмотрим несколько подслучаев.

i) $u \in T_1(k)$. По лемме 7 ($|u| \geqslant k > 3$ и $u \notin \mathrm{Subw}(P \cup P^{\mathrm{R}})$) в u есть трёхсимвольное подслово xyz, не являющееся допустимой тройкой типа I или II. Разделим слово u на две части, $u = u_1 u_2$, таким образом, что $|u_1| \geqslant k_1 + 5$ и $|u_2| \geqslant k_2 + 5$. При необходимости сдвинем границу между частями u_1 и u_2 на один символ влево или вправо, чтобы подслово xyz оказалось целиком в одной из частей (после этого $|u_1| \geqslant k_1 + 4$, $|u_2| \geqslant k_2 + 4$). Пусть это будет часть u_2 (другой случай рассматривается симметричным образом). Тогда $u_2 \in T_1(k_2)$. Если u_1 также лежит в T_1, доказательство на этом заканчивается. Рассмотрим другой случай: $u_1 \in \mathrm{Subw}(P \cup P^{\mathrm{R}})$. Заметим, что среди любых трёх подряд идущих символов слова из $\mathrm{Subw}(P \cup P^{\mathrm{R}})$ есть хотя бы один чётный. Сдвинем границу

частей u_1 и u_2 влево на 0, 1 или 2 символа так, чтобы последний символ u_1 оказался чётным. После этого слово u_2 останется в $T_1(k_2)$ (оно не укоротится и по-прежнему содержит подслово xyz), а слово u_1 окажется в $T(k_1)$, потому что его последний символ чётен. Значит, $u = u_1u_2 \in T(k_1) \cdot T(k_2) \subseteq w_2(B) \cdot w_2(C) = w_2(A)$.

ii) $u \in T_2(k)$. Пусть u оканчивается чётным символом (второй случай симметричен). Разделим u на две части, $u = u_1u_2$, $u_1 \geqslant k_1{+}5$, $u_2 \geqslant k_2{+}5$, и сдвинем границу так, чтобы u_1 заканчивалось чётным символом. Тогда оба слова u_1 и u_2 оканчиваются чётными символами, поэтому $u_1 \in T(k_1)$ и $u_2 \in T(k_2)$. Значит, $u = u_1u_2 \in T(k_1) \cdot T(k_2) \subseteq w_2(B) \cdot w_2(C) = w_2(A)$.

б) $A = B \setminus C$. Пусть $k \leftrightharpoons f(C) = f(A)$. В силу ИП-2 $w_2(C) \supseteq T(k)$. Возьмём $u \in T(k)$ и произвольное $v \in w_2(B) \subseteq P \cup P^{\mathrm{R}} \cup T$. Имеем $vu \in (P \cup P^{\mathrm{R}} \cup T) \cdot T \subseteq T$ (лемма 6.4–6), а поскольку $|vu| > |u| \geqslant k$, $vu \in T(k) \subseteq w_2(C)$. Значит, $u \in w_2(A)$.

в) $A = C \,/\, B$. Симметрично.

3. Рассмотрим три случая.

а) $A = B \cdot C$.

$\boxed{\supseteq}$ $u \in w_1(A) = w_1(B) \cdot w_1(C) \subseteq w_2(B) \cdot w_2(C) = w_2(A)$ (ИП-3); $u \in P$.

$\boxed{\subseteq}$ Пусть $u \in P$, $u \in w_2(A) = w_2(B) \cdot w_2(C)$. Тогда $u = u_1u_2$, где $u_1 \in w_2(B)$, $u_2 \in w_2(C)$. Сначала докажем, что $u_1 \in P$. Предположим противное: $u_1 \notin P$. Тогда $u_1 \in P^{\mathrm{R}} \cup T$ (ИП-1), $u_2 \in P \cup P^{\mathrm{R}} \cup T$, откуда $u = u_1u_2 \in (P^{\mathrm{R}} \cup T) \cdot (P \cup P^{\mathrm{R}} \cup T) \in P^{\mathrm{R}} \cup T$ (лемма 6). Противоречие ($u \in P$). Значит, $u_1 \in P$, а потому и $u_2 \in P$, и по ИП-3 получаем, что $u_1 \in w_1(B)$, $u_2 \in w_1(C)$, откуда $u = u_1u_2 \in w_1(A)$.

б) $A = B \setminus C$.

$\boxed{\supseteq}$ Пусть $u \in w_1(B \setminus C)$. Значит, для любого $v \in w_1(B)$ имеем $vu \in w_1(C)$. Покажем, что $u \in w_2(B \setminus C)$. Возьмём $v \in w_2(B) \subseteq P \cup P^{\mathrm{R}} \cup T$ (ИП-1).
Если $v \in P$, то $v \in w_1(B)$ (ИП-3), поэтому $vu \in w_1(C) \subseteq w_2(C)$.
Если же $v \in P^{\mathrm{R}} \cup T$, то $vu \in (P^{\mathrm{R}} \cup T) \cdot P \subseteq T(K) \subseteq w_2(C)$ (лемма 6 и ИП-2).

$\boxed{\subseteq}$. Если $u \in w_2(B \setminus C)$ и $u \in P$, то для любого $v \in w_1(B) \subseteq w_2(B)$ имеем $vu \in w_2(C)$. Поскольку $v, u \in P$, то $vu \in P$, откуда $vu \in w_1(C)$ (ИП-3). Значит, $u \in w_1(B \setminus C)$.

в) $A = C \,/\, B$. Симметрично.

4. Симметрично. □

Поскольку $w_1(F) \not\subseteq w_1(G)$, существует такое слово u_0, что $u_0 \in w_1(F)$ и $u_0 \notin w_1(G)$. Кроме того, $u_0 \in P$, поэтому (в силу только что доказанной леммы) $u_0 \in w_2(F)$ и $u_0 \notin w_2(G)$. Следовательно, $w_2(F) \not\subseteq w_2(G)$, т. е. $\mathcal{M}_2 \not\models F \to G$. Поскольку $F_0 \leftrightarrow F$,

$G_0 \leftrightarrow G$ и исчисление L^{R} корректно относительно L-моделей, $\mathcal{M}_2 \nVdash F_0 \to G_0$. Теорема 5 доказана: $\mathcal{M}_2$ является искомой контрмоделью.

Заметим, что мы построили контрмодель (в смысле расширенной сигнатуры) не только для секвенций, невыводимых в исчислении L^{R}, но и для секвенций в нормальной форме, невыводимых в a priori более слабом исчислении L'. Отсюда получается следующее утверждение:

Предложение 9. *Секвенция $A_1 \dots A_n \to B$ выводима в L^{R} тогда и только тогда, когда в L' выводима секвенция $tr(A_1) \dots tr(A_n) \to tr(B)$.*

7 Исчисление L^{R}: грамматики и сложность

Теорема 6. *Класс L^{R}-языков совпадает с классом контекстно-свободных языков, не содержащих пустого слова.*

Доказательство. Включение класса контекстно-свободных языков без пустого слова в класс L^{R}-языков следует из теоремы 2 и консервативности L^{R} над $\mathrm{L}(\backslash)$.

Обратное включение следует из предложения 9: заменив в L^{R}-грамматике все типы C на $tr(C)$, получим грамматику, основанную на исчислении L (точнее говоря, на L', отличающемся от L только обозначениями примитивных типов), задающую тот же язык — и этот язык является контекстно-свободным по теореме 3. □

Фрагменты исчисления L^{R} с ограниченными наборами связок определяются так же, как и для L.

Теорема 7. *Проблемы выводимости в исчислениях $\mathrm{L}^{\mathrm{R}}(\backslash)$, L^{R}, а также всех промежуточных исчислениях, являющихся консервативными фрагментами L^{R} и консервативными расширениями $\mathrm{L}^{\mathrm{R}}(\backslash)$, NP-полны.*

Доказательство. Принадлежность проблемы выводимости в исчислении L^{R} к классу NP следует из предложения 9 и того факта, что проблема выводимости в L лежит в NP (в силу теоремы об устранении сечения).

NP-полнота проблемы выводимости в исчислении $\mathrm{L}^{\mathrm{R}}(\backslash)$ следует из эквивалентности $B \,/\, A \leftrightarrow_{\mathrm{L}^{\mathrm{R}}} (A^{\mathrm{R}} \setminus B^{\mathrm{R}})^{\mathrm{R}}$, сводящей к выводимости в $\mathrm{L}^{\mathrm{R}}(\backslash)$ выводимость в $\mathrm{L}(\backslash, /)$, и NP-полноты проблемы выводимости для последнего [6]. □

Список литературы

[1] Y. Bar-Hillel, C. Gaifman, E. Shamir. On the categorial and phrase-structure grammars. *Bulletin of the Research Council of Israel, Section F.* Vol. 9F, 1960. — P. 1–16.

[2] W. Buszkowski. Compatibility of a categorial grammar with an associated category system. *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik.* Vol. 28, 1982. — P. 229–238.

[3] W. Buszkowski. The equivalence of unidirectional Lambek categorial grammars and context-free grammars, *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik.* Vol. 31, 1985. — P. 369–384.

[4] N. Chomsky. Three models for the description of language. *IRE Transactions on Information Theory.* Vol. I T-2, No. 3, 1956. — P. 113–124.
Русский перевод: Н. Хомский. Три модели описания языка. *Кибернетический сборник*, вып. 2. — М.: ИЛ, 1961. — С. 237–266.

[5] J. Lambek. The mathematics of sentence structure. *American Mathematical Monthly.* Vol. 65, No. 3, 1958. — P. 154–170.
Русский перевод: И. Ламбек. Математической исследование структуры предложений. *Математическая лингвистика:* сборник переводов, под ред. Ю. А. Шрейдера и др. — М.: Мир, 1964. — С. 47–68.

[6] Yu. Savateev. Product-free Lambek calculus is NP-complete. *Proceedings of the International Symposium "Logical Foundations of Computer Science" (LFCS 2009),* ed. by S. N. Artemov and A. Nerode. *Lecture Notes in Computer Science.* Vol. 5407. Berlin: Springer, 2009. — P. 380–394.

[7] В. А. Минина. Полнота синтаксического исчисления Ламбека с операцией инволюции. Дипломная работа, кафедра математической логики и теории алгоритмов МГУ им. Ломоносова. — М., 2001. — 13 с.

[8] М. Р. Пентус. Исчисление Ламбека и формальные грамматики. *Фундаментальная и прикладная математика.* Том 1, № 3, 1995. — С. 729–751.

[9] М. Р. Пентус. Полнота синтаксического исчисления Ламбека. *Фундаментальная и прикладная математика.* Том 5, № 1, 1999. — С. 193–219.