ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1960 МАТЕМАТИКА № 2(15)

В. А. Успенский

К ВОПРОСУ О СООТНОШЕНИИ МЕЖДУ РАЗЛИЧНЫМИ СИСТЕМАМИ КОНСТРУКТИВНЫХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ [1]

Как известно, существуют различные подходы к определению действительных чисел. Можно определять действительные числа при помощи фундаментальных последовательностей рациональных чисел (определение Кантора), при помощи сечений в области рациональных чисел (определение Дедекинда), при помощи последовательностей вложенных сегментов с рациональными концами. Можно, наконец, определять действительные числа при помощи бесконечных десятичных дробей (или двоичных дробей или, вообще, систематических дробей с каким-либо фиксированным основанием). „Конструктивизируя" (ср. [7]) любое из перечисленных определений, мы приходим к соответствующему варианту определения конструктивных или вычислимых действительных чисел [2, 3].

Все эти варианты эквивалентны друг другу в том смысле, что действительное число, являющееся вычислимым согласно одному из этих вариантов, является вычислимым и согласно любому другому варианту [3]. Однако каждый вариант определения вычислимых действительных чисел сопровождается специфической для данного варианта системой обозначений этих чисел. Поэтому можно поставить вопрос о конструктивной эквивалентности различных определений. Именно, естественно назвать два варианта определения вычислимых действительных чисел конструктивно эквивалентными, если соответствующие системы обозначений алгоритмически сводятся одна к другой в том смысле, что существует алгоритм, дающий по всякому обозначению вычислимого действительного числа в одной системе обозначение того же числа в другой системе. Все перечисленные определения (за исключением связанных с систематическими дробями) конструктивно эквивалентны друг другу [6].

Что же касается определений вычислимых действительных чисел через систематические дроби, то они не являются конструктивно эквивалентными другим определениям; даже определения, формулирующиеся на основе систематических дробей при разных основаниях, не являются конструктивно эквивалентными между собой, если только соответствующие основания не связаны специальными соотношениями.

Доказательству отсутствия конструктивной эквивалентности в тех случаях, когда она действительно отсутствует, и посвящена настоящая статья.

---

[1] Результаты настоящей статьи были сообщены автором 31. X. 1957 г. в его докладе „О конструктивном математическом анализе" на научной конференции Московского университета „Ломоносовские чтения", посвященной 40-й годовщине Великой Октябрьской социалистической революции.

1. Варианты определения вычислимых действительных чисел

Вычислимые функции с натуральными аргументами и значениями мы будем отождествлять с частично-рекурсивными функциями. Будем использовать также понятие вычислимой функции с рациональными аргументами и значениями. Возможные уточнения этого понятия очевидны. Например, поскольку рациональное число можно рассматривать как тройку натуральных, то принимающую рациональные значения функцию от n рациональных аргументов можно рассматривать как тройку принимающих натуральные значения функций от $3n$ натуральных аргументов и называть вычислимой, если эта тройка составлена из вычислимых функций.

Сформулируем теперь те различные определения вычислимых действительных чисел, о которых выше шла речь.

А) Действительное число ξ назовем *вычислимым по Кантору*, если существует сходящаяся к ξ вычислимая последовательность рациональных чисел (т. е. вычислимая функция с рациональными значениями, определенная на натуральном ряду), обладающая вычислимым регулятором сходимости. (Функция h с рациональными аргументами и натуральными значениями называется *регулятором сходимости* для последовательности $\{a_n\}$, если для всякого положительного рационального числа ε из неравенств $k \geqslant h(\varepsilon)$, $l \geqslant h(\varepsilon)$ вытекает неравенство $|a_k - a_l| < \varepsilon$.

Б) Действительное число ξ назовем *вычислимым по Дедекинду*, если существует вычислимая функция, определенная для любого, отличного от ξ, рационального числа и принимающая значение 0 для всех рациональных чисел, меньших чем ξ, и значение 1 для всех рациональных чисел, больших чем ξ.

В) Действительное число ξ назовем *сегментно вычислимым*, если существует вычислимая последовательность вложенных сегментов с рациональными концами, единственной общей точкой которых является ξ.

Г$_q$) ($q = 2, 3, 4 \ldots$). Действительное число ξ назовем *q-ично вычислимым*, если оно разлагается в систематическую дробь с основанием q, знаки которой образуют вычислимую последовательность.

Все эти определения, как сказано выше, эквивалентны. (Доказательство их эквивалентности может быть легко получено „конструктивизацией" доказательства эквивалентности соответствуюших классических определений понятия действительного числа [3].) Следовательно, все они приводят к одной и той же совокупности *вычислимых* или *конструктивных* действительных чисел.

2. Системы обозначений вычислимых действительных чисел

Каждое из определений А), Б), В), Г$_q$) порождает свою систему обозначений вычислимых действительных чисел. Прежде всего заметим, что, в силу этих определений, мы можем связать с каждым вычислимым числом некоторые вычислимые функции или пары таких функций. Именно, будем говорить про вычислимое действительное число ξ, что оно

а) *определяется по Кантору* парой вычислимых функций (φ, h), если φ есть последовательность рациональных чисел, сходящаяся к ξ, а h есть регулятор сходимости этой последовательности;

б) *определяется по Дедекинду* вычислимой функцией χ, если χ определена для любого рационального числа, отличного от ξ, причем $\chi(r) = 0$ при $r < \xi$ и $\chi(r) = 1$ при $r > \xi$;

в) *сегментно определяется* парой вычислимых функций (α, β), если α и β суть соответственно последовательность левых и последовательность правых концов сегментов с рациональными концами, сходящихся к ξ;

г$_q$) ($q=2, 3, 4, \ldots$) *q-ично определяется* вычислимой функцией γ, если γ есть последовательность знаков разложения числа ξ в q-ичную систематическую дробь.

Теперь мы можем сделать еще один шаг и перейти от вычислимых функций к их гёделевским номерам, т. е. номерам в некоторой специальной нумерации[1], называемой гёделевской. Для вычислимых функций с натуральными аргументами и значениями (т. е. частично-рекурсивных функций) гёделевская нумерация определена в книге Клини [1]. На основе этой нумерации можно задать некоторую нумерацию множества вычислимых функций с рациональными аргументами и значениями, которую мы также будем называть гёделевской. Именно, как указано выше, каждая функция с рациональными аргументами и значениями задается тройкой частично-рекурсивных функций с натуральными аргументами и значениями. Фиксируем какой-нибудь вычислимый пересчет всех упорядоченных троек натуральных чисел (т. е. такой пересчет

$$(x_0, y_0, z_0), \quad (x_1, y_1\ z_1), \quad (x_2, y_2, z_2), \ldots,$$

у которого функции $x_i\ y_i$, z_i являются вычислимыми). Назовем теперь число n гёделевским номером функции f с рациональными аргументами и значениями, если n-ая тройка в указанном пересчете является тройкой гёделевских номеров частично-рекурсивных функций, задающих функцию f.

Мы введем теперь следующие определения:

А) Пара натуральных чисел является *канторовым обозначением* вычислимого действительного числа ξ, если члены этой пары суть гёделевские номера двух вычислимых функций, образующих пару, определяющую по Кантору число ξ.

Б) Натуральное число является *дедекиндовым обозначением* вычислимого действительного числа ξ, если это натуральное число есть гёделевский номер вычислимой функции, определяющей по Дедекинду число ξ.

В) Пара натуральных чисел является *сегментным обозначением* вычислимого действительного числа ξ, если члены этой пары суть гёделевские номера двух вычислимых функций, образующих пару, сегментно определяющую число ξ.

Г$_q$) ($q=2, 3, 4, \ldots$). Натуральное число является *q-ичным обозначением* вычислимого действительного числа ξ, если это число есть гёделевский номер вычислимой функции, q-ично определяющей число ξ.

Таким образом, мы получили для вычислимых действительных чисел целый ряд систем обозначений: канторову систему, дедекиндову систему, сегментную систему и q-ичные системы ($q=2, 3, 4, \ldots$).

В любой из этих систем каждое вычислимое действительное число имеет бесконечно много обозначений.

З а м е ч а н и е 1. Перечисленные выше системы обозначений строились нами в предположении, что фиксированы следующие две ну-

---

[1] *Нумерацией* множества M называется произвольное отображение α произвольного множества E натуральных чисел на M. Если $\alpha(e)=m$, где $e \in E$, $m \in M$, то говорят, что e есть *номер* элемента m в нумерации α.

мерации: 1) некоторая нумерация (а именно гёделевская) множества частично-рекурсивных функций, 2) некоторая нумерация множества упорядоченных троек натуральных чисел. Если взять какую-либо другую нумерацию множества частично-рекурсивных функций и какую-либо другую нумерацию множества упорядоченных троек натуральных чисел, то мы получим другую канторову, другую дедекиндову, другую сегментную и — при каждом q — другую q-ичную систему обозначений. Все сказанное ниже останется, в силу результатов заметки [4], верным, если в качестве нумерации множества частично-рекурсивных функций взять произвольную главную нумерацию второго рода, частным случаем которой является гёделевская нумерация, и в качестве нумерации множества троек натуральных чисел — произвольный вычислимый пересчет. Однако, чтобы не осложнять изложение, говоря просто о канторовой, дедекиндовой и т. д. системах обозначений, мы, если не оговорено противное, будем иметь в виду именно те системы обозначений, которые задаются определениями *А*), *Б*), *В*), $Г_q$).

3. Сводимость и эквивалентность систем обозначений

Если обобщить понятие нумерации и называть нумерациями не только отображения множеств натуральных чисел, но и отображения множеств кортежей[1], то станет ясным, что каждая из введенных нами систем обозначений есть ни что иное, как некоторая нумерация множества вычислимых действительных чисел. Повторяя определения из сообщения [5], мы скажем, что система обозначений I *сводится* к системе обозначений II, коль скоро существует алгоритм (*сводящий* I к II), позволяющий по произвольному обозначению произвольного вычислимого действительного числа в системе I найти одно из обозначений того же числа в системе II. Две системы обозначений назовем *эквивалентными*, если каждая из них сводится к другой.

Вопрос об эквивалентности различных систем обозначений имеет значение для теории конструктивных или вычислимых функций действительного переменного. Конструктивная функция действительного переменного определяется, грубо говоря, как такая функция, для которой существует алгоритм, перерабатывающий всякое обозначение аргумента в одно из обозначений значения функции. Неэквивалентные системы обозначений могут, поэтому, привести к неравнообъемным понятиям конструктивной функции действительного переменного.

Отношения сводимости и эквивалентности систем обозначений рефлексивны и транзитивны, причем отношение эквивалентности еще и симметрично, так что совокупность систем обозначений распадается на классы эквивалентных систем.

Замечание 2. Как уже говорилось в замечании 1, можно выбирать различные главные нумерации второго рода множества частично-рекурсивных функций и различные вычислимые пересчеты множества троек натуральных чисел. При этом будут получаться различные канторовы, дедекиндовы и т. д. системы обозначений. Однако все получаемые таким образом канторовы системы обозначений эквивалентны друг другу. Сформулированное утверждение

---

[1] Как известно, *кортежем* называется произвольный конечный упорядоченный набор натуральных чисел.

остается верным при замене слова „канторова" на слова „дедекиндова", „сегментная", „2-ичная", „3-ичная", „4-ичная" и т. д. (Все эти утверждения немедленно получаются из того факта, что все главные нумерации второго рода сводятся друг к другу и все вычислимые пересчеты множества троек натуральных чисел сводятся друг к другу.) Поэтому, в силу транзитивности отношения сводимости, если какая-либо конкретная система обозначений какого-либо одного типа (например, какая-либо из канторовых систем) сводятся к какой-либо конкретной системе обозначений какого-либо другого типа (например, к какой-либо из 12-ричных систем) то и любая система первого типа будет сводиться к любой системе второго типа (в нашем примере — любая канторова к любой 12-ричной).

Теорема 1. *Канторова, дедекиндова и сегментная системы обозначений эквивалентны.*

Теорема 1 получается из рассмотрения доказательств того, что всякое действительное число, являющееся вычислимым, согласно одному из определений *А*), *Б*), *В*), является вычислимым и согласно любому другому из этих определений. Все эти доказательства носят конструктивный характер в том смысле, что содержат способ, позволяющий, отправляясь от вычислимых функций, определяющих данное вычислимое действительное число, согласно одному из определений а), б), в), построить вычислимые функции, определяющие это же число согласно любому другому из этих определений.

Этот способ может быть оформлен в виде вычислимого (т. е. частично-рекурсивного [1]) оператора, преобразующего функции в функции; следовательно, согласно теореме XXIV (в) из книги [1], существует алгоритм, преобразующий гёделевские номера в гёделевские номера, а поэтому и алгоритм, преобразующий обозначения в одной системе в обозначения в другой системе; таким образом, имеет место сводимость систем обозначений. Аналогичные рассуждения применимы и к доказательству того, что действительное число, вычислимое согласно какому-то из определений Γ_q), вычислимо и согласно любому из определений *А*), *Б*), *В*). Поэтому имеет место следующая

Теорема 2. *Каково бы ни было q, q-ичная система обозначений сводится к канторовой, дедекиндовой и сегментной системам.*

Напротив, доказательство того, что всякое действительное число, вычислимое согласно определениям *А*), *Б*), *В*), вычислимо согласно какому-то из определений Γ_q), не конструктивно в том смысле, что здесь не указывается общего способа, как, скажем, по произвольной вычислимой последовательности и ее вычислимому регулятору сходимости построить разложение предела этой последовательности в q-ичную дробь. Поэтому можно ожидать, что имеет место следующая

Теорема 3. *Каково бы ни было q, ни канторова, ни дедекиндова, ни сегментная системы обозначений не сводятся к q-ичной системе.*

Эта теорема действительно верна. В силу теоремы 2 и транзитивности отношения сводимости, она непосредственно вытекает из следующей теоремы 4:

Теорема 4. *Для того, чтобы s-ичная система обозначений сводилась к q-ичной, необходимо и достаточно, чтобы множество простых делителей числа q содержалось в множестве простых делителей числа s.*

Доказательство этой основной теоремы и составит оставшуюся часть статьи. Заметим только, прежде чем перейти к доказательству, что теоремы 3 и 4 допускают следующие очевидные следствия:

Следствие теоремы 3. *Каково бы ни было q, ни канторова, ни дедекиндова, ни сегментная системы обозначений не являются эквивалентными q-ичной системе.*

Следствие теоремы 4. *s-ичная и q-ичная системы обозначений тогда и только тогда эквивалентны, когда s и q обладают одними и теми же простыми делителями.*

4. Доказательство достаточности условия теоремы 4

Пусть множество простых делителей числа q содержится в множестве простых делителей числа s. Покажем, что s-ичная система обозначений сводится к q-ичной системе.

Заметим, прежде всего, что существуют такие натуральные числа m и d, что

$$s^m = dq, \tag{1}$$

откуда, при любом i,

$$s^{im} = d^i q^i. \tag{2}$$

Пусть

$$\xi = b_0 + \frac{b_1}{s} + \frac{b_2}{s^2} + \ldots + \frac{b_i}{s^i} + \ldots \quad (0 \leqslant b_i < s \text{ при } i > 0).$$

Укажем способ построения такой последовательности $\{a_i\}$ $(0 \leqslant a_i < q$ при $i > 0)$, что

$$\xi = a_0 + \frac{a_1}{q} + \frac{a_2}{q^2} + \ldots + \frac{a_i}{q^i} + \ldots .$$

Положим

$$B_j = s^j \sum_{k=0}^{j} \frac{b_k}{s^k}. \tag{3}$$

Очевидно

$$\frac{B_j}{s^j} \leqslant \xi \leqslant \frac{B_j + 1}{s^j} \quad (j = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Для каждого i обозначим через A_i то единственное число y, которое удовлетворяет неравенствам

$$yd^i \leqslant B_{im} < B_{im} + 1 \leqslant (y+1)\, d^i,$$

так что

$$A_i d^i \leqslant B_{im} < B_{im} + 1 \leqslant (A_i + 1)\, d^i. \tag{5}$$

Очевидно, A_i можно определить как наименьшее число y, удовлетворяющее неравенству $(y+1)\, d^i \geqslant B_{im} + 1$, т. е.

$$A_i = \mu y\, [(y+1)\, d^i \geqslant B_{im} + 1]. \tag{6}$$

Соотношения (4) и (5) дают, с учетом (2),

$$\frac{A_i}{q^i} \leqslant \xi \leqslant \frac{A_i + 1}{q^i}. \tag{7}$$

Поэтому, если положить

$$a_0 = A_0, \tag{8}$$

$$a_i = A_{i+1} - qA_i \quad (i = 1, 2, 3, \ldots), \tag{9}$$

то получим

$$\xi = a_0 + \frac{a_1}{q} + \frac{a_2}{q^2} + \ldots + \frac{a_i}{q^i} + \ldots. \tag{10}$$

Чтобы убедиться, что (10) есть разложение числа ξ в q-ичную систематическую дробь, надо обнаружить еще, что при $i > 0$

$$0 \leqslant a_i < q. \tag{11}$$

Для этого заметим, что сегменты $\left[\frac{B_j}{s^j}, \frac{B_j + 1}{s^j}\right]$ вложены друг в друга, а сегмент $\left[\frac{A_i}{q^i}, \frac{A_i + 1}{q^i}\right]$ определяется как единственный из сегментов вида $\left[\frac{y}{q^i}, \frac{y+1}{q^i}\right]$, целиком содержащий сегмент $\left[\frac{B_{im}}{s^{im}}, \frac{B_{im} + 1}{s^{im}}\right]$. Поэтому сегменты $\left[\frac{A_i}{q^i}, \frac{A_i + 1}{q^i}\right]$ тоже вложены друг в друга, то есть

$$\frac{A_i}{q^i} \leqslant \frac{A_{i+1}}{q^{i+1}} < \frac{A_{i+1} + 1}{q^{i+1}} \leqslant \frac{A_i + 1}{q^i}. \tag{12}$$

Требуемые неравенства (11) получаются теперь, с учетом (9), простым преобразованием неравенств (12).

Подытоживая сказанное, мы получаем, что последовательность $\{a_i\}$ получается из последовательности $\{b_i\}$ посредством равенств (3), (6), (8), (9). Эти равенства задают вычислимый (т. е. частично-рекурсивный) оператор, перерабатывающий последовательность $\{b_i\}$ в последовательность $\{a_i\}$. Поэтому, в силу теоремы XXIV(b) из книги [1], существует алгоритм, перерабатывающий гёделевский номер последовательности $\{b_i\}$ в гёделевский номер последовательности $\{a_i\}$, т. е. перерабатывающий s-ичное обозначение произвольного вычислимого действительного числа ξ в q-ичное обозначение этого же числа. А это и значит, что s-ичная система обозначений сводится к q-ичной.

Замечание 3. По такому образцу протекают и другие упоминавшиеся ранее доказательства сводимости систем обозначений (в тех случаях, когда эта сводимость имеет место).

5. Доказательство необходимости условия теоремы 4

Пусть множество простых делителей числа q не содержится в множестве простых делителей числа s. Покажем, что s-ичная система обозначений не сводится к q-ичной.

Заметим, прежде всего, что не существует таких натуральных чисел m и d, что $s^m = dq$; следовательно, рациональное число $\frac{1}{q}$ не является s-ично рациональным, т. е. ни при каких целых m и d не имеет вида $\frac{d}{s^m}$.

Пусть

$$\frac{1}{q} = b_0 + \frac{b_1}{s} + \frac{b_2}{s^2} + \ldots + \frac{b_i}{s^i} + \ldots \quad (b_0 = 0,\ 0 \leqslant b_i < s \text{ при } i > 0)$$

есть разложение числа $\frac{1}{q}$ в s-ичную систематическую дробь. Последовательность $\{b_i\}$ является вычислимой (ибо всякое рациональное число является вычислимым, в частности, s-ично вычислимым). Так как $\frac{1}{q}$ не есть s-ично рациональное число, то при каждом j

$$\sum_{k=0}^{j} \frac{b_k}{s^k} < \frac{1}{q} < \sum_{k=0}^{j} \frac{b_k}{s^k} + \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{s-1}{s^k}. \tag{1}$$

Пусть C_0 и C_1 суть два непересекающихся рекурсивно-перечислимых множества натуральных чисел. Предположим, что s-ичная система обозначений сводится к q-ичной и построим, исходя из этого предположения, два обще-рекурсивных множества P_0 и P_1, отделяющих C_0 и C_1, т. е. таких, что $C_0 \subseteq P_0$ и $C_1 \subseteq P_1$.

Приступаем к построению. В силу теоремы XIV из книги [1], существуют такие обще-рекурсивные предикаты R_0 и R_1, что

$$x \in C_0 \equiv (Ey)\, R_0(x, y); \quad x \in C_1 \equiv (Ey)\, R_1(x, y).$$

Предикаты R_0 и R_1 можно, конечно, выбрать так, чтобы при всяком x значениями $R_0(x, 0)$ и $R_1(x, 0)$ служила бы ложь. Введем вычислимую функцию φ от двух аргументов посредством равенств

$$\varphi(n, k) = \begin{cases} 0, & \text{если } (Ey)_{y \leqslant k} R_0(n, y), \\ s-1, & \text{если } (Ey)_{y \leqslant k} R_1(n, y), \\ b_k & \text{— в остальных случаях.} \end{cases}$$

В силу специального выбора предикатов R_0 и R_1, при любом n выполняется равенство

$$\varphi(n, 0) = b_0 = 0. \tag{2}$$

Рассмотрим для каждого n вычислимое действительное число

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(n, k)}{s^k}.$$

В силу (2), справедливы неравенства

$$0 \leqslant \xi_n \leqslant 1. \tag{3}$$

Заметим, что в силу (1)

$$\text{(i), если } n \in C_0, \text{ то } \xi_n < \frac{1}{q},$$

$$\text{(ii), если } n \in C_1, \text{ то } \xi_n > \frac{1}{q}.$$

Пусть e — гёделевский номер функции φ (как функции двух аргументов). Возьмем функцию S_1^1, введенную в теореме XXIII из книги Клини [1]; в силу этой теоремы при каждом фиксированном n число $\rho(n) = S_1^1(e, n)$ есть гёделевский номер функции $\varphi(n, k)$, рассматриваемой как функция одного лишь второго аргумента. По определению, $\rho(n)$ есть s-ичное обозначение вычислимого действительного числа ξ_n. По предположению, s-ичная нумерация сводится к q-ичной. Поэтому существует вычислимая функция g, дающая по s-ичному обозначению вычислимого действительного числа его q-ичное обозначение. Следовательно, $\sigma(n)=g(\rho(n))$ есть q-ичное обозначение числа ξ_n, т. е. гёделевский номер последовательности знаков разложения числа ξ_n в q-ичную дробь. Поэтому $\Phi_1(\sigma(n); i)$, где Φ_1 — универсальная функция, построенная Клини [1], есть i-тый знак разложения числа ξ_n в q-ичную дробь. Отсюда, в силу неравенств (3),

(iii), если $\xi_n<\frac{1}{q}$, то $\Phi_1(\sigma(n), 0)=0$ и $\Phi_1(\sigma(n), 1)=0$; и

(iv), если $\xi_n>\frac{1}{q}$, то $\Phi_1(\sigma(n), 0)=1$ или $\Phi_1(\sigma(n), 1)\geqslant 1$.

Соотношения (i), (ii), (iii), (iv) дают, что

(v), если $n\in C_0$, то $\Phi_1(\sigma(n), 0)=0$ и $\Phi_1(\sigma(n), 1)=0$;

(vi), если $n\in C_1$, то $\Phi_1(\sigma(n), 0)=1$ или $\Phi_1(\sigma(n), 1)\geqslant 1$.

Обозначим через P_0 множество тех n, для которых $\Phi_1(\sigma(n), 0)=0$ и $\Phi_1(\sigma(n), 1)=0$ и через P_1 множество тех n, для которых $\Phi_1(\sigma(n), 0)=1$ или $\Phi_1(\sigma(n), 1)\geqslant 1$. Множества P_0 и P_1 суть два обще-рекурсивных множества, которые, в силу соотношений (v), (vi), отделяют C_0 и C_1.

Итак, мы для любых непересекающихся рекурсивно-перечислимых множеств построили отделяющие их обще-рекурсивные множества. А это противоречит существованию рекурсивно-неотделимой пары рекурсивно-перечислимых множеств ([1], стр. 277). Полученное противоречие означает, что наше предположение о сводимости s-ичной нумерации к q-ичной является на самом деле ложным.

Замечание 4. Если $n\in C_0\cup C_1$, то ξ_n является рациональным числом. Может показаться, что при доказательстве необходимости существенно используется то обстоятельство, что алгоритм, отсутствие которого мы доказываем, а именно, сводящий s-ичную систему обозначений к q-ичной, должен применяться и к обозначениям s-ично рациональных чисел (а при разложении в s-ичные систематические дроби s-ично рациональные числа вызывают затруднения, поскольку допускают неоднозначное разложение). Однако это не так. Можно доказать следующее утверждение: если необходимое и достаточное условие теоремы 4 не выполнено, то не существует алгоритма, который бы по всякому s-ичному обозначению произвольного иррационального числа давал бы q-ичное обозначение этого же числа. Доказательство этого утверждения повторяет только что проведенное доказательство необходимости, с той единственной разницей, что теперь функцию φ надо определить несколько сложнее, а именно:

$$\varphi(n, k)=\begin{cases} 0, \text{ если } k=\mu t\,[(Ey)_{y<t}R_0(n, y)\,\&\,b_t\neq 0],\\ s-1, \text{ если } k=\mu t\,[(Ey)_{y<t}R_1(n, y)\,\&\,b_t\neq s-1],\\ b_k \text{ — в остальных случаях.}\end{cases}$$

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
26 VII 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. С. К. Клини. Введение в метаматематику. ИИЛ, М., 1957.
2. E. Specker. Nicht konstruktiv beweisbare Sätze der Analysis. Journ. of Symbolic Logic, v. 14, № 3, pp. 145—158, 1949.

3. H. G. Rice. Recursive real numbers. Proc. Amer. Math. Soc., v. 5, № 5. pp. 784—791, 1954.

4. В. А. Успенский. Системы перечислимых множеств и их нумерации, ДАН СССР, т. 105, № 6, стр. 1155—1158, 1955.

5. В. А. Успенский. Вычислимые операции и понятие программы. УМН, т. XI, вып. 4 (70), стр. 172—176, 1956.

6. И. Д. Заславский. О конструктивных дедекиндовых сечениях. Тр. Третьего Всес. матем. съезда, т. 1, стр. 182—183, Изд. АН СССР, М., 1956.

7. В. А. Успенский. К теореме о равномерной непрерывности. УМН, т. XII, вып. 1 (73), стр. 99—142, 1957.