

УДК 510.225+517.518.112

В. Г. Кановей, Т. Линтон, В. А. Успенский

Игровой подход к мере Лебега

Дана характеристика лебеговой меры множеств в терминах существования тех или иных стратегий в определенной игре, связанной с бросанием монеты. Исследованы “рациональная” и “дискретная” модификации этой игры. Доказано, что если один из участников имеет выигрывающую стратегию в одной из игр этого типа, зависящей от данного множества $P \subseteq [0, 1]$, то это множество измеримо.

Библиография: 11 названий.

Введение

Простейшая игра, связанная с метанием монеты, состоит в том, что игрок делает ставку на выпадение орла или решки (вероятность каждого из этих событий считается равной $1/2$), и если игрок угадывает, то он возвращает свою ставку и дополнительно получает равную ей сумму, а в противном случае ставка теряется. Теория мартингалов доказывает, что в такой игре нет выигрывающей стратегии, т.е. такой стратегии ставок, которая дает гарантированный выигрыш за конечное время [1]. Точнее говоря, после любого фиксированного числа n шагов игры математическое ожидание выигрыша равно нулю вне зависимости от того, какая стратегия ставок используется.

Рассматриваемая в данной статье игра имеет два отличия от этой простейшей игры. Во-первых, мы придадим казино более активную роль произвольного выбора орла либо решки для каждого очередного метания монеты. И казино будет принимать свое решение, зная ставку игрока. Чтобы компенсировать это преимущество, мы разрешим игру с бесконечным числом шагов и заставим казино играть так, чтобы бесконечная последовательность результатов метания принадлежала заранее заданному множеству.

Пространство $\mathbb{D} = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ можно оснастить счетной степенью бернуллиевской вероятностной меры на множестве $-1, 1$, приписывающей значение $1/2$ обоим точкам. Хорошо известно, что тогда лебегова мера произвольного множества $P \subseteq \mathbb{D}$ равна вероятности того, что бесконечное число независимых бросаний монеты даст последовательность из P . (Орел отождествляется с 1 , а решка с -1 .) Таким образом, локальное случайное событие выпадения орла либо решки заменяется глобальным случайным событием того, что последовательность метаний принадлежит множеству P .

В § 1 дается точное определение этой игры и связанных с ней понятий. Затем в § 2 рассматриваются две ключевые стратегии участников этой игры. В § 3 содержится анализ случая, когда заданное множество P имеет нулевую меру. Случай множества положительной меры рассмотрен с точки зрения игрока

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (у первого автора – гранты №№ 06-01-00608, 07-01-00445, у третьего автора – грант № 06-01-00608).