не более заданного от некоторой начальной вершины. Оператор Ω_Γ задаётся конечным набором правил. Каждое из этих правил имеет вид $U_i \longrightarrow W_i$; его применение состоит в том, что если активная часть комплекса S есть U_i, то чтобы получить $S^* = \Omega_\Gamma(S)$, следует U_i заменить на W_i, оставив неизменным $S \setminus U_i$.

Устанавливается эквивалентность между понятием алгоритма (в смысле предложенного определения) и понятием частично-рекурсивной функции.

2. В. А. Успенский «О понятии алгоритмической сводимости».

Точно так же, как наряду с проблемой решения отдельной задачи A возникает проблема алгоритмического решения серии задач A_n, наряду с проблемой сведе́ния решения одной задачи A к решению другой задачи B возникает проблема алгоритмического сведе́ния серии задач A_n к серии задач B_n. Изображая условия и решения задач топологическими комплексами специального вида (как это сделано в докладе А. Н. Колмогорова), мы приходим к вопросу об алгоритмическом сведе́нии функции от комплексов Γ к функции от комплексов Δ, а занумеровав комплексы натуральными числами,—к вопросу об алгоритмическом сведе́нии числовой функции $\gamma(n)$ к числовой функции $\delta(n)$.

Существуют два определения сводимости, сформулированные для случая, когда $\gamma(n)$ и $\delta(n)$ принимают лишь два значения (т. е. являются характеристическими функциями некоторых множеств). Одно из них принадлежит Посту (см. его определение «тъюринговской» сводимости в Bulletin of the American Mathematical Society, 5 (1944), стр. 311—312). Другое, называющее функцию $\gamma(n)$ сводящейся к $\delta(n)$, если $\gamma(n)$ принадлежит рекурсивному замыканию $\delta(n)$ (такую сводимость мы называем «рекурсивной»), было высказано Б. А. Трахтенбротом.

Оба эти определения без труда обобщаются на случай произвольных целочисленных функций $\gamma(n)$ и $\delta(n)$. Предлагается новое, третье определение сводимости, идея которого состоит в следующем. Рассматривается сводимость функции от комплексов Γ к функции от комплексов Δ. Строится бесконечный комплекс U_Δ, заключающий в себе всю информацию о функции Δ. Через $K \circ U_\Delta$ обозначается комплекс, возникший в результате осуществлённого некоторым специальным способом присоединения комплекса K к U_Δ. Функция Γ называется *алгоритмически сводящейся* к функции Δ, если существует такой алгоритм (в смысле А. Н. Колмогорова) Ψ, что для любого комплекса K

$$\Gamma(K) = \Psi(K \circ U_\Delta).$$

Устанавливается эквивалентность предложенного определения определениям тъюринговской и рекурсивной сводимости.

Далее строятся некоторые вполне определённые примитивно-рекурсивные функции $\tau(x)$ и $\omega(x)$. С помощью предложенного определения сводимости доказывается следующая теорема:

Пусть функция $\gamma(n)$ алгоритмически сводится к всюду определённой функции $\delta(n)$. Тогда существует примитивно-рекурсивная функция $h(x, y, z)$ такая, что если функцию $g(n, m)$ задать рекурсией

$$g(n, 0) = n,$$
$$g(n, m+1) = h(m, g(n, m), \delta(m)),$$

то функция $\gamma(n)$ будет вычисляться по формуле

$$\gamma(n) = \tau(g(n, \mu m[\omega(g(n, m)) = 0])).$$

Обратная теорема очевидна.

Заседание 24 марта 1953 г.

1. В. А. Успенский «Теорема Гёделя и теория алгоритмов».

В работе «Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I», опубликованной в 1931 г. в Monatshefte für Mathematik u. Physik, XXXVIII (стр. 173—198), Гёдель показал, что попытка аксиоматического построения арифметики неизбежно приводит к дедуктивно-неполному исчислению, т. е. к исчислению, в котором существует неразрешимая формула, интерпретируемая как содержательное высказывание о натуральных числах (формула называется неразрешимой в дедуктивном исчислении П, если ни она, ни её отрицание не являются выводимыми в П); кроме того, указывался эффективный способ построения такой формулы. В докладе излагаются результаты предпринятого по инициативе А. Н. Колмогорова выяснения общих причин такого положения вещей. При этом обнаруживается роль теории алгоритмов в вопросах дедуктивной полноты.

Каждой системе правил, задающих рекурсивно-перечислимое множество, эффективно сопоставим натуральное число, которое назовём номером соответствующего множества. Можно построить два рекурсивно-перечислимых множества, являющихся не отделимыми, т. е. не отделяющимися никакими рекурсивными множествами (такие множества построены П. С. Новиковым). Введём понятие эффективной неотделимости: множества E_1 и E_2 назовём *эффективно-неотделимыми*, коль скоро существует частично-рекурсивная функция $\nu(n_1, n_2)$ такая, что если n_1 и n_2 суть номера рекурсивно-перечислимых множеств H_1 и H_2, отделяющих E_1 и E_2, то $\nu(n_1, n_2) \bar{\in} H_1 \cup H$. Удаётся установить, что *множества, построенные П. С. Новиковым, являются эффективно-неотделимыми*.

Дедуктивное исчислениие П есть совокупность следующих образований: множества $\mathfrak{S}$ всевозможных строчек элементарных знаков из некоторого конечного набора $\mathfrak{Z}$ элементарных знаков (эти строчки «называются» формулами); конечного множества $A_1, \ldots, A_p$ формул, называемых «аксиомами»; конечного множества $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_q$ алгоритмов, называемых «правилами вывода». Каждый алгоритм Γ_i применяется к наборам (не обязательно всем) формул из $\mathfrak{S}$ вида $X_1, \ldots, X_{k_i}; Y_1, \ldots, Y_{l_i}$. В $\mathfrak{S}$ образуется множество «выводимых» формул по следующему закону: все аксиомы выводимы; если $Z = \Gamma_i(X_1, \ldots, X_{k_i}; Y_1, \ldots, Y_{l_i})$, причём $X_1, \ldots, X_{k_i}$ выводимы, то и Z является выводимой. (В таком окончательном виде определение дедуктивного исчисления было сформулировано А. Н. Колмогоровым). Потребуем, чтобы в числе элементарных знаков был знак $\neg$. Если A — строчка элементарных знаков, то строчку $\neg A$ назовём «отрицанием» A. Потребуем далее выполнения следующих свойств: если A выводима, то и $\neg\neg A$ выводима; если $\neg\neg\neg A$ выводима, то и $\neg A$ выводима. Указанные требования включим в определение дедуктивного исчисления.

Рассмотрим произвольное подмножество $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{S}$, обладающее следующими свойствами: 1) существует алгоритм, позволяющий для всякой формулы $A \in \mathfrak{S}$ определить, принадлежит A к $\mathfrak{B}$ или нет; 2) если $A \in \mathfrak{B}$, то и $\neg A \in \mathfrak{B}$. Исчисление П высекает в $\mathfrak{B}$ подмножество $\mathfrak{K}(П)$ выводимых формул и подмножество $\mathfrak{L}(П)$ формул, отрицания которых выводимы. В применении к $\mathfrak{B}$ исчисление П называется *непротиворечивым*, если $\mathfrak{K}(П) \cap \mathfrak{L}(П) = \Lambda$, и *полным*, если $\mathfrak{K}(П) \cup \mathfrak{L}(П) = \mathfrak{B}$. Исчисление П назовём *усилением исчисления* П *в применении к* $\mathfrak{B}$, если $\mathfrak{K}(П') \supseteq \mathfrak{K}(П)$. Исчисление П назовём *непополнимым в применении к* $\mathfrak{B}$, если оно не допускает полного и непротиворечивого усиления. Эффективно перенумеруем формулы из $\mathfrak{S}$ натуральными числами. Тогда множества номеров $K(П)$ и $L(П)$, соответствующие множествам $\mathfrak{K}(П)$ и $\mathfrak{L}(П)$, окажутся рекурсивно-перечислимыми.

Неотделимость $K(П)$ *и* $L(П)$ *является необходимым и достаточным условием для непополнимости* П *в применении к* $\mathfrak{B}$ (это условие в качестве достаточного было сообщено автору А. Н. Колмогоровым).

Исчисление П назовём *эффективно-непополнимым в применении к* $\mathfrak{B}$, коль скоро существует частично-рекурсивная функция $\gamma(n)$ такая, что если n есть номер рекурсивно-перечислимого множества $K(П')$, где П' — усиление П, то $\gamma(n)$ есть номер формулы из $\mathfrak{B}$, неразрешимой в П'. *Необходимым и достаточным условием эффективной непополнимости* П *в применении к* $\mathfrak{B}$ *является эффективная неотделимость множеств* $K(П)$ *и* $L(П)$.

Из полученных общих результатов легко следует теорема Гёделя. В качестве $\mathfrak{B}$ берётся множество арифметических формул, содержательно интерпретируемых как высказывания о натуральных числах. Пусть дедуктивное исчисление П обладает следующим свойством: существуют эффективно-неотделимые множества E_1 и E_2 и для всякого n формула $F(n)$ (выражающая утверждение $n \in E_1$), такие, что при $n \in E_1$ формула $F(n)$ выводима в П, а при $n \in E_2$ — выводима $\neg F(n)$. Тогда $K(\Pi)$ и $L(\Pi)$ эффективно-неотделимы и П эффективно-непополнимо в применении к $\mathfrak{B}$.

2. Ю. М. Смирнов «О понятии полноты в пространствах близости».

На основе введённого автором ещё в [1] понятия полноты строится последовательная теория полноты пространств близости. Пространства близости полных метрических пространств, полных топологических групп и бикомпактные пространства близости полны. Все основные результаты теории изложены в [2]. Следующим образом была выяснена связь между пространствами близости и псевдометриками: *псевдометрикой пространства близости* P называется всякая неотрицательная функция $\rho(x, y)$ двух переменных $x \in P$, $y \in P$, удовлетворяющая условиям симметрии, треугольника и условию равномерности: если множества A и B из P близки, то $\rho(A, B) = 0$. Если существует такая псевдометрика пространства P, что из $\rho(A, B) = 0$ всегда следует близость множеств A и B, то пространство P называется *метризуемым*, а псевдометрика $\rho(x, y)$ — *метрикой* пространства P. Множество всех псевдометрик P частично упорядочено: псевдометрика $\rho(x, y)$ следует за псевдометрикой $\rho'(x, y)$, если всегда из $\rho(A, B) = 0$ вытекает, что и $\rho'(A, B) = 0$.

1. Множества A и B пространства близости P близки тогда и только тогда, если для любой псевдометрики $\rho(x, y)$ пространства P имеем: $\rho(A, B) = 0$.

2. Для того чтобы пространство близости P было метризуемым, необходимо и достаточно, чтобы во множестве всех его псевдометрик существовал наибольший элемент.

3. Пополнение пространства близости P есть наибольшее из всех таких его расширений, на каждое из которых всякую псевдометрику пространства P можно продолжить в непрерывную функцию двух переменных.

4. Пространство близости P вполне ограничено (т. е. его пополнение бикомпактно) тогда и только тогда, когда всякая его псевдометрика вполне ограничена.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. Смирнов, О пространствах близости, ДАН СССР **84**, № 5 (1952), 895.
[2] Ю. Смирнов, О полноте пространств близости, ДАН СССР **88**, № 5 (1953), 761.

Заседание 31 марта 1953 г.

1. Л. А. Люстерник «Применение кубатурных формул к численному решению задачи Коши для некоторых уравнений в частных производных».

В докладе излагалось содержание работы [1], но доказательство сходимости проводилось в более общих предположениях. Сохраним обозначения работы [1].

Пусть $A = (x, y)$, $u(t)\varphi(A) = v(A, t) = v(x, y, t)$ есть решение задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v, \quad v(A, 0) = \varphi(A). \tag{1}$$

В [1] выведены приближённые формулы для решения задачи (1):

$$u(t, l)\varphi(A) = v_l(A, t) = c_0\varphi(A) + \sum_{i=1}^{l} c_i S\left[2\sqrt{t}\,\rho_i,\ 4l+2\right]\varphi(A), \tag{2}$$