МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 6, № 1 (1969), 3—9

УДК 51.01.16

О СВОДИМОСТИ ВЫЧИСЛИМЫХ И ПОТЕНЦИАЛЬНО ВЫЧИСЛИМЫХ НУМЕРАЦИЙ

В. А. Успенский

Среди нумераций классов перечислимых множеств выделяются те, в которых номер несет информацию об имеющем этот номер множестве,— таковы вычислимые и потенциально вычислимые нумерации — и те, в которых множество несет информацию о своем номере,— таковы накрывающие и вполне накрывающие нумерации. Устанавливаются условия, необходимые и достаточные для того, чтобы все нумерации данного класса были накрывающими. Как следствие устанавливается существование накрывающих нумераций, не являющихся вполне накрывающими. Библ. 9 назв.

§ 1. Предварительные замечания. Как известно [3, 6, 7, 9], *нумерацией* множества M называется произвольное отображение произвольного множества натуральных чисел, называемого *основанием* нумерации [6], или *номерным множеством* [7, 9] на множество M, называемое *нумеруемым* множеством. (Иногда объем понятия «нумерация» ограничивают дополнительным требованием, чтобы основание нумерации было разрешимым (обще-рекурсивным) множеством [5] или даже просто натуральным рядом [8, 9].) Если α — нумерация и $\alpha(e) = m$, то говорят, что e есть *номер* элемента m в нумерации α. Пусть ξ и η — произвольные нумерации множеств K и L. Естественно называть ξ сводящейся к η, если мы «умеем находить» элементы из K по их номерам в ξ в предположении, что мы «умеем находить» элементы из L по их номерам в η. Этот замысел уточняется следующим определением (всюду ниже выражение $!\,\varphi(a)$ означает, что функция φ определена для объекта a): скажем, что ξ *сводится* к η, коль скоро существует частично-рекурсивная функция g (*сводящая* ξ к η), обладающая следующим свойством: если $!\,\xi(e)$, то $!\,\eta(g(e))$ и $\xi(e) = \eta(g(e))$; очевидно, что в этом случае $K \subseteq L$ (в [4] сводимость определялась лишь для случая $K = L$).

Замечание. Если ξ и η — произвольные функции, то естественно говорить, что ξ ***R**-сводится* к η (где $\boldsymbol{R}$ — некоторое множество функций), коль скоро существует такая функция g из $\boldsymbol{R}$ (*сводящая* ξ к η), что для любого e из $!\,\xi(e)$ вытекает $!\,\eta(g(e))$ и $\xi(e) = \eta(g(e))$. Тогда описанная выше сводимость нумераций есть частный случай $\boldsymbol{R}$-сводимости, возникающий, когда аргументы функций ξ и η суть натуральные числа, а $\boldsymbol{R}$ есть класс всех частично-рекурсивных функций.

ЛЕММА. *Пусть K бесконечно и $K \subseteq L$. Для каждой нумерации ξ множества K существует нумерация η множества L, к которой ξ не сводится.*

Доказательство. Пусть

$$K = \{A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots\}$$

и пусть для каждого i число e_i есть какой-либо из номеров множества A_i в нумерации ξ. Пусть φ — взаимнооднозначное отображение множества

$$E = \{e_0, e_1, e_2, e_3, \ldots\}$$

на натуральный ряд, не продолжаемое до частично-рекурсивной функции (такое существует хотя бы из мощностных соображений). Построим нумерацию η множества L, полагая по определению

$$\eta(2n) = \xi(\varphi^{-1}(n)),$$
$$\eta(2n+1) = \varepsilon(n),$$

где ε — произвольная нумерация множества $L \setminus K$ (если $L \setminus K = \phi$, то $\eta(2n+1)$ не определено ни при каком n). Если бы частично-рекурсивная g сводила ξ к η, то функция $y = \left[\frac{g(x)}{2}\right]$ являлась бы продолжением функции φ, в противоречии с выбором последней. Действительно, с одной стороны, $\xi(e_i) = \eta(g(e_i))$, а с другой стороны, $\xi(e_i) = \xi(\varphi^{-1}(\varphi(e_i))) = \eta(2\varphi(e_i))$; поэтому (так как η любое свое значение, принимаемое для четного аргумента, принимает только один раз) $g(e_i) = 2\varphi(e_i)$.

§ 2. Нумерация классов перечислимых множеств. Для различных вопросов теории вычислимых функций особый интерес представляют те нумерации, в которых нумеруемыми множествами служат какие-либо классы перечислимых множеств или вычислимых функций. Поскольку график всякой вычислимой функции есть перечислимое множество, то при отождествлении функций с их графиками вычислимые функции оказываются частным видом перечислимых множеств. Поэтому достаточно ограничиться нумерациями классов перечислимых множеств; лишь такие нумерации будут рассматриваться в дальнейшем.

Среди всех нумераций классов перечислимых множеств выделяются нумерации, являющиеся в определенном смысле «адекватными» нумеруемому классу или «информативными». Требование «информативности» распадается на два требования: 1) номера должны нести достаточно полную информацию о нумеруемых объектах; 2) нумеруемые объекты должны нести достаточно полную информацию о своих номерах.

Первое из этих требований предполагает наличие эффективной процедуры, позволяющей по каждому номеру порождать элементы имеющего этот номер множества; оно, это требование, уточняется с помощью понятий вычислимой нумерации и потенциально вычислимой нумерации. Нумерация α некоторого класса перечислимых множеств называется *вычислимой* [3], если, во-первых, перечислимо ее основание и, во-вторых, перечислимо множество всех пар $\langle e, m\rangle$, где $m \in \alpha(e)$ (первое условие может не вытекать из второго для случая, когда нумеруемый класс содержит пустое множество). Нумерация α называется *потенциально вычислимой* [3], если она сводится к некоторой вычислимой нумерации (в терминологии заметки [3] — если она вложена в некоторую занумерованную систему с вычислимой нумерацией). Естественность последнего определения оправдывается следующим утверждением (ср. определение потенциально рекурсивной функции у А. Черча [1]: *нумерация тогда и только тогда потенциально вычислима, когда она продолжается до некоторой вычислимой нумерации*. [Продолжаемость понимается в обычном для функций смысле: γ есть продолжение для α, коль скоро для всякого e из $!\,\alpha(e)$ вытекает, что $!\gamma(e)$ и $\gamma(e) = \alpha(e)$. В одну сторону утверждение очевидно, поскольку всякая нумерация тривиальным образом сводится к любому своему продолжению. Если теперь α сводится посредством вычислимой сводящей функции g

к вычислимой нумерации β, то находим вычислимую нумерацию γ, являющуюся продолжением для α, полагая по определению $\gamma(e) = \beta(g(e))$.]. Как хорошо известно [3], всякий класс перечислимых подмножеств какого-либо перечислимого множества обладает потенциально вычислимой нумерацией (продолжаемой, например, до вычислимой нумерации всех перечислимых подмножеств данного множества), но не всякий класс перечислимых подмножеств обладает вычислимой нумерацией (например, ею не обладает класс всех обще-рекурсивных функций одного аргумента).

Второе из требований «информативности» предполагает наличие эффективной процедуры, позволяющей получать номер (в рассматриваемой нумерации) множества, коль скоро мы располагаем каким-либо способом задания этого множества, например, располагаем номером в какой-либо вычислимой или потенциально вычислимой нумерацией. Оно, это требование, уточняется с помощью понятий накрывающей нумерации и вполне накрывающей нумерации [3]. Нумерация некоторого класса перечислимых множеств называется *накрывающей* (соответственно *вполне накрывающей*), если к ней сводится любая вычислимая (соответственно любая потенциально вычислимая) нумерация любого подкласса этого класса.

Хотя для многих классов перечислимых множеств всякая накрывающая нумерация является и вполне накрывающей ([3], теорема 4), вопрос о существовании накрывающих, но не вполне накрывающих нумераций оставался открытым. Ниже (§ 4) показывается, что такие нумерации существуют.

ЛЕММА. *Фиксируем какое-либо перечислимое множество. Каждый бесконечный класс его перечислимых подмножеств обладает нумерацией, не являющейся вполне накрывающей.*

Доказательство. Пусть M — бесконечный класс перечислимых подмножеств. В лемме из § 1 положим $K = L = M$, а в качестве ξ возьмем произвольную потенциально вычислимую нумерацию класса M. Тогда существующая по указанной лемме нумерация η будет искомой.

§ 3. Классы, все нумерации которых — накрывающие. Класс перечислимых множеств, допускающий вычислимую нумерацию, условимся называть *перечислимым*.

ТЕОРЕМА. *Для того чтобы всякая нумерация некоторого класса перечислимых множеств была накрывающей, необходимо и достаточно, чтобы этот класс не содержал ни* а) *бесконечного перечислимого подкласса, ни* б) *такой пары множеств B, C, что $B \subset C$.*

Замечание 1. Условие б) теоремы равносильно тому, что в рассматриваемом классе множеств, трактуемом как топологическое пространство [2], выполняется первая аксиома счетности, т. е. тому, что этот класс является T_1-пространством.

Замечание 2. Существуют как конечные, так и бесконечные классы перечислимых подмножеств фиксированного перечислимого множества, удовлетворяющие условиям теоремы и, следовательно, такие, все нумерации которых — накрывающие. В качестве конечного класса достаточно взять любой конечный класс, не содержащий пары множеств, включенных одно в другое; в качестве бесконечного класса можно взять, например, состоящий только из одноэлементных множеств класс

$$\{\{a_0\},\ \{a_1\},\ \{a_2\},\ \ldots,\ \{a_n\},\ \ldots\},$$

где $\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ — иммунное [9] множество.

Доказательство необходимости. Предположим, что класс M содержит бесконечный перечислимый подкласс или такую пару множеств B и C, что $B \subset C$, и найдем нумерацию класса M, не являющуюся накрывающей.

а) Пусть M_1 — бесконечный перечислимый подкласс класса M и пусть α — какая-то его вычислимая нумерация. В лемме из § 1 полагаем $K = M_1$, $L = M$, $\xi = \alpha$; тогда получаем γ в качестве η из этой леммы.

б) Пусть $B \in M$, $C \in M$, $B \subsetneq C$. Положим $M_1 = \{B, C\}$. Достаточно найти такую вычислимую нумерацию α класса M_1 и такую нумерацию γ класса M, что α не сводится к γ. Пусть S — разрешимое, а R — перечислимое неразрешимое множество натуральных чисел, $M_2 = M \setminus M_1$ и ε — произвольная нумерация класса M_2. Положим

$$\alpha(x) = \begin{cases} B, & \text{если } x \in N \setminus R, \\ C, & \text{если } x \in R, \end{cases}$$

$$\beta(x) = \begin{cases} B, & \text{если } x \in N \setminus S, \\ C, & \text{если } x \in S, \end{cases}$$

$$\gamma(2n) = \beta(n), \qquad \gamma(2n+1) = \varepsilon(n),$$

(если $M_2 = \phi$, то $\gamma\ (2n+1)$ не определено ни при каком n). Если функция h сводит α к γ, то $N \setminus R = h^{-1}\ (2N \setminus 2S)$, где через $2A$ обозначено множество всех чисел вида $2a$ при $a \in A$; поэтому, если бы h была вычислимой, то $N \setminus R$ было бы перечислимым множеством в противоречии с выбором R.

Доказательство достаточности. Пусть класс M не содержит указанных в теореме «запрещенных» подклассов вида а) и б) и пусть γ — произвольная его нумерация. Докажем, что γ — накрывающая нумерация. Для этого возьмем произвольную вычислимую нумерацию α произвольного класса M_1 такого, что $M_1 \subseteq M$, и покажем, что α сводится к γ. Класс M_1 перечислим и потому конечен; пусть

$$M_1 = \{A_1, \ \ldots, \ A_k\}.$$

Поскольку никакое включение $A_i \subset A_j\ (i \neq j)$ невозможно, то все разности $A_j \setminus A_i$ не пусты. Выберем в каждом множестве $A_j \setminus A_i\ \ (i \neq j)$ по элементу a_{ji} и положим

$$F_j = \{a_{j1}, \ \ldots, \ a_{jk}\}.$$

Тогда одноэлементный класс $\{A_j\}$ совпадает с классом всех членов класса M_1, содержащих в качестве подмножества данное конечное множество F_j; поэтому ([3], п. 2) класс $\{A_j\}$ является эффективно открытым в M_1 и, в силу теоремы 2 из [3], вполне перечислим относительно нумерации α; последнее, в силу вычислимости нумерации α и, следовательно, перечислимости ее основания, означает, что множество $\alpha^{-1}\ (A_j)$ перечислимо. Выберем теперь для каждого j число n_j так, чтобы было

$$\gamma\ (n_j) = A_j,$$

и зададим функцию h:

$$h(x) = \begin{cases} n_1, \text{ если } x \in \alpha^{-1}(A_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ n_k, \text{ если } x \in \alpha^{-1}(A_k). \end{cases}$$

Очевидно, что h будет вычислимой функцией, сводящей α к γ.

§ 4. Существование накрывающих нумераций, не являющихся вполне накрывающими. ТЕОРЕМА. *Существует накрывающая нумерация, не являющаяся вполне накрывающей.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу замечания 2 из § 3 существует бесконечный класс перечислимых множеств, всякая нумерация которого является накрывающей. В силу леммы из § 2 по крайней мере одна из нумераций этого класса не является вполне накрывающей.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 10.VI.1968

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] C h u r c h A., An unsolvable problem of elementary number theory, Amer. J. Math., 58, № 2, (1936), 345—363.

[2] У с п е н с к и й В. А., О вычислимых операциях, Докл. АН СССР, **103**, № 5, (1955), 773—776.

[3] У с п е н с к и й В. А., Системы перечислимых множеств и их нумерации, Докл. АН СССР, **105**, № 6 (1955), 1155—1158.

[4] У с п е н с к и й В. А., Вычислимые операции и понятие программы, Успехи матем. наук, **11**, № 4 (1956), 172—176.

[5] R o g e r s H., Gödel numberings of partial recursive functions, J. Symbolic Logic, **23**, № 3 (1958), 331—341.

[6] У с п е н с к и й В. А., Лекции о вычислимых функциях, М., 1960.

[7] М а л ь ц е в А. И., Конструктивные алгебры, I, Успехи матем. наук, **16**, № 3 (1961), 3—60.

[8] М а л ь ц е в А. И., К теории вычислимых семейств объектов, Алгебра и логика (семинар), **3**, № 4, (1964), 5—31.

[9] М а л ь ц е в А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965.