1994 г. июль — август *т. 49, вып. 4(298)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

ЕВГЕНИЙ БОРИСОВИЧ ДЫНКИН

(к семидесятилетию со дня рождения)

В мае 1994 года был юбилей замечательного математика Евгения Борисовича Дынкина, ученого, которого алгебраисты воспринимают как знаменитого алгебраиста, а специалисты по теории вероятностей – как знаменитого вероятностника.

Е.Б. Дынкин родился в Ленинграде 11 мая 1924 года. Одиннадцатилетним мальчиком он, вместе со всей семьей, был сослан в Казахстан, а когда ему было тринадцать, его отец исчез в ГУЛАГе. Тем не менее в 1940 году Дынкину удалось поступить на механико-математический факультет Московского университета, где он стал учеником А. Н. Колмогорова. В своей ответной речи, произнесенной при вручении ему премии Стила (присуждаемой Американским математическим обществом) за 1993 г., Дынкин оценивает свое поступление в Университет как "почти чудо".

Профессор МГУ С.А. Яновская заметила талантливого мальчика, нуждающегося в помощи, и окружила его материнской заботой (вплоть до того, что поселила его вместе с его матерью у себя); это позволило Дынкину преодолеть жизненные трудности и со студенческих лет сосредоточиться на математике. А.Н. Колмогорову неоднократно приходилось класть на чашу весов свой авторитет, чтобы обеспечить продвижение Е.Б. Дынкина от студента до профессора.

Студентом Дынкин начинает работать в семинаре Гельфанда по группам Ли и в семинаре Колмогорова по цепям Маркова. Участие в этих семинарах и сформировало круг научных интересов Дынкина: алгебра, анализ, теория вероятностей. Знаменательно, что уже его первая, студенческая (выполненная совместно с Н.А. Дмитриевым и опубликованная в 1945 г.) работа "О характеристических корнях стохастических матриц" лежит на стыке трех перечисленных дисциплин: она посвящена проблеме расположения названных корней на комплексной плоскости. Сам Дынкин всегда подчеркивал (и учил этому своих учеников), что одна из величайших ценностей математики – это ее единство, проявляющееся в связях между различными ее областями.

По окончании в 1945 г. механико-математического факультета Е.Б. Дынкин поступает в аспирантуру того же факультета к А.Н. Колмогорову. В 1948 г. он защищает кандидатскую диссертацию и начинает работать на возглавлявшейся (по1966 г.) Колмогоровым кафедре теории вероятностей мехмата МГУ, где и работает двадцать лет, с 1948 по 1968 гг. (из них с 1954 г. – в качестве профессора).

Еще в студенческие годы проявляется одна из наиболее замечательных черт Евгения Борисовича – его выдающийся педагогический талант, его способность собирать вокруг себя школьников и студентов и побуждать их к творческой работе.

Деятельность Дынкина как педагога берет свое начало в школьных математических кружках. Сталинский тоталитаризм оставлял мало простора для свободной интеллектуальной и тем более для свободной общественной деятельности. Зато на немногочисленных островках свободы нива всходила особенно обильно. В сфере интеллектуальной такими островками были математика и шахматы. Примером из общественной сферы могут служить школьные математические кружки при Московском университете. Они зародились в предвоенные годы и были прерваны войной. На конец войны и первые послевоенные годы приходится их расцвет.

В те времена школьные математические кружки при МГУ представляли собою уникальное явление. Для руководителей кружков (каковыми были студенты и аспиранты мехмата) они давали возможность делать что-то разумное и притом без бюрократических указаний. Для участников (школьников) они давали атмосферу демократического творческого содружества. Демократические традиции тщательно оберегались. Так, к руководителям кружка было положено обращаться по имени (а не по имени–отчеству, как в школе). Подобные детали производили на школьника сильное впечатление. Разумеется, решающую роль играла личность руководителя. Одной из таких ярких личностей и был Евгений Борисович (тогда, в силу упомянутой традиции, просто Женя) Дынкин, с которым – в его качестве студента-пятикурсника и руководителя одного из кружков (более точно – "Секции общего типа Школьного математического кружка при МГУ") – и встретился весной 1945 г. один из подписавших эту статью (Успенский). В 1945/46 и 1946/47 учебных годах Женя продолжал руководить кружком, уже став аспирантом.

В 1947 г. несколько активных участников кружка сделались студентами 1-го курса мехмата МГУ, и сам кружок плавно превратился в семинар "Избранные задачи современной математики" для студентов–первокурсников. Так родился знаменитый семинар Дынкина для студентов мехмата, получивший через некоторое время новое название "Избранные задачи алгебры и анализа", а в 1955 г. разделившийся на два дочерних семинара – по алгебре и по теории вероятностей.

Атмосфера семинара Дынкина первых лет унаследовала атмосферу школьного кружка. Занятия проходили эмоционально. Общение участников друг с другом и с руководителем не кончалось с концом занятия, а, как правило, продолжалось на улице. Вошло в традицию провожать – в виде оживленной прогулки по улице Горького – своего учителя по крайней мере часть его пути домой (а жил тогда Дынкин в начале Ленинградского проспекта, мехмат же был в одном из старых зданий Университета на Моховой, напротив Манежа). Все это отчасти напоминало – если судить по воспоминаниям – обстановку знаменитой Лузитании 20-х годов (уместно отметить, что Дынкин – через Колмогорова – научный внук Н.Н, Лузина). Отношение учеников к Дынкину было благодарное, уважительное, отчасти даже восторженное; как радовались двое из нас (Введенская и Успенский), когда летом 1949 г. неожиданно повстречали своего учителя на Рижском взморье! В свою очередь, отношение Дынкина к ученикам было чрезвычайно заботливым – включая и подбор темы для первой публикации, и самоотверженное редактирование незрелых вариантов ее текста. Впрочем, он умел быть и довольно жестким.

Вот список (возможно, неполный) математиков, начавших свою деятельность в семинарах Е.Б. Дынкина и под его руководством, а потому могущих именоваться его учениками: Р.Л. Добрушин, Ф.И. Карпелевич, Э.Э. Балаш, И.З. Розенкноп, В.А. Успенский, Н.Н. Ченцов, Ф.А. Березин, Н.Д. Введенская, А.А. Юшкевич, А.В. Скороход, В.М. Золотарев, И.В. Гирсанов, Я.Г. Синай, А.Л. Онищик, Л.В. Серегин, В.А. Волконский, Р.З. Хасьминский, А.Д. Вентцель, Э.Б. Винберг, К. Дамбис, А.А. Кириллов, В.Н. Тутубалин, М.И. Фрейдлин, М.Г. Шур, Н.В. Крылов, С.А. Молчанов, М.Б. Малютов, Г.А. Маргулис, Е.Л. Нольде, А.Л. Розенталь, С.Е. Кузнецов, И.В. Евстигнеев, М.И. Таксар, Ю.И.Кифер, С.М. Натанзон, С.А. Пирогов.

В 1951 г. Дынкин защитил докторскую диссертацию. По этому случаю ученики поднесли ему сделанную из глины и проволоки конструкцию – пространственный граф, изображающий схему корней алгебры Ли. Ныне термин *граф Дынкина*, или *схема Дынкина* (см. ниже), прочно вошел в науку: он вынесен, например, в заглавие одной из рубрик "Начал математики" Н. Бурбаки (книга "Группы и алгебры Ли", гл. VI, §4, п.2), а также в заглавие недавно вышедшего тома номер 1548 серии "Lecture Notes in Mathematics".

Теорией групп Ли и алгебр Ли Дынкин начал заниматься еще в студенческие годы. Работа в этой области математики составила сравнительно непродолжительный (1944–1955 гг.), но чрезвычайно плодотворный интенсивный период его жизни. Последнее видно уже из списка его основных достижений этого времени: открытие простых корней и "схем Дынкина", нахождение явного вида коэффициентов ряда Кэмпбелла – Хаусдорфа, описание максимальных подалгебр простых комплексных алгебр Ли, классификация полупростых подалгебр особых комплексных алгебр Ли, описание примитивных классов гомологий и когомологий классических компактных групп Ли.

Роль *простых корней* полупростой комплексной алгебры Ли (т.е. положительных корней, не представимых в виде суммы двух положительных корней) была обнаружена Е.Б. Дынкиным в 1944 г. при изучении работ Г. Вейля и Ван-дер-Вардена, когда по поручению И.М. Гельфанда он готовил обзорный доклад о строении и классификации полупростых алгебр Ли. Оказалось, что по системе Π простых корней полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ можно построить систему образующих этой алгебры, соотношения между которыми полностью определяются углами между простыми корнями и отношениями их длин. Таким образом, система Π, рассматриваемая как система векторов в евклидовом пространстве, однозначно, с точностью до изоморфизма, определяет алгебру Ли $\mathfrak{g}$. Систему Π можно изобразить при помощи графа, вершины которого отвечают простым корням и окрашены в два цвета в зависимости от их длин, а ребра снабжены кратностями 0,1,2 или 3 в зависимости от угла между соответствующими корнями, который может быть равен лишь $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{4}$ или $\frac{5\pi}{6}$. Этот граф называется теперь *схемой Дынкина* алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Классификация простых комплексных алгебр Ли сводится тем самым к комбинаторной задаче, решение которой легко получается из простых фактов евклидовой геометрии. В настоящее время метод простых корней лежит в основе структурной теории алгебр Ли, алгебраических групп, алгебр Каца–Муди и других близких к ним алгебраических объектов.

Будучи аспирантом Московского университета, Е.Б. Дынкин занимался другим классическим вопросом теории групп Ли. Речь идет о формальном степенном ряде $\log(\exp x \exp y)$ от двух некоммутирующих переменных x, y. Как показали в начале нашего века Кэмпбелл и Хаусдорф, его можно представить как ряд, состоящий из "лиевых одночленов" от x, y, т.е. выразить через x, y при помощи операции коммутирования $[u, v] = uv - vu$. Записанный в таком виде, ряд Кэмпбелла–Хаусдорфа дает выражение (в канонических координатах) операции умножения в произвольной группе Ли через операцию коммутирования в соответствующей алгебре Ли. Явный вид этой записи оставался неизвестным до 1947 г., когда Е.Б. Дынкин нашел неожиданно простое решение задачи. Оказалось, что искомое выражение получится, если в каждом члене степенного ряда заменить операцию умножения на коммутирование и разделить член на его степень. Эта теорема позволила, в частности, развить теорию банаховых групп Ли над произвольным полным нормированным полем характеристики 0. Полученные результаты составили кандидатскую диссертацию Е.Б. Дынкина, защищенную им в 1948 г.

Метод простых корней, о котором шла речь выше, позволил существенно упростить и усовершенствовать формулировки и доказательства ряда классических теорем, касающихся строения полупрстых комплексных алгебр Ли (классификация автоморфизмов, теория конечномерных линейных представлений). Пользуясь этим методом, Е.Б. Дынкин в 1950–1951 гг. получил фундаментальные результаты, касающиеся классификации подалгебр в простых комплексных алгебрах Ли.

Более ста лет назад Софус Ли поставил проблему классификации примитивных локальных групп преобразований, т.е. транзитивных локальных групп Ли преобразований, не оставляющих инвариантным никакого нетривиального расслоения. На языке алгебр Ли это равносильно классификации максимальных подалгебр в конечномерных алгебрах Ли. В.В. Морозов свел задачу к случаю когда объемлющая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является простой. В 1943 г. он явно перечислил все неполупростые максимальные подалгебры в простых комплексных алгебрах Ли. (В 1951 г. эта классификация была упрощена дынкинским студентом Ф.И. Карпелевичем, который показал, что любая неполупростая максимальная подалгебра в полупростой комплексной алгебре Ли относится к классу подалгебр, называемых теперь параболическими и описал этот класс в терминах простых корней.) В 1950 г. Е.Б. Дынкин получил простое доказательство результатов А.И. Мальцева о классификации полупростых подалгебр в ортогональных и симплектических алгебрах Ли, а затем дал описание всех максимальных подалгебр в классических комплексных алгебрах Ли. Наиболее трудным оказался случай, когда подалгебра проста и неприводима (т.е.

не оставляет инвариантным никакого собственного подпространства); в этом случае полученный результат можно выразить следующим образом: почти любая неприводимая простая комплексная подалгебра полной линейной алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ максимальна в одной из классических алгебр Ли $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, $\mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$ или (при четном n) $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$. Исключения из этого правила (представляющие собой 4 серии и 14 отдельных подалгебр) явно перечисляются. Эта работа была защищена в 1951 г. как докторская диссертация. В том же 1951 году Е.Б. Дынкину удалось решить весьма трудную задачу классификации полупростых подалгебр в особых комплексных алгебрах Ли, строение которых к тому времени было весьма слабо изучено. В частности, были перечислены все полупростые максимальные подалгебры, что вместе с указанными выше результатами дало полное решение проблемы Софуса Ли в случае поля комплексных чисел. За цикл работ по классификации подалгебр в полупростых алгебрах Ли Е.Б. Дынкин получил в 1951 г. премию Московского математического общества.

В 1952 г. появились первые работы Е.Б. Дынкина, посвященные топологии компактных групп Ли. Как доказали Хопф и Самельсон, двойственные друг другу алгебра когомологий и алгебра гомологий (или алгебра Понтрягина) компактной группы Ли G над полем рациональных чисел являются алгебрами Грассмана, в качестве свободных образующих которых могут быть выбраны примитивные, т.е. ортогональные к разложимым элементам двойственной алгебры, элементы. В упомянутых работах (подробное изложение которых появилось в 1953 г.) указан явный вид целочисленных примитивных образующих в случае, когда G – одна из классических групп. В частности, доказана примитивность образующих алгебры Понтрягина, построенных Л.С. Понтрягиным в 1939 г. При описании примитивных классов когомологий была использована связь между симметрическими и кососимметрическими инвариантами присоединенной группы, совпадающая, как впоследствии выяснилось, с трансгрессией в главном расслоении группы G. В работах 1953 и 1954 г.г. были найдены явные формулы для коэффициентов, описывающих естественное отображение примитивных классов гомологий подгруппы в примитивные классы гомологий группы, имеющие фундаментальное значение для изучения топологии соответствующего однородного пространства.

Описанный выше период деятельности Е.Б. Дынкина пришелся на тяжелый период в жизни нашей страны, когда отечественная наука была насильственно изолирована от мировой. Личные контакты с зарубежными математиками были практически невозможны, а иностранные журналы если и появлялись в библиотеках, то с большим опозданием. Лишь через несколько лет Е.Б. Дынкин узнал, что графы, близкие к его схемам, были независимо придуманы Кокстером для описания групп, порожденных отражениями. Несмотря на громогласную псевдопатриотическую пропаганду, Е.Б. Дынкин никогда не сомневался в единстве мировой математики и в том же духе воспитывал своих учеников. Когда в 1953 г. политический климат смягчился, он немедленно приступил к установлению научных контактов с зарубежными математиками. Благодаря его усилиям, в Москве появились работы А. Бореля, Лере, Козюля по топологии расслоенных пространств и однородных пространств групп Ли. Большую работу в развитии отечественной топологии сыграл организованный им семинар в Московском университете, в руководстве которым приняли также участие П.С. Александров и И.М. Гельфанд.

Последняя публикация Дынкина на алгебраическую тему датирована 1959 г. С тех пор основным направлением его научной деятельности становится теория вероятностей. Мы уже отмечали его студенческую работу 1945 г.; начиная с 1949 г. публикации в области теории вероятностей становятся ежегодными.

Можно полагать, что окончательный научный выбор Дынкина в пользу теории вероятностей был определен не только его участием в колмогоровском семинаре по марковским цепям, но и тем, что именно Колмогорову удалось то, что вряд ли тогда удалось бы кому-либо другому: оставить на своей кафедре – а именно, на кафедре теории вероятностей – талантливого ученика с “неправильной” анкетой. В результате такого расклада обстоятельств теория вероятностей приобрела Дынкина – в чем ей, без сомнения, повезло.

Вначале шел поиск адекватной точки приложения незаурядного научного потенциала Дынкина. Но уже его первые теоретико–вероятностные работы оставили существенный вклад в науке. Уже тогда на материале теории систем эквивалентных случайных величин (т.е. систем случайных величин, совместные распределения которых инвариантны относительно всех перестановок этих величин) им была выдвинута плодотворная идея, которая нашла свое развитие и в последующих его работах и работах многих других авторов. Во многих задачах теории вероятностей естественно возникает выпуклое множество вероятностных мер на функциональных пространствах, и, в связи с этим, задача описания крайних точек этого множества и представления любой его точки как интегрального среднего значения его крайних точек. Традиционный для функционального анализа подход (ключевое слово – теоремы Шоке) требует введения топологии, однако единой естественной топологии в пространстве мер нет. Дынкин открыл возможность чисто теоретико-мерного подхода к этой задаче, при котором экстремальные меры интерпретируются как меры с тривиальным поведением траекторий на бесконечности. Эта техника хорошо работает во многих ситуациях, включая изучавшуюся Дынкиным задачу об описании марковских процессов с заданными переходными вероятностями, а также и позже развитую теорию гиббсовских случайных полей.

В качестве другого примера можно упомянуть коэффициент эргодичности стохастической переходной матрицы – на общематематическом языке это норма действия этой матрицы в сужении на пространство разностей распределений вероятностей. Она удобна при описании эргодического поведения цепей Маркова. Иногда его введение приписывают одному из авторов (Добрушину) этой статьи, однако на самом деле это понятие было предложено Дынкиным в одной из его ранних теоретико-вероятностных работ. В этот период Дынкин получил также интересные результаты об условиях непрерывности и отсутствия разрывов второго рода у траекторий марковских процессов, о предельных теоремах для сумм независимых величин с бесконечным математическим ожиданием, однако вскоре (приблизительно в 1955 г.) он нашел свою коронную тему – общая теория марковских процессов, которой и посвятил почти всю свою дальнейшую научную жизнь.

Плоть математики состоит из теорем и определений. Спорить, что важней, столь же бессмысленно, как решать классический вопрос, что было раньше, яйцо или курица. Определения бессодержательны без основанных на них теоремах, теоремы неформулируемы без определений. Дынкину принадлежит много важных теорем, но в чем он особо выдающийся мастер – это в создании правильных (т.е. впоследствие оказывающихся незыблемыми) систем определений, и, что нельзя недооценивать, адекватных этим определениям систем обозначений. Дынкин застал теорию марковских процессов в период, когда назрела ее перестройка на основе современных математических представлений. Идеи Великой Математической Революции начала нашего века очень медленно проникали в теорию вероятностей и она долго продолжала жить своей отдельной сектантской жизнью. Следы этого видны даже сейчас в ее архаической терминологии: измеримое множество – это, по-вероятностному, событие, измеримая функция – случайная величина, ее интеграл – математическое ожидание. Потенциал для слияния теории вероятностей с современной математикой возник после открытия А. Н. Колмогоровым возможности переизложения теории вероятностей на языке теории меры, однако вплоть до периода, когда в теорию марковских процессов вступил Дынкин, эта теория марковских процессов ограничивалась рассмотрением разрозненных, хотя и важных, частных классов процессов, а ее математический аппарат – классическими анализом и дифференциальными уравнениями.

Конечно, любой крупный сдвиг в науке – результат совместной работы большого интернационального коллектива ученых, но несомненно, что вклад Е. Б. Дынкина в переосмысление теории марковских процессов был решающим. Многие понятия, уже ставшие общепринятыми и элементарными, впервые появились в его работах: трактовка марковского процесса как согласованного семейства мер, зависящего от начального условия и начального момента времени, строгая марковость, формула Дынкина, связывающая два подхода к описанию инфинитезимального описания процесса: локальный во времени и локальный в пространства, – и многое другое. Была создана общая теория марковских процессов, основанная на аппарате функционального анализа (теория меры, теория полугрупп операторов и т.п.). Две блестящих книги Дынкина ("Основания теории марковских процессов", 1959 г. и "Марковские процессы", 1963 г.) подытожили это героический период развития теории марковских процессов и стали классикой теории вероятностей. Поражает тщательность методической проработки изложения, присущая Е. Б. Дынкину. Например там появилось, пожалуй единственное позднее нововведение в изложении основ теории меры – понятие систем множеств Дынкина, ставшее теперь стандартным и существенно облегчающее проверку свойств, которым должна обладать любая функция, измеримая относительно некоторой σ-алгебры множеств.

Новая точка зрения на теорию марковских процессов выявила массу интересных математических проблем, появилась возможность плодотворного взаимодействия между теорией марковских процессов с одной стороны, и теорией дифференциальных уравнений в частных производных и теорией потенциала – с другой. Начался бум исследований в этой вновь открывшейся области, но и на его фоне дальнейший вклад Е. Б. Дынкина в теорию марковских процессов оказался очень важным. Его последующие результаты по теории граничных задач для марковских процессов (границы Мартина), по проблеме оптимальной остановки, по классификации аддитивных функционалов от марковских процессов и т.д. навсегда вошли в теорию вероятностей.

Следует отметить важные результаты Е. Б. Дынкина по теории случайных полей, где он вскрыл неожиданные и глубокие взаимосвязи между гауссовскими случайными полями и симметричными марковскими процессами.

В последние годы Дынкин перешел к исследованию нового свежего и важного класса случайных поцессов. Это так называемые суперпроцессы, состояниями которых являются меры. Их конструкция сочетает идеологию диффузионных марковских процессов и ветвящихся марковских процессов, в которых однако ветвление идет бесконечно малыми шагами. Значение этого класса случайных процессов видно хотя бы из того, что если диффузионные марковские процессы дают стохастическое представление для решений линейных параболических уравнений, то суперпроцессы позволяют получить такое представление и для некоторых классов нелинейных уравнений параболического типа. Труд, вложенный в эту тематику Е. Б. Дынкиным, и результаты можно сравнить с его классическим вкладом в основания теории марковских процессов. Е. Б. Дынкиным подготовлена выходящая вскоре в свет новая книга, содержащая систематическое изложение теории суперпроцессов.

В 1968 г. деятельность Е. Б. Дынкина в Московском университете вынужденно прервалась, и в 1968–1976 гг. он является старшим научным сотрудником Центрального экономико–математического института АН СССР. За короткий срок работы в ЦЭМИ он организовал там группу молодых сотрудников, вместе с которыми получил существенные результаты по теории экономического роста и экономического равновесия, увенчавшиеся первым советским докладом на эту тему на международном математическом конгрессе в Ванкувере (куда его, впрочем, в очередной раз не пустили).

В 1976 г. Дынкин эмигрирует из СССР и с 1977 г. состоит профессором Корнеллского университета (США). С 1978 г. он член Американской академии искусств и наук, с 1985 г. – член Национальной академии наук США.

Е. Б. Дынкин неоднократно приезжал в Россию – последний раз в качестве приглашенного докладчика на Международную конференцию “Колмогоров и современная математика” (Санкт-Петербург, май–июнь 1993 г.). Верим, что он будет приезжать к нам еще много раз.

В свои 70 лет Е. Б. Дынкин молод в своем увлечении математикой и мы можем ждать от него еще многих неожиданных идей и результатов.

Н. Д. Введенская, Р. Л. Добрушин, А. Л. Онищик, В. А. Успенский