Заседание 24 февраля 1956 г.

Заседание, организованное Обществом совместно с Отделением физико-математических наук АН СССР, Математическим институтом имени В. А. Стеклова и Московским университетом, было посвящено 100-летию со дня смерти Н. И. Лобачевского (1792—1856).

1. Краткое вступительное слово С. Л. Соболева.

2. «Геометрические идеи Н. И. Лобачевского и их значение в математике и современном естествознании» — доклад Б. Н. Делоне.

Заседание 28 февраля 1956 г.

1. А. Н. Колмогоров вручил премии Общества за 1955 г. молодым математикам:

Роланду Львовичу Добрушину — за работу «Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова».

Фридриху Израилевичу Карпелевичу — за цикл работ, посвящённый простым подгруппам вещественных групп Ли.

Присутствующие аплодисментами приветствовали новых лауреатов премии Общества.

2. В. А. Успенский «Вычислимые операции и понятие программы».

1. Доклад представляет собой изложение некоторых результатов, содержащихся (в основном) в заметке [1]. Изложение не предполагает никаких специальных знаний в области теории алгоритмов. Поэтому приходится отказаться от использования какого бы то ни было из существующих уточнений понятия алгоритма [2]—[5] и опираться на интуитивное понимание алгоритма как «вычислительного процесса, совершаемого согласно точному предписанию и ведущего от могущих варьировать исходных данных к искомому результату» [4].

Каждый алгоритм определяется, таким образом, некоторым *предписанием* или *набором правил*. Любое из имеющихся уточнений понятия «алгоритм» позволяет точно определить, что такое «набор правил», определяющий алгоритм. Запись набора правил, определяющего алгоритм, в каком-либо коде называется программой данного алгоритма. Поскольку возможны различные способы кодирования наборов правил, то при фиксированном уточнении понятия «алгоритм» возможны различные уточнения понятия «программа».

Каждый алгоритм задаёт функцию, определённую на множестве тех объектов, к которым применим рассматриваемый алгоритм; значение этой функции для аргумента a равно результату применения алгоритма к a. Такая функция называется *вычислимой*. Другими словами, функция φ называется вычислимой, если существует алгоритм: а) неприменимый ни к какому объекту, не входящему в область определения функции φ; б) применимый к любому объекту a, входящему в область определения φ, и перерабатывающий этот объект в $\varphi(a)$. (Для каждой вычислимой функции существует бесконечное множество задающих её алгоритмов.) Любое из известных уточнений понятия алгоритма приводит к одному и тому же классу вычислимых функций, поэтому понятие вычислимой функции можно считать не зависящим от способа уточнения понятия алгоритма. В частности, класс вычислимых арифметических[1]) функций совпадает с классом так называемых частично-рекурсивных функций [6].

Всякий набор правил (предписание), определяющий один из алгоритмов, задающих вычислимую функцию φ, можно рассматривать и как набор правил, непосред-

[1]) Арифметической функцией от s аргументов называется функция, определённая на некотором множестве упорядоченных наборов $(x_1, \ldots, x_s)$, составленных из s натуральных чисел (не предполагается, что функция определена для всех таких наборов), и принимающая в качестве значений натуральные числа.

ственно определяющий функцию φ. Всякая программа всякого алгоритма, задающего функцию φ, называется также программой функции φ. Каждое конкретное уточнение понятия алгоритма в сочетании с каким-либо конкретным уточнением понятия программы алгоритма даёт некоторый конкретный способ формализации наборов правил, определяющих вычислимые функции, или, как мы скажем, *способ программирования* вычислимых функций. Существуют различные способы программирования. (При каждом из них всякая вычислимая функция имеет бесконечное множество программ, поскольку задаётся бесконечным множеством алгоритмов.)

Наша задача—дать определение понятий «программа», «способ программирования», независимое от того или иного уточнения понятия алгоритма. Мы дадим такое определение в терминах вычислимых функций.

2. Сделаем два предварительных замечания.

Первое. Множество возможных исходных данных и множество возможных результатов всякого алгоритма можно эффективно перенумеровать натуральными числами. Поэтому без потери общности можно ограничиться рассмотрением вычислимых арифметических функций одного переменного. Систему таких функций обозначим $\mathfrak{U}^{(1)}$. В дальнейшем мы будем заниматься лишь программами функций из $\mathfrak{U}^{(1)}$.

Второе. Каждая программа представляет собой конечную комбинацию символов, выбранных из фиксированного при данном способе программирования перечня. Множество всех комбинаций таких символов можно эффективно перенумеровать натуральными числами. Поэтому без потери общности можно в дальнейшем считать, что программы суть натуральные числа и каждый способ программирования есть просто некоторая нумерация [1]) системы $\mathfrak{U}^{(1)}$.

Задача, стало быть, свелась к тому, чтобы из всевозможных нумераций системы $\mathfrak{U}^{(1)}$ выделить те, которые являются способами программирования.

3. Нам понадобятся некоторые определения, связанные с нумерациями. Пусть ξ и η—две нумерации множества M. Скажем, что ξ *сводится* к η, коль скоро существует вычислимая функция g (*сводящая* ξ к η), обладающая следующим свойством: если e есть номер некоторого элемента $m \in M$ в нумерации ξ, то функция g определена для числа e и $g(e)$ есть номер того же элемента m в нумерации η.

Нумерация α системы $\mathfrak{U}^{(1)}$ называется *потенциально вычислимой*, коль скоро существует вычислимая функция f от двух переменных (*универсальная* для нумерации α), обладающая следующим свойством: если k есть номер функции $\varphi \in \mathfrak{U}^{(1)}$ в нумерации α, то функция $f(k, x)$, рассматриваемая как функция от x, совпадает с $\varphi(x)$.

Нумерация α системы $\mathfrak{U}^{(1)}$ называется *вполне накрывающей*, если к ней сводится всякая потенциально вычислимая нумерация системы $\mathfrak{U}^{(1)}$.

Можно доказать, что среди потенциально вычислимых нумераций системы $\mathfrak{U}^{(1)}$ существуют как вполне накрывающие нумерации, так и нумерации, не являющиеся вполне накрывающими. Нумерация системы $\mathfrak{U}^{(1)}$, являющаяся одновременно потенциально вычислимой и вполне накрывающей, называется *главной нумерацией второго рода*.

4. Приведём соображения в пользу того, что всякий способ программирования есть главная нумерация второго рода. Пусть α—какой-либо способ программирования.

Существует алгоритм применения вычислимой функции с данной программой к данному аргументу: если k—программа функции $\varphi \in \mathfrak{U}^{(1)}$, то этот алгоритм перерабатывает всякую пару (k, n), где n принадлежит области определения φ, в число $\varphi(n)$ и неприменим ни к какой паре (k, n), где n не принадлежит области определения φ. Этот алгоритм задаёт вычислимую функцию f, универсальную для нумерации α. Поэтому α—потенциально вычислимая нумерация.

Чтобы показать, что α—вполне накрывающая нумерация, надо для произвольной потенциально вычислимой нумерации α' системы $\mathfrak{U}^{(1)}$ построить вычислимую функцию g, сводящую α' к α. Пусть f'—универсальная вычислимая функция для нумера-

[1]) Нумерацией множества M называется произвольное отображение α произвольного множества E натуральных чисел на M. Если $\alpha(e)=m$, где $e \in E$, $m \in M$, то говорят, что e есть номер элемента m в нумерации α.

ции α'. Чтобы построить g, надо указать алгоритм, позволяющий от номера k функции $\varphi \in \mathfrak{U}^{(1)}$ в нумерации α' перейти к номеру функции φ в нумерации α, т. е. к программе функции φ при выбранном способе программирования. Искомый алгоритм задаётся так: «берём k; замечаем, что фраза „чтобы получить $\varphi(n)$, надо вычислить $f'(k, n)$“ есть предписание алгоритма, вычисляющего φ; кодируем это предписание в виде программы функции φ при выбранном способе программирования; эта программа и есть номер функции φ в нумерации α». Таким образом, α — вполне накрывающая нумерация.

Итак, каждый способ программирования является главной нумерацией второго рода. Покажем, что и обратно, всякую главную нумерацию второго рода можно рассматривать как способ программирования. Пусть β — главная нумерация второго рода системы $\mathfrak{A}^{(1)}$. Возьмём какой-нибудь способ программирования α. Поскольку α есть потенциально вычислимая нумерация, а β — вполне накрывающая, то по номеру функции φ в нумерации α (т. е. по программе функции φ) можно эффективно построить номер функции φ в нумерации β. Этот эффективный переход от программы к номеру в нумерации β можно трактовать как «изменение кода»; поэтому сам номер в нумерации β можно также считать программой (только иначе закодированный), а нумерацию β рассматривать как некоторый новый способ программирования.

Соображения этого пункта дают основания предложить понятие главной нумерации второго рода в качестве уточнения понятия «способ программирования». Поэтому в дальнейшем мы идентифицируем эти два понятия и под термином «программа» функции понимаем номер этой функции (при каком-либо фиксированном способе программирования).

5. Предложенное уточнение понятия программы позволяет дать определение конструктивного оператора и выяснить связь между конструктивными и вычислимыми операторами.

Будем рассматривать операторы, определённые на $\mathfrak{U}^{(1)}$ и принимающие в качестве значений также функции из $\mathfrak{U}^{(1)}$. Оператор $\mathbf{K}$ такого вида назовём *конструктивным относительно нумерации* α системы $\mathfrak{U}^{(1)}$, коль скоро существует вычислимая функция h, обладающая следующим свойством: если k есть номер функции $\psi \in \mathfrak{U}^{(1)}$ в нумерации α, то $h(k)$ есть номер функции $\varphi = \mathbf{K}(\psi)$ в той же нумерации. Можно доказать, что если α и β — два способа программирования, то оператор, конструктивный относительно одного из них, конструктивен и относительно другого. Всякий оператор, конструктивный относительно какого-нибудь (а значит, и относительно любого) способа программирования, будем называть просто *конструктивным оператором*.

Будем теперь рассматривать операторы, определённые на системе всех (а не только вычислимых) арифметических функций одного переменного и принимающие значения из этой же системы. Среди таких операторов выделяются вычислимые операторы. Интуитивное понимание вычислимости оператора $\mathbf{F}$ состоит в том, что существует общий метод, позволяющий вычислять функцию $\varphi = \mathbf{F}(\psi)$ по функции ψ, или, иными словами, общий метод, позволяющий выводить все верные равенства вида $\varphi(x) = y$ из системы всех верных равенств вида $\psi(x) = y$. Уточнение понятия вычислимого оператора состоит в том, что вычислимые операторы отождествляются с так называемыми частично-рекурсивными операторами [6]. Для наглядности действие вычислимого оператора можно себе представлять при помощи следующей схемы. Можно считать, что вычисление вычислимой функции $\varphi \in \mathfrak{U}^{(1)}$ осуществляется некоторой идеализированной счётной машиной с неограниченной, но конечной в каждый момент памятью; когда в машину вводится число n, принадлежащее области определения φ, то на выходе через некоторое время появляется $\varphi(n)$. Предположим теперь, что машина устроена таким образом, что в неё может подаваться информация о функции ψ (т. е. верные равенства вида $\psi(x) = y$) и значение $\varphi(n)$ появляется лишь после того, как в машину введено достаточное количество такой информации. Тогда возникающая на выходе функция φ будет зависеть от вводимой функции ψ, так что машина задаёт оператор $\varphi = F(\psi)$. Можно считать, что таким способом и образуются вычислимые операторы.

Вычислимый оператор переводит вычислимые функции в вычислимые. Поэтому каждый вычислимый оператор индуцирует некоторый оператор, определённый на $\mathfrak{U}^{(1)}$ и принимающий значения также из $\mathfrak{U}^{(1)}$. Класс таких индуцируемых операторов можно иначе определить как класс операторов, определённых на $\mathfrak{U}^{(1)}$ и продолжаемых до вычислимых операторов. Справедливы следующие теоремы:

Теорема I. *Всякий оператор, определённый на $\mathfrak{U}^{(1)}$ и продолжаемый до вычислимого оператора, является конструктивным* (частный случай теоремы 7 из [1]).

Теорема II. *Всякий конструктивный оператор, определённый на $\mathfrak{U}^{(1)}$, продолжается до вычислимого оператора* (частный случай теоремы 10 из [1]).

Оказывается, что теорема I однозначно выделяет способы программирования среди всех потенциально вычислимых нумераций. Именно, справедлива

Теорема III. *Пусть α — потенциально вычислимая нумерация системы $\mathfrak{U}^{(1)}$ и пусть всякий определённый на $\mathfrak{U}^{(1)}$ оператор, продолжаемый до вычислимого, является конструктивным относительно нумерации α. Тогда α есть способ программирования.* (Эта теорема отсутствует в заметке [1].)

6. При доказательстве существенно использовались топологические методы. В каждой системе функций была введена такая топология, при которой вычислимые операторы становятся непрерывными отображениями получающихся топологических пространств [7]. Далее, было введено [1] понятие τ-плотности множества, расположенного в топологическом пространстве. Теорема о том, что два непрерывных отображения топологического пространства X в топологическое пространство Y, совпадающих на некотором всюду плотном подмножестве пространства X, совпадают и на всём X, верна, если Y есть T_2-пространство, и может быть уже неверной, если Y есть T_1-пространство. Если заменить термин «всюду плотный» на «τ-плотный», то получим теорему, справедливую даже в том случае, когда Y есть T_0-пространство; эта последняя теорема и была использована. Наконец, оказалось целесообразным рассмотрение нумераций топологических пространств. На этом пути была получена, например, следующая

Теорема IV. *Фиксируем произвольный способ программирования. Невозможно разбить $\mathfrak{U}^{(1)}$ на два непересекающихся множества A и B так, чтобы существовала вычислимая функция χ, обладающая следующим свойством:*

а) *если k есть программа функции $\varphi \in A$, то $\chi(k)=0$;*

б) *если k есть программа функции $\varphi \in B$, то $\chi(k)=1$* (частный случай следствия из следствия теоремы 5 из [1]).

Результат теоремы IV оказывается простым следствием топологической связности системы $\mathfrak{U}^{(1)}$ (при введённой в $\mathfrak{U}^{(1)}$, как и в каждой системе функций, топологии).

7. В заключение отметим, что полученные результаты справедливы не только для системы $\mathfrak{U}^{(1)}$, но и для ряда других систем вычислимых функций. Более того, если отождествить каждую функцию с её графиком, то функция станет частным случаем множества, причём вычислимая функция — частным случаем перечислимого множества. Теория строилась именно для систем перечислимых множеств и для введённых в заметке [7] вычислимых операций над множествами (частным случаем таких операций являются вычислимые операторы). Важную роль в развитии теории сыграла восходящая к А. Н. Колмогорову идея абстрактного изучения нумераций.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Успенский, Системы перечислимых множеств и их нумерации, ДАН **105**, № 6 (1955), 1155—1158.

[2] E. L. Post, Finite combinatory process-formulation 1, The Journ. of Symb. Log. 1 (1936), 103—105.

[3] A. Church, The calculi of lambda-conversion, Princeton, 1941.

[4] А. А. Марков, Теория алгорифмов, Труды Матем. ин-та АН СССР 38 (1951), 176—189.

[5] А. Н. Колмогоров, О понятии алгоритма, УМН **VIII**, вып. 4 (1953), 175—176.
[6] S. C. Kleene, Introduction to metamathematics, 1952.
[7] В. А. Успенский, О вычислимых операциях, ДАН **103**, № 5 (1955), 773—776.

3. А. Н. Колмогоров «О научной командировке во Францию, ГДР и Польшу».

4. С. Л. Соболев «Краткий отчёт о научной командировке в Индию и Швецию».

Заседание 6 марта 1956 г.

1. А. М. Ильин «О вырождающихся уравнениях эллиптического и параболического типа».

В первой части рассматривается разрешимость задачи Дирихле для уравнения эллиптического типа

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} + \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x_0, x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \\ + \sum_{i=0}^{n} b_i(x_0, x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x_0, x_1, \ldots, x_n)u = 0 \quad (1)$$

в области D и первой краевой задачи для уравнения параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(t, x_0, x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} + \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(t, x_0, x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \\ + \sum_{i=0}^{n} b_i(t, x_0, x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(t, x_0, x_1, \ldots, x_n)u \quad (2)$$

в цилиндре R с основанием на плоскости $t=0$. Коэффициенты уравнений (1) и (2) имеют непрерывные третьи производные, $a_{ij}(x_0, \ldots, x_n)$ — положительно определённая матрица, а неотрицательная функция $f(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ обращается в нуль на некотором множестве M. В уравнении (1) коэффициент $c(x_0, x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0$.

Для доказательства решается краевая задача для некоторого невырожденного уравнения, коэффициенты которого отличаются от коэффициентов уравнения (1) (и соответственно уравнения (2)) не более чем на ε. Далее оценками типа оценок Бернштейна доказывается, что получающиеся решения $u_\varepsilon(P)$ компактны в C_2 внутри области D (и в R соответственно). Предельная функция удовлетворяет уравнению (1) (и (2) соответственно).

То обстоятельство, что она удовлетворяет и краевым условиям, доказывается построением так называемых барьеров.

Задача Дирихле для уравнения (1) разрешима, если множество M состоит из конечного числа внутренних гладких гиперповерхностей, касательная плоскость к которым не имеет характеристического направления и из произвольного замкнутого внутреннего множества, где $b_0(x_0, x_1, \ldots, x_n) \neq 0$.

В случае двух переменных задача Дирихле для уравнения разрешима, если, кроме того, в множество M входят гладкие кривые, пересекающиеся друг с другом и с границей D в конечном числе точек и имеющие в конечном числе точек характеристическое направление. В окрестности этих точек должно выполняться условие $|b_0(x_0, x_1, \ldots, x_n)|^k \leqslant f(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ для некоторого $k > 0$. (Последнее условие ошибочно не оговорено в работе автора в ДАН **102**, № 1.)