О некоторых игровых интерпретациях аффинной и интуиционистской логик

Николай Верещагин Илья Межиров

Аннотация

В работе дается новая семантика аффинной логики, которая на наш взгляд лучше отражает неформальную ее идею, как логики ресурсов, чем известные семантики. Эта семантика является обобщением семантики, предложенной Джапаридзе для некоторых фрагментов аффинной логики [6, 4]. Мы устанавливам, что множество истинных в нашей семантике формул совпадает с множеством формул, истинных в игровой семантике Бласса [1]. Мы также доказываем, что при переводе Жирара позитивный фрагмент интуиционисткого исчисления высказываний полон относительно обеих семантик.

1. Интерпретация аффинной логики, как логики ресурсов

Аффинную логику часто понимают как логику ресурсов. Каждое вхождение переменной в формулу обозначает одну единицу некоторого абстрактного ресурса, а не истинность некоторого суждения, как в классической логике. Ее связки, $\otimes$ (тензор, мультипликативное «и»), $⅋$ (пар, мультипликативное «или»), $\&$ (аддитивное «и») и $\oplus$ (аддитивное «или»), $^\perp$ (инвертирование), $!, ?$ (экспоненциальные «и» и «или») и $\mathbf{0}, \mathbf{1}$ (константы), понимаются следующим образом. Выражение $x \otimes y$ обозначает одну единицу ресурса x и одну единицу ресурса y (в частности, $x \otimes x$ означает две единицы ресурса x). Выражению $x \& y$ соответствует обязательство передать одну единицу любого из ресурсов x, y по выбору потребителя (в частности, $x \& x$ это то же самое, что и x). Выражение $x \oplus y$ также понимается, как обязательство передать одну единицу одного из двух ресурсов x, y, но при этом выбор за исполнителем заказа, а не за заказчиком (опять $x \oplus x$ это то же самое, что и x).

Наиболее сложна интерпретация операции $⅋$. Вот метафора, помогающая понять ее смысл. Будем считать, что ресурсы — это монеты (или товары); разные ресурсы — это монеты (товары) разного вида, а выражение x понимается как одна монета вида x (одна единица товара вида x). Монеты бывают настоящие и фальшивые; на вид фальшивые и настоящие монеты одинаковы (в товарной интерпретации — качественные и некачественные товары на вид неотличимы). Выражение $x ⅋ y$ о одну монету вида x и одну монету вида y, из которых крайней мере одна настоящая, но неизвестно какая.

Выражение $x^\perp$ обозначает обязательство заказчика передать исполнителю единицу ресурса x (в отличие от x, которое понимается как обязательство исполнителя передать заказчику единицу ресурса x). Выражение $!x$ обозначает счетное количество единиц ресурса x. Выражение $?x$, используя метафору с монетками, обозначает счетное количество монеток вида x, из которых хотя бы одна настоящая, но неизвестно какая. Иными словами, $!x$ это то же самое, что и $x \otimes x \otimes x \ldots$, а $?x$ — то же самое, что $x ⅋ x ⅋ x \ldots$.

Константы $\mathbf{0}, \mathbf{1}$ обозначают невыполнимые обязательства: $\mathbf{0}$ — обязательство исполнителя, а $\mathbf{1}$ обязательство заказчика.

1.1. Семантика

Предлагаемая семантика формализует это интуитивное понимание аффинной логики. Каждой формуле A сопоставляется некоторая игра, обозначаемая $[A]$, между двумя игроками, называемыми исполнителем и заказчиком. Выводимым формулам будут соответствовать игры, в которых у исполнителя имеется выигрышная стратегия. Сначала рассмотрим случай формул с «тесными инвертированиями», то есть, в которых инвертируются только переменные.

Заменим в исходной формуле каждое вхождение формулы вида $!B$ на $B \otimes B \otimes B \dots$, а каждое вхождение формулы $?B$ на $B ⅋ B ⅋ B \dots$. В результате получится бесконечная формула конечной глубины.

Игроки в игре $[A]$ ходят попеременно. Кто ходит первый, неважно (это будет ясно из дальнейшего). Представим себе, что каждое вхождение переменной в формулу A является коробочкой; в дальнейшем мы так и будем называть их коробочками, а вхождения одной и той же переменной — одноименными коробочками. Положительные вхождения переменных принадлежат исполнителю, а отрицательные — заказчику. Изначально, во всех коробочках заказчика лежат монетки. Игроки по очереди делают выборы ($\oplus$ соответствует выборам исполнителя, а & выборам заказчика), а также исполнитель может перекладывать монетки из коробочек заказчика в свои. Каждая монетка может быть переложена лишь один раз и только в одноименную исходной коробочку. В каждую коробочку исполнителя может быть положена лишь одна монетка. Иными словами, исполнитель строит паросочетание в двудольном графе, левыми вершинами которого являются положительные вхождения переменных, а правыми — отрицательными. В дальнейшем мы будем называть коробочки, объединенные в одну пару, симметричными.

Точнее, на своем очередном ходу исполнитель может ничего не делать (спасовать) или сделать в любом порядке конечное число действий следующего вида: (1) произвести выбор, то есть, указать некоторое вхождения связки $\oplus$ и выбрать один из двух ее операндов; (2) переложить монетку из некоторой коробочки заказчика в некотурую свою пустую коробочку.

Заказчик может делать только выборы. Точнее, на своем очередном ходу он может ничего не делать (спасовать) или сделать в любом порядке конечное число выборов. Каждый выбор заключается в указании некоторого вхождения связки $\oplus$ и выборе одного из двух ее операндов.

Каждый выбор можно делать только один раз.

Игра продолжается счетное число ходов. Выигрыш определяется следующим образом. Назовем оценкой отображение из множества отрицательных вхождений переменных в $\{0,1\}$, указывающее, какие из монеток настоящие, а какие фальшивые. Распространим это отображение на положительные вхождения: положительное вхождение s истинно, если в ходе игры в коробочку s была положена настоящая монетка, а иначе ложно. Для данной оценки для каждого вхождения каждой подформулы в исходную формулу A мы определяем, кто выиграл эту подформулу, заказчик или исполнитель.

Вхождение переменной выиграл исполнитель, если оно истинно при данной оценке. Вхождение формулы вида $x^{\perp}$ выиграл исполнитель, если оно ложно при данной оценке. Исполнитель выиграл вхождение формулы вида $A \otimes B$, если он выиграл A и выиграл B. Исполнитель выиграл вхождение формулы $A \parr B$, если он выиграл A или выиграл B. Аналогично определяется выигрыш для формул, полученных связками $\otimes, \parr$ счетной кратности: вхождение $A_1 \otimes A_2 \otimes A_3 \ldots$ (мы употребляем индексы, чтобы отличить разные вхождения друг от друга) выиграно исполнителем, если все формулы $A_1, A_2, A_3 \ldots$ им выиграны; вхождение $A_1 \parr A_2 \parr A_3 \ldots$ выиграно исполнителем, если хотя бы одна из формул $A_1, A_2, A_3 \ldots$ им выиграна.

Вхождение формулы вида $A \oplus B$ выиграл исполнитель, если он в некоторый момент игры сделал выбор, и выиграл выбранную подформулу. (В частности, если исполинтель не сделал выбора, то формулу $A \oplus B$ выиграл заказчик.) Для игры $A \& B$ определение аналогично, только надо поменять ролями заказчика и исполнителя: вхождение формулы вида $A \& B$ выиграл заказчик, если он в некоторый момент игры сделал выбор между A и B и выиграл выбранную подформулу.

Любое вхождение $\mathbf{1}$ выиграл исполнитель, а любое вхождение $\mathbf{0}$ — заказчик.

Наконец, в данной партии выиграл исполнитель, если для любой оценки вся формула A выиграна исполнителем.

Выигрыш в даной партии можно определить эквивалентным образом так. В конце игры заменим в формуле A все вхождения формул вида $B \oplus C$, в которых исполнитель не выбрал между A и B, на $\mathbf{0}$, а все вхождения формул вида $B \& C$, в которых заказчик не сделал выбора, на $\mathbf{1}$. Формулы вида $B \oplus C$ и $B \& C$, в которых был произведен выбор между B и C, заменим на выбранные подформулы. (Все замены можно делать в любом порядке, на результат это не влияет.) Затем заменим каждое вхождение переменной на новую переменную так, чтобы симметричные вхождения были заменены на одинаковые переменные, а несимметричные на разные. В результате этих замен получится бесконечная формула конечной глубины со связками $\parr, \otimes, {}^{\perp}, \mathbf{1}, \mathbf{0}$. Исполнитель считается выигравшим, если полученная формула является тавтологией в классическом смысле ($\otimes$ понимается, как конъюнкция, $\parr$ как дизъюнкция, а ${}^{\perp}$ как отрицание).

Определение игры, соответствующей данной формуле с тесными отрицаниями, закончено. Формула A называется аффинно истинной, если в игре $[A]$ исполнитель имеет выигрышную стратегию. Например, формулы x, $x^{\perp}$ и $x^{\perp} \parr y$ не являются аффинно истинными. Чтобы выиграть первую игру, исполнитель должен иметь хотя бы одну настоящую монету вида x, а ее у него нет. Выиграть вторую игру невозможно: при истинном x формула будет проиграна исполнителем. Говоря неформально, чтобы выиграть третью игру, надо было бы уметь перерабатывать одну единицу товара x в одну единицу товара y, а такого умения у исполнителя не предполагается (или просто иметь одну единицу y в запасе).

Простейшая аффинно истинная нетривиальная формула — это $x \parr x^{\perp}$: исполнитель просто перекладывает монетку из коробочки заказчика в свою.

Важное замечание. Когда мы говорим о стратегиях исполнителя, мы имеем в виду, что он не умеет отличать настоящих монет от фальшивых. Именно поэтому (невыводимая в аффинной логике) формула $(x^{\perp} \otimes x^{\perp}) \parr x$ не является аффинно истинной. В соответствующей игре у исполнителя по существу есть две стратегии: (1) использовать первую из монет и (2) использовать вторую. Обе стратегии не являются выигрышными: если ровно одна из монет настоящая, а именно та, которая не используется исполнителем, то он проиграл.

Аффинная истинность произвольных формул (а не только с тесными инвертированиями) определяется с помощью замен

$$(A \otimes B)^{\perp} = A^{\perp} \parr B^{\perp}, \quad (A \parr B)^{\perp} = A^{\perp} \otimes B^{\perp},$$
$$(A \& B)^{\perp} = A^{\perp} \oplus B^{\perp}, \quad (A \oplus B)^{\perp} = A^{\perp} \& B^{\perp},$$
$$(!\,A)^{\perp} = ?(A^{\perp}), \quad (?\,A)^{\perp} = !(A^{\perp}),$$
$$(x^{\perp})^{\perp} = x, \quad \mathbf{1}^{\perp} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{0}^{\perp} = \mathbf{1}.$$

Проводя такие замены в любом порядке, мы приведем исходную формулу A к уже рассмотренному виду, причем полученная формула A' не зависит от порядка выполнения замен. Мы говорим, что A аффинно истинна, если такова A'.

Можно определить игру $[A]$ рекурсией по построению формулы. При этом не нужно сначала определять игры, соответствующей формулам с тесными инвертированиями: переход от формулы A к формуле $A^{\perp}$ соответствует смене ролей.

Игру $[A]$ можно модифицировать разными способами, получая тот же класс истинных формул. Перечислим некоторые из них.

1. Можно запретить исполнителю или заказчику (или обоим) делать несколько действий за один ход.

2. Можно запретить исполнителю и заказчику делать выборы внутри любых подформул вида $B \oplus C$ и $B \& C$ таких, что еще не сделан выбор между B и C, а также запретить исполнителю использовать коробочки внутри таких формул B, C (брать или класть монетки).

Можно представлять формулы в виде игральных автоматов или торговых автоматов (vending machines): отрицательные вхождения переменных соответствуют отверстиям для вставки монет, а положительные — окошечкам для выдачи выигрыша (или покупки). Например, автомат, который за 1 рубль выдает чай или кофе, и принимает к оплате монеты в 1 рубль и 50 коп, можно представить формулой

$$![(\text{рубль} \oplus 50\ \text{коп} \otimes 50\ \text{коп})^{\perp} \parr (\text{чай} \& \text{кофе})].$$

Для упрощения записи формул мы используем следующее старшинство операций: $^{\perp}$, !, ?, $\otimes$, $\parr$, &, $\oplus$.

Историческое замечание. Эквивалентная семантика для аддитивного фрагмента аффинной логики была предложена в работе Джапаридзе [4] (логика заданий), в которой построено полное и корректное исчисление относительно этой семантики. Для мультипликативного фрагмента аналогичная семантика была изложена в работе Джапаридзе [5] (семантика абстрактных ресурсов) вместе с корректным и полным исчислением (исчисление CL5). Наконец, исчисление CL2 Джапаридзе [5] является корректным и полным относительно предлагаемой нами семантики для фрагмента аффинной логики без экспоненциальных связок. Полного и корректного исчисления для полного языка (относительно предлагаемой здесь семантики) неизвестно.

1.2. Корректность аффинной логики относительно семантики ресурсов

Мы будем использовать односторонний вариант исчисления аффинной логики, выводимыми объектами в котором являются списки формул, называемые секвентами. Список, состоящий из формул $A_1, \ldots, A_n$, обозначается через $\vdash A_1, \ldots, A_n$. Порядок формул в списке не имеет значения, а кратность имеет, то есть, $\vdash p, p$ и $\vdash p$ — разные секвенты.

Аксиомы: $\vdash A, A^{\perp}$, $\quad \vdash \mathbf{1}$. Здесь и в правиле сечения $A^{\perp}$ обозначает формулу с тесными инвертированиями, полученную из формулы A описанными выше преобразованиями.

Правила вывода:

$\frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Delta, A^{\perp}}{\vdash \Gamma, \Delta}$ (Сечение). $\qquad \frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Delta, B}{\vdash \Gamma, \Delta, (A \otimes B)}$ (Введение $\otimes$).

$\frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, (A \invamp B)}$ (Введение $\invamp$). $\qquad \frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, (A \& B)}$ (Введение &).

$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, (A \oplus B)}$, $\quad \frac{\vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, (A \oplus B)}$ (Введение $\oplus$). $\qquad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, A}$ (Ослабление).

$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, ?\,A}$ (Оставление). $\qquad \frac{\vdash \Gamma, ?\,A, ?\,A}{\vdash \Gamma, ?\,A}$ (Сокращение). $\qquad \frac{\vdash ?\,\Gamma, A}{\vdash ?\,\Gamma, !\,A}$ (Повышение).

Через $?\,\Gamma$ обозначен список, полученный из Γ применением операции ? ко всем элементам списка. Линейная логика отличается от аффинной тем, что правило ослабления заменяется на правила $\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, ?\,A}$, $\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, \mathbf{0}}$.

Формульным образом секвента $\vdash A_1, \ldots, A_n$ назовем формулу $A_1 \invamp \ldots \invamp A_n$. Если список пуст (т.е., $n = 0$), то его формульным образом является формула $\mathbf{0}$. Будем называть секвент истинным, если его формульный образ аффинно истин.

Теорема 1. *Множество аффинно истинных секвентов содержит все аксиомы аффинной логики и замкнуто относительно применения всех правил вывода аффинной логики, а также относительно правила подстановки. (Следовательно, все выводимые в аффинной логике секвенты аффинно истинны.)*

Доказательство. Истинность второй аксиомы очевидна. Чтобы установить истинность первой аксиомы, надо уметь выигрывать произвольную игру вида $A \invamp A^{\perp}$. Выигрывающая стратегия состоит в простейшем имитировании: имеется взаимно однозначное соответствие между вхождениями переменных в формулу A и вхождениями переменных в формулу $A^{\perp}$. Положительному вхождению всегда соответствует отрицательное, и наоборот. Будем вхождение, соответствующее данному, называть двойственным к нему. Исполнитель перекладывает монетки из всех коробочек заказчика в двойственные им коробочки. Это делается в любом порядке так, чтобы в конце игры все коробочки исполнителя оказались заполненными (например, на каждом ходу заполняется одна коробочка).

Каждому вхождению связки $\oplus$ (&) в формулу A соответствует вхождение связки & ($\oplus$) в формулу $A^{\perp}$, которое мы также будем называть двойственным. Если заказчик на очередном ходу сделал выбор в формуле $B \& C$, то мы делаем точно такой же выбор в двойственной формуле $B^{\perp} \oplus C^{\perp}$.

Эта стратегия гарантирует, что мы выиграем ровно одну из формул $A, A^{\perp}$, а значит и всю формулу $A \invamp A^{\perp}$.

Правило сечения. Пусть формулы $A \invamp B$ и $(A^{\perp}) \invamp C$ аффинно истинны. Нам нужно установить аффинную истинность формулы $B \invamp C$.

Сначала заметим, что класс аффинно истинных формул не изменится, если модифицировать правила игры следующим образом. В начале игры все коробочки заказчика пусты, а в ходе игры заказчик может заполнять их по своему усмотрению: на любом ходе он может заполнить конечное число своих коробочек, при этом в каждую коробочку можно положить монетку только один раз, но делать это не обязательно. Если коробочка так и останется пустой, то в конце игры она считается ложной.

Действительно, если исполнитель желает использовать монетку из пустой в данный момент коробочки, он может просто отложить ее использование до тех пор, пока коробочка не заполнится. Если коробочка так никогда и не заполнится, то с точки зрения выигрыша это то же самое, что изначально положенная туда монетка была использована, но оказалась фальшивой.

Итак, мы можем считать, что имеются стратегии исполнителя, выигрывающие формулы $A \parr B$ и $(A^\perp) \parr C$ в новом смысле. Построим стратегию, выигрывающую формулу $B \parr C$ (в новом смысле).

Как и в предыдущем рассуждении, для каждой подформулы формулы A в составе $A \parr B$ имеется двойственная ей подформула формулы $A^\perp$ в составе $(A^\perp) \parr C$.

Кроме партии в игру $B \parr C$ будем мысленно играть партию одну партию в игру $A \parr B$ и одну партию в игру $A^\perp \parr C$, делая в них ходы и за заказчика, и за исполнителя.

На очередном нашем ходу в (реальной) игре $B \parr C$ мы делаем в указанной последовательности следующее. (а) Копируем в мысленной партии все действия, сделанные заказчиком в настоящей партии на предыдущем ходу. (б) Применяем в мысленных партиях выигрывающие стратегии к текущим позициям и соответственно модифицируем мысленные позиции. (в) Все сделанные в мнимых партиях действия, относящиеся только к формулам B, C, копируем в реальной партии (таковыми являются перекладывания монеток внутри B и C и выборы внутри B и C). Действия, касающиеся формул $A, A^\perp$ обрабатываем так. (г) Если в мнимой партии монетка была переложена в коробочку t внутри A или $A^\perp$, то мы дополнительно мысленно изготовливаем ее копию и кладем ее в двойственную к t коробку внутри $A^\perp$ или A, соответственно, делая в игре $A^\perp$ (соответственно, A) ход за заказчика. (д) Если в одной из мнимых партий монетка была переложена из мнимой коробочки s в коробочку t внутри B или C, то мы находим ту коробочку r внутри B или C, из которой в мысленной партии монетка пришла в коробку s за счет перекладывания и дублирования, и перекладываем в реальной партии монетку из r в t. (е) Наконец, если первая стратегия сделала выбор внутри A, то мы во второй из мысленных партий делаем за заказчика двойственный выбор внутри $A^\perp$. Симметричным образом действуем, если вторая стратегия сделала выбор внутри $A^\perp$.

Таким образом, после любого нашего хода позиции в мысленных партиях B, C такие же, как позиции в реальных партиях B, C, и кроме того позиции в мысленных партиях в A и $A^\perp$ синхронизированы (в том же смысле, что и раньше).

В частности, это верно и конце игры. Пусть в конце игры каждая из настоящих монеток заказчика объявлена настоящей или фальшивой. Продублируем это присваивание в мысленных формулах, а монетки в коробочках заказчика из формул A и $A^\perp$ объявим настоящими тогда и только тогда, когда истинны монетки, дублированием которых они были получены. Из-за синхронизации ровно одна из игр $A, A^\perp$ будет нами проиграна. Если это окажется A, то мы в мысленной (а значит и в реальной) партии выиграем формулу B, поскольку первая стратегия выигрышная. Если это окажется $A^\perp$, то мы выиграем формулу C в мысленной (а значит и в настоящей) партии, поскольку вторая стратегия выигрышная.

Введение $\otimes$. Пусть имеются стратегии, выигрывающие игры $A \parr C$ и $B \parr D$. Надо придумать стратегию, выигрывающую игру $A \parr B \parr (C \otimes D)$. Мы применяем обе стратегии независимо, делая в свою очередь по одному ходу каждой стратегией. Поскольку обе стратегии выигрывающие, мы выиграем игру A или игру B, или обе игры C, D.

Введение $\parr$: для этого правила формульные образы верхнего и нижнего секвента совпадают, поэтому утверждение очевидно.

Введение &. Пусть имеются стратегии, выигрывающие игры $A \parr B$ и $A \parr C$. Надо придумать стратегию, выигрывающую игру $A \parr (B \& C)$. Пока заказчик не сделал выбора в формуле

$B\&C$, можно пасовать. Как только выбор сделан, применяем первую стратегию, если выбрана B, и вторую стратегию иначе.

Первое правило введения $\oplus$. Пусть имеется стратегия, выигрывающая игру $A ⅋ B$. Стратегия, выигрывающую игру $A ⅋ (B \oplus C)$ выбирает B, а затем применяет эту стратегию. Для второго правила рассуждение аналогично.

Правила ослабления, оставления и сокращения очевидно сохраняют истинность.

Правило повышения. Пусть имеется стратегия S, выигрывающая игру $?\,A_1 ⅋ \ldots ⅋ ?\,A_n ⅋ B$. Применяя эту стратегию в счетном количестве независимых экземпляров, мы можем выиграть игру $!(?\,A_1 ⅋ \ldots ⅋ ?\,A_n ⅋ B)$, а следовательно и игру $??\,A_1 ⅋ \ldots ⅋ ??\,A_n ⅋ !\,B$, в которой выигрышный критерий более либеральный. Осталось заметить, что игра $??\,A$ это то же самое, что и $?\,A$.

Правило подстановки. Пусть формула A' получена из аффинно истинной формулы A подстановкой вместо всех вхождений некоторой переменной p некоторой формулы B. Без ограничения общности мы можем считать, что формула B не содержит переменной p.

Чтобы выиграть за исполнителя игру A', применим следующую стратегию. Будем играть параллельно одну мысленную партию в игру A и одну настоящую партию в игру A'. В мысленной партии мы будем применять выигрышную стратегию в игре A, дублируя все сделанные ей выборы в реальной игре. Кроме того, все выборы заказчика в мысленной игре A', не затрагивающие вхождений B, дублируем в мысленной партии.

Кроме этого, делаем следующее. Всякий раз, когда в мысленной партии перекладывается монетка, скажем, из коробки s в коробку t, мы объявляем соответствующие s и t вхождения формулы B симметричными и синхронизируем их. Это означает, что монетки из всех коробочек заказчика перекладываются в двойственные им коробочки исполнителя, ходы заказчика внутри одного вхождения формулы B копируются внутри другого.

Зафиксируем оценку вхождений переменных в формулу A'. Установим, что для любой подформулы C формулы A', результат игры C' в настоящей партии не хуже (для исполнителя) результата игры C в мысленной партии. При этом мы будем считать, что монетка в коробочке заказчика s вида $p^\perp$, настоящая, если выполнено одно из двух: (1) она не перекладывалась в мысленной партии или (2) перекладывалась и соответствующее s вхождение формулы B выиграл заказчик.

Для этого достаточно доказать это утверждение для случая, когда C — положительное или отрицательное вхождение переменной. Если эта переменная отлична от p, то это очевидно (результаты совпадают). Пусть C есть отрицательное вхождение переменной p. В случае (1) мы проиграли C в мысленной партии, поэтому утверждение очевидно. В случае (2) мы выиграли C в мысленной партии тогда и только тогда, когда выиграли C' в настоящей партии. Пусть C есть положительное вхождение переменной p. Если в мысленной партии мы не заполнили коробочки C, то мы проиграли C в мысленной партии, поэтому утверждение очевидно. Иначе, мы выиграли C в мысленной партии тогда и только тогда, когда выиграли C' в настоящей партии. $\square$

Аффинная логика не является полной относительно построенной интерпретации. Контрпримером является формула (пример из [1]):

$$[(a^\perp ⅋ b^\perp) \otimes (c^\perp ⅋ d^\perp)] ⅋ [(a ⅋ c) \otimes (b ⅋ d)].$$

Эта формула невыводима в аффинной логике, но аффинно истинна: исполнитель заполняет все четыре своих коробочки, получая классическую тавтологию.

С другой стороны, аффинная истинность дает полную интерпретацию позитивного фрагмента интуиционистского исчисления высказываний (ИИВ) при переводе Жирара (но неполную для всего ИИВ), что доказывает точность этого перевода для позитивных формул.

1.3. Полнота позитивного фрагмента интуиционисткой логики относительно аффинной истинности

Перевод Жирара сопоставляет каждой пропозициональной формуле со связками $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\perp$ формулу языка аффинной логики по следующему правилу. Каждой переменной сопоставляется она сама, а связки переводятся так:

$$A \vee B = {!}\,A \oplus {!}\,B, \quad A \wedge B = A \& B,$$
$$A \to B = ({!}\,A)^{\perp} \parr B = ?(A^{\perp}) \parr B, \quad \perp = \mathbf{0}.$$

При этом переводе образы выводимых в ИИВ формул выводятся в аффинной (и даже линейной) логике.

Лемма 1. Множество формул L, перевод которых аффинно истин, является суперинтуиционистской логикой (то есть, содержит все аксиомы ИИВ и замкнуто относительно правила подстановки и модус поненс).

Доказательство. Нетрудно проверить, что каждая аксиома ИИВ переводится в выводимую в аффинной (и даже линейной) логике формулу. Следовательно, по теореме 1 переводы всех аксиом аффинно истинны. По этой же теореме, множество формул, перевод которых аффинно истин, замкнуто относительно подстановки. Осталось показать, что оно замкнуто оносительно правила модус поненс. Пусть формулы A и $({!}\,A)^{\perp} \parr B$ аффинно истинны. Тогда и формула ${!}\,A$ аффинно истинна. По правилу сечения формула B также аффинно истинна. □

Теперь мы установим, что позитивный фрагмент множества L (множество всех формул из L, не содержащих $\perp$) совпадает с позитивным фрагментом ИИВ. Для этого нам понадобится следущая теорема, сформулированная Медведевым в [9] и доказанная в [7]. *Критической импликацией* называется любая формула вида $A_1 \wedge \dots \wedge A_m \to R$, где R есть дизъюнкция любых переменных, а каждая из формул A_i имеет вид $(P_i \to Q_i) \to Q_i$. При этом P_i — конъюнкция любых переменных, а Q_i — дизъюнкция любых переменных, и при каждом i формулы P_i и Q_i не имеют общих переменных. Число переменных в конъюнкциях и дизъюнкциях может быть равно единице.

Теорема 2 ([9, 7])**.** *Если суперинтуиционистская логика не содержит ни одной критической импликации, то ее позитивный фрагмент совпадает с позитивным фрагментом ИИВ.*

Теорема 3. *Если перевод Жирара формулы A, не содержащей $\perp$, является аффинно истинным, то формула A выводима в ИИВ.*

Доказательство. По теореме 2 нам достаточно доказать, что все критические импликации не являются аффинно истинными. Сначала докажем это для критической импликации

$$\begin{aligned} A &= ((x \to y) \to y) \wedge ((y \to x) \to x) \to x \vee y \\ &= ?[!(?\,x^{\perp} \parr y) \otimes y^{\perp} \oplus !(?\,y^{\perp} \parr x) \otimes x^{\perp}] \parr (x \oplus y) \end{aligned}$$

С точки зрения заказчика игра $[A]$ очевидно проще игры $[B]$, где формула B получена из A стиранием восклицательных знаков:

$$B = ?[(?\,x^\perp \parr y) \otimes y^\perp \oplus (?\,y^\perp \parr x) \otimes x^\perp] \parr (x \oplus y).$$

Мы докажем, что у заказчика имеется выигрышная стратегия в игре $[B]$. Точнее, в игре $[B]$ никаких ходов заказчик делать не может, поэтому надо лишь в конце игры правильно определить, какие из монет настоящие, а какие фальшивые. Это делается следующим образом: если исполнитель не сделает выбора в формуле $x \oplus y$, то определим, что все монетки настоящие. Заказчик выиграл тогда формулу $x \oplus y$ и все подформулы вида $(?\,x^\perp \parr y) \otimes y^\perp$ и $(?\,y^\perp \parr x) \otimes x^\perp$.

Допустим, исполнитель сделал выбор в формуле $x \oplus y$, выбрав x (другая возможность симметрична). Тогда определим, что все монетки в коробочках x фальшивые, а все монетки в коробочках y настоящие. Заказчик выиграл формулу $x \oplus y$ и выиграл все вхождения формулы $(?\,x^\perp \parr y) \otimes y^\perp$, поскольку выиграл $y^\perp$. Кроме того, он выиграл все вхождения формулы $(?\,y^\perp \parr x) \otimes x^\perp$, поскольку выиграл $?\,y^\perp \parr x$.

Теперь перейдем к общему случаю. Пусть имеется критическая импликация

$$A = A_1 \wedge \dots \wedge A_m \to R = ?({A_1}^\perp \oplus \ldots \oplus {A_m}^\perp) \parr R,$$

где $A_i = (P_i \to Q_i) \to Q_i$, а следовательно

$${A_i}^\perp = !(?\,{P_i}^\perp \parr Q_i) \otimes {Q_i}^\perp.$$

Убрав операцию ! в формуле $!(?\,{P_i}^\perp \parr Q_i)$, мы получим более сложную с точки зрения заказчика формулу $?\,P_i^\perp \parr Q_i$. Поэтому достаточно выиграть игру, соответствующую получившейся формуле B.

Играя за заказчика в игру $[B]$, действуем так. Нам можно делать выборы внутри вхождений формул ${Q_i}^\perp$ для тех i, для которых формула Q_i содержит хотя бы две переменные. Зафиксирум одно такое вхождение. Выбор делается, если произойдет одно из двух: (1) исполнитель сделал выбор в формуле Q_i в том же вхождении формулы ${A_i}^\perp$; в этом случае мы делаем тот же выбор, что и исполнитель (если выбор не сделан ранее), (2) исполнитель сделал выбор в формуле R, выбрав x_j (или изначально формула R была равна переменной x_j); тогда мы выбираем (если выбор не сделан ранее) в ${Q_i}^\perp$ любую переменную, отличную от x_j.

Если в ходе игры исполнитель сделал выбор в формуле R, заменив ее на переменную x_j, или изначально формула R была равна переменной x_j, то в конце игры мы объявляем истинными все монетки в коробочках, отличных от x_j, а все монетки в коробочках x_j фальшивыми. Если R состоит из более чем одной переменной и выбора в формуле R не сделано, то все монетки объявляются истинными.

Докажем, что игра нами выиграна. Сначала рассмотрим второй случай (все монетки объявлены истинными). Действительно, мы выиграли формулу R. Кроме того в каждом вхождении формулы $(?\,{P_i}^\perp \parr Q_i) \otimes {Q_i}^\perp$ мы выиграли формулу $?\,{P_i}^\perp$. Поскольку мы копировали выборы исполнителя в формуле Q_i, мы также выиграли одну из формул Q_i, ${Q_i}^\perp$, а значит и всю формулу $(?\,{P_i}^\perp \parr Q_i) \otimes {Q_i}^\perp$.

Докажем, что мы выиграли также и в первом случае. Формулу R мы выиграли, но необходимо доказать, что мы выиграли еще и все вхождения формул ${A_i}^\perp$. Зафиксируем одно такое вхождение и рассмотрим два случая. (1) Формула Q_i есть переменная, отличная от переменной x_j, или мы выбрали в $Q_i^\perp$ некоторую переменную x_k отличную от x_j. Тогда мы выиграли формулу $Q_i^\perp$ в этом вхождении формулы $A_i{}^\perp$, а значит и всю формулу $A_i{}^\perp$. (2) В оставшемся случае формула Q_i совпадает с x_j или мы выбрали из $Q_i^\perp$ формулу x_j (вслед за исполнителем). Тогда мы выиграли $?\,P_i{}^\perp \parr Q_i$. Действительно, P_i не содержит x_j, значит мы выиграли все вхождения формулы $P_i^\perp$ в $?\,P_i{}^\perp \parr Q_i$, а также формулу Q_i. □

1.4. Неполнота интуиционисткой логики относительно аффинной истинности

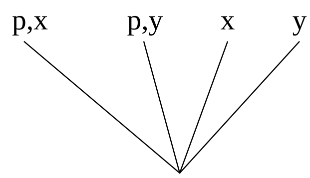
Нам известны две невыводимые в ИИВ формулы, перевод которых аффинно истин: формула Роуза [10] и формула, предложенная Джапаридзе [6],

$$(\neg p \to x \vee y) \wedge (\neg\neg p \to x \vee y) \to (\neg p \to x) \vee (\neg p \to y) \vee (\neg\neg p \to x) \vee (\neg\neg p \to y). \qquad (1)$$

Теорема 4. *Формула* (1) *невыводима в ИИВ, но аффинно истинна.*

Доказательство. Эта формула опровергается на модели Крипке, показанной на Рис. 1.

Рис. 1. Контр-модель Крипке: в каждой вершине помещен список переменных, истинных в этой вершине.



Докажем, аффинную истинность формулы (1). На самом деле, мы докажем аффинную истинность более общей формулы

$$(\neg p \to x \vee y) \wedge (\neg\neg p \to u \vee v) \to U,$$

где

$$U = (\neg p \to x) \vee (\neg p \to y) \vee (\neg\neg p \to u) \vee (\neg\neg p \to v).$$

Играя за исполнителя, мы действуем так. Будем называть данное вхождение формулы $(x \vee y)^\perp$ *активным* в данный момент игры, если оно находится внутри такого вхождения формулы $(x \vee y)^\perp \wedge (\neg\neg p \to u \vee v)$, что мы к этому моменту сделали выбор в этом вхождении и выбрали левую из формул. Аналогично определяется активность вхождений формулы $(u \vee v)^\perp$. Пока заказчик не сделал выбора ни в одном из вхождений формул $(x \vee y)^\perp$ или $(u \vee v)^\perp$, мы не делаем выбора в игре U. Другими словами, до этого момента мы играем в игру

$$(\neg p \to \bot) \wedge (\neg\neg p \to \bot) \to \bot.$$

Поскольку эта формула выводима в ИИВ, существует выигрышная стратегия в этой игре, которую мы и применяем до тех пор, пока исполнитель не сделал ни одного выбора.

Допустим, в некоторый момент игры заказчик выбрал, скажем, x в одном из активных вхождений формулы $(x \vee y)^\perp$. Рассмотрим то вхождение формулы $(\neg p \to x \vee y)^\perp$, где был сделан этот выбор. После этого мы забываем про все остальные вхождения формул $(\neg p \to x \vee y)^\perp$

и $(\neg\neg p \to u \vee v)^{\perp}$ (их мы можем и проиграть) и выбираем $\neg p \to x$ в игре U. С этого момента мы будем играть в игру $(\neg p \to x)^{\perp} ⅋ (\neg p \to x)$, которая аффинно истинна. Правда, непосредственно мы не можем применять выигрышную стратегию для этой формулы, поскольку в играх, соответствующих вхождениям $\neg p$ в формулу

$$(\neg p \to x)^{\perp} = \,!\,\neg p \otimes x^{\perp}$$

уже были сделаны некоторые ходы. Однако бесконечное монеток $p^{\perp}$ в каждом из вхождений $\neg p = ?\,p^{\perp}$ не были нами использованы, поэтому текущая позиция в игре $(\neg p \to x)^{\perp}$ будет не хуже начальной позиции этой игры. $\square$

Заметим, что если переводить дизъюнкцию $A \vee B$ просто как $A \oplus B$, то не все аксиомы ИИВ перейдут в аффинно истинные формулы. А именно, таковым не будет перевод аксиомы

$$(x \to r) \to ((y \to r) \to (x \vee y \to r)).$$

Позже мы определим вариант семантики ресурсов, лишенный этого недостатка. Как окажется, она равнобъемна семантике Бласса из [1].

2. Сравнение с семантикой Бласса и ее вариантами

2.1. Семантика Бласса из [1]

Приведем определения (с незначительными техническими изменениями, не влияющими на множество истинных формул). Будем рассматривать игры двух игроков со счетным ходов и счетным числом возможностей для каждого хода. Игроков будем называть пропонентом и оппонентом. Чтобы задать игру, надо указать счетное множество M возможных ходов, некоторое подмножество T множества конечных последовательностей элементов M (очередь хода) и некоторое подмножество W множества всех бесконечных последовательностей элементов M (выигрышный критерий). Позицией в игре является конечная последовательность элементов M, начальная позиция — пустая последовательность. Если текущая позиция p принадлежит T, то ходит пропонент, иначе — оппонент. Очередным ходом может быть любой элемент M, который приписывается в конец последовательности p. После счетного числа ходов игра заканчивается и пропонент объявляется выигрывшим, если последовательность сделанных ходов (протокол партии) принадлежит W. Иначе выигравшим объявляется оппонент.

Стратегией для пропонента называется любое отображение из множества T в M. Аналогично определяется понятие стратегии для оппонента. Страгегия игрока X называется выигрышной, если для любой последовательности ходов другого игрока, сделанных против этой стратегии, игра закончится выигрышем игрока X.

Поскольку в рассматриваемых играх длина партии бесконечна, они могут быть недетерминированными, то есть ни у одного из игроков может не быть выигрышной стратегии.

Теперь определим операции над играми, соответствующие связкам аффинной логики.

Инвертирование ${}^{\perp}$. Игра $A^{\perp}$ отличается от игры A тем, что игроки меняются ролями: оппонент играет в роли пропонента, а пропонент в роли оппонента.

Аддитивная конъюнкция &. В игре $A \& B$ первым ходит оппонент и выбирает любую из игр A, B. Затем играется выбранная им игра. Кто в ней выиграл, тот объявляется выигравшим игру $A \& B$.

Аддитивная дизъюнкция $\oplus$. Игра $A \oplus B$ отличается от игры $A\&B$ тем, что первым ходит пропонент и он (а не оппонент) определяет, в какую из двух игр они будут играть. Другими словами, $A \oplus B = (A^\perp \& B^\perp)^\perp$.

Мультипликативная дизъюнкия $⅋$. Игра $A ⅋ B$ состоит в том, что одновременно играются две партии: одна партия в игру A и одна партия в игру B. Игроки ходят попеременно, начиная с оппонента. За один ход игроку разрешается сделать один ход в любой из партий, где его ход (а можно и спасовать). Пропонент выигрывает, если он выиграет хотя бы одну из двух партий. При этом незаконченная партия считается проигранной тем игроком, чья очередь хода в ней.

Мультипликативная конъюнкция $\otimes$. Множество позиций и правила хода в игре $A \otimes B$ точно такие же, что и в игре $A ⅋ B$. Разница лишь в том, что теперь оппонент выигрывает, если он выиграет хотя бы одну из двух партий. Другими словами, $A \otimes B = (A^\perp ⅋ B^\perp)^\perp$.

Экспоненциальная дизъюнкция ?. Позицией в игре $?\,A$ является кортеж $\langle p_1, \dots, p_n \rangle$ позиций в игре A любой конечной длины $n \geq 1$. Начальной позицией является кортеж $\langle p_1 \rangle$, состоящий из начальной позиции в игре A. Игроки ходят попеременно, начиная с оппонента. За один ход оппоненту разрешается сделать один ход в любой из позиций $p_1, \dots, p_n$, в которой его ход (он играет их в роли оппонента). За один ход пропоненту разрешается сначала скопировать любую из позиций p_i из кортежа $\langle p_1, \dots, p_n \rangle$, после этого новая позиция будет равна $\langle p_1, \dots, p_n, p_i \rangle$. Затем он может сделать один ход в любой из партий $p_1, \dots, p_n, p_i$ (или $p_1, \dots, p_n$, если он не прибегал к копированию), в которой его ход. Пропонент выигрывает, если он выиграет хотя бы одну из играемых партий. При этом незаконченная партия считается проигранной тем игроком, чья очередь хода в ней.

В определении игры $?\,A$ мы для понятности отошли от канонов, определив сначала множество позиций, а затем множество ходов, разрешенных в данной позиции. Нетрудно преобразовать это описание игры в стандартное, в котором ходами будут натуральные числа. Впрочем, отступление от канонов было и в определении игр $A ⅋ B$, $A \otimes B$, $A \oplus B$, $A\&B$.

Экспоненциальная конъюнкция !. Множество позиций и правила хода в игре $!\,A$ точно такие же, что и в игре $?\,A$. Разница в том, что теперь оппонент может копировать позиции (а пропонент не может) и выигрывает, если он выиграет хотя бы одну из играемых партий. Другими словами, $!\,A = (?\,A^\perp)^\perp$.

2.2. Модификация семантики Бласса

Изменим в определении Бласса семантику связок $!, ?$. Теперь в игре $?\,A$ пропоненту разрешается увеличивать кортеж только за счет добавления начальной позиции игры A: из позиции $\langle p_1, \dots, p_n \rangle$ он может перейти в позицию $\langle p_1, \dots, p_n, p_{n+1} \rangle$, где p_{n+1} — начальная позиция в игре A. Аналогичное ограничения налагается на оппонента в игре $!\,A$.

По-другому можно сказать так: позицией в играх $?\,A, !\,A$ является бесконечная последовательность $p_1, p_2, \dots$ позиций в игре A, которая изначально состоит из начальных позиций и никаких копирований не допускается. В свою очередь игрок может сделать ход в любой из партий p_i, в которой его ход (а может и ничего не делать). Игру $?\,A$ выиграл исполнитель, если в конце игры хотя бы одна из партий p_i выиграна им или в ней ход заказчика. Игру $!\,A$ выиграл исполнитель, если в конце игры каждая из партий p_i выиграна им или в ней ход заказчика. Будем называть модифицированную таким образом семантику называть семантикой Бласса *с увеличениями (parallel recurrence)*.

Будем называть игру *нормальной*, если возможные ходы в ней — натуральные числа. Ясно, что любая игра может быть "нормализована" выбором некоторой биекции между ее множеством ходов и множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$.

Теорема 5. *Для семантики Бласса с увеличениями следующие три утверждения равносильны:*
(1) Формула A аффинно истинна в семантике с увеличениями.
(2) Существует стратегия пропонента S, выигрывающая любую игру вида $A(G_1, \ldots, G_n)$, где $G_1, \ldots, G_n$ — нормальные игры.
(3) Для любых нормальных игр $G_1, \ldots, G_n$ существует стратегия пропонента S, выигрывающая игру $A(G_1, \ldots, G_n)$.

Во втором пункте существенна нормальность игр, иначе стратегии заведомо не существует. Действительно, стратегия является отображением из множества последовательностей ходов, а это множество зависит от множества ходов в $G_1, \ldots, G_n$. А в третьем пункте можно подставлять и произвольные игры, поскольку любая игра может быть нормализована.

Доказательство. Докажем, что (1) влечет (2). Допустим, что исполнитель имеет выигрышную стратегию S в игре $[A]$ (мы будем пользоваться вторым определением экспоненциальных операций). Нам надо построить выигрышную стратегию в игре $A(G_1, \ldots, G_n)$.

Если для всех i заменить в формуле A каждое вхождение переменной x_i на некоторую позицию в игре G_i и заменить знаки операций на операцию взятия кортежа, то получится позиция в игре $A(G_1, \ldots, G_n)$. При этой замене каждое вхождение переменной x_i (коробочка) переходит в позицию в одной из партий в игру G_i. Будем называть эту партию *соответствующей* исходному вхождению.

Играя в $A(G_1, \ldots, G_n)$ в роли пропонента, будем мысленно параллельно играть партию в игру G_A, применяя в ней стратегию S. Выборы пропонента из настоящей партии $A(G_1, \ldots, G_n)$ будем дублировать в мысленной партии, как ходы заказчика. А выборы, сделанные стратегией S в мысленной партии будем дублировать в настоящей партии.

Если в мысленной партии некоторое положительное вхождение t переменной x_i объявляется стратегией S симметричным некоторому отрицательному вхождению s той же переменной, мы в реальной партии «синхронизируем» соответствующие t и s партии в игру G_i. Это означает, что имитируя ходы пропонента, мы добиваемся совпадения позиций в этих партиях после любого нашего хода. Это возможно, поскольку одну из них мы играем за пропонента, а другую за оппонента.

Докажем, что с помощью описанной стратегии мы выиграем игру $A(G_1, \ldots, G_n)$. Мысленная партия выиграна, как бы мы ни определили, какие из монет настоящие. Сделаем это следующим образом: если заказчик выиграл партию в игру G_i, соответствующую положительному вхождению переменной s, то скажем, что монета в коробочке s настоящая, а иначе фальшивая. Если эта монетка была переложена в мысленной партии в коробочку t, то соответствующую t партию в G_i мы выиграем тогда и только тогда, когда монетка настоящая. Поскольку мысленную партию в игру $[A]$ мы выиграли, мы выиграли и настоящую партию.

Теперь докажем обратное: отрицание (1) влечет отрицание (2). Нам дано, что в игре $[A]$ у исполнителя нет выигрышной стратегии. Предположим сначала, что игра $[A]$ детерминирована, а значит выигрышная стратегия есть у заказчика.

Фиксируем стратегию S пропонента в игре вида $A(G_1, \ldots, G_n)$. Нам нужно определить выигрышный критерий в нормальных играх $G_1, \ldots, G_n$ так, чтобы стратегия S проигрывала игру $A(G_1, \ldots, G_n)$. Исход игр $G_1, \ldots, G_n$ будет зависеть только от первых двух ходов (первого хода оппонента и следующего за ним хода пропонента).

Запустим стратегию S и будем играть против нее за оппонента следующим образом. Представим себе, что мы одновременно с игрой $A(G_1, \ldots, G_n)$ мысленно играем в игру $[A]$ с заказчиком, умеющим выигрывать игру $[A]$. На очередном нашем ходу в настоящей партии мы делаем следующее (в указанной последовательности). (а) Дублируем в мысленной партии все выборы, сделанные пропонентом на последнем ходу в настоящей партии. (б) Перекладываем монетки в мысленной партии (какие именно и куда, мы уточним позднее). (в) Применяем выигрышную стратегию заказчика в мысленной партии. (г) Дублируем в настоящей партии все выборы, сделанные ей. (д) В каждой из партий в игры G_i, в которой наш ход, указываем в качестве очередного хода натуральное число, равное номеру этой партии (для этого мы изначально присваиваем каждой партии в игру G_i уникальный номер).

Пункт (б) выполняется следующим образом. Пусть партия U в игру G_i соответствует отрицательному вхождению x_i, а партия V — положительному вхождению x_i (а значит мы играем первую партию за пропонента, а вторую за оппонента). И пусть оказалось, что первые два хода уже сделаны в обеих партиях и позиции в этих партиях после первых двух ходов оказались одинаковыми. Тогда мы называем U и V симметричными и объявляем симметричными соответствующие вхождения x_i.

В силу пункта (г) для каждого i для каждой партии в игру G_i существует не более одной другой партии в игру G_i, симметричной ей, поэтому мы не нарушим правил игры.

Итак, мы определили, как ходит оппонент в игре $A(G_1, \ldots, G_n)$ против стратегии S. Нам дано, что при некотором присваивании значений 0,1 вхождениям переменных в A заказчик выиграл всю формулу A. Определим выигрышный критерий в сыгранных партиях в игры $G_1, \ldots, G_n$ следующим образом: в данной партии U выиграл пропонент тогда и только тогда, когда соответствующее U вхождение переменной истинно. Этот критерий гарантирует совпадение исходов мысленной и настоящей игр. Поскольку заказчик выиграл мысленную партию, мы выиграли настоящую партию. Важно, что любые две партии с одинаковым протоколом симметричны, и поэтому нам не придется объявлять некоторый протокол выигрышным для оппонента и пропонента одновременно.

Осталось избавиться от предположения о детерминированности игры $[A]$. Как нетрудно понять, мы описали некоторое преобразование $S \mapsto S'$ стратегий пропонента в игре вида $A(G_1, \ldots, G_n)$ в стратегии исполнителя в игре $[A]$. По условию существует последовательность ходов заказчика и решения об истинности монеток, обыгрывающая стратегию S'. Последовательность ходов заказчика преобразовывается в последовательность ходов оппонента, а решения об истинности монеток преобразуются в выигрышный критерий на сыгранных партиях.

Ясно, что (2) влечет (3). Осталось доказать, что отрицание (2) влечет отрицание (3). Дано, что для любой стратегии S можно так определить выигрышный критерий в нормальных играх играх $G_1, \ldots, G_n$, чтобы стратегия S проигрывала игру $A(G_1, \ldots, G_n)$. Требуется определить нормальные игры $G_1, \ldots, G_n$ так, чтобы игра $A(G_1, \ldots, G_n)$ не выигрывалась никакой стратегией. Для этого заметим, что количество возможных стратегий пропонента в играх вида $A(G_1, \ldots, G_n)$ континуально. Вполне упорядочим множество стратегий по типу первого континуального ординала $\mathfrak{c}$.

Трансфинитной рекурсией по стратегиям определим последовательность ходов оппонента, обыгрывающую данную стратегию, а также для некоторого множества протоколов игры примем решение об их выигрышности/проигрышности в играх $G_1, \dots, G_n$. На каждом шаге рекурсии мы будем определять выигрышный критерий на счетном количестве протоколов.

Пусть нам надо обыграть очередную стратегию S. Поскольку для каждой из игр G_i выигрышный критерий к этому моменту определен менее, чем на континуальном количестве протоколов, найдется такая последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \dots$, что выигрышный критерий в G_i не был определен ранее ни на одном протоколе вида

$$a_1, *, *, *, a_2, *, *, *, a_3, *, *, *, \dots$$

и ни на одном протоколе вида

$$*, a_1, *, *, *, a_2, *, *, *, a_3, *, *, \dots.$$

Можно считать, что эта последовательность не зависит от i (это удобно, чтобы не вводить новых индексов).

Теперь определим следующее преобразование $H \mapsto H'$ на нормальных играх. Игра H' получается из игры H игнорированием всех ходов с нечетными номерами, то есть исход H' в партии с протоколом

$$o_1, p_1, o_2, p_2, o_3, p_3, o_4, p_4, \dots$$

такой же, как и исход H в партии с протоколом

$$o_2, p_2, o_4, p_4, \dots.$$

Пусть пропонент использует стратегию S в игре вида $A(H'_1, \dots, H'_n)$. Играя такую игру за оппонента, будем во всех партиях в игры $H'_1, \dots, H'_n$ на нечетных ходах указывать числа $a_1, a_2, \dots$. Этим мы гарантируем, что для любой партии в любую из игр H'_i выигрышный критерий в G_i не определен ранее на протоколе, возникшем в этой партии.

На ходах с четными номерами будем пробовать всевозможные натуральные числа. Это означает, что мы играем в игру $A(H_1, \dots, H_n)$ против стратегии S', которая получена из S фиксированием всех наших ходов с нечетными номерами, как $a_1, a_2, \dots$, и игнорированием ходов с нечетными номерами, сделанных S (в играх $H_1, \dots, H_n$). По условию существуют игры $H_1, \dots, H_n$ и последовательность ходов оппонента, приводящая к проигрышу стратегией S' игры $A(H_1, \dots, H_n)$. Вставим в эту последовательность через один (в партии в игры $H_1, \dots, H_n$) ходы $a_1, a_2, \dots$. Полученная последовательность ходов проигрышна для S в игре $A(H'_1, \dots, H'_n)$. Осталось определить выигрышный критерий в играх $G_1, \dots, G_n$ на сыгранных протоколах так же, как в играх $H'_1, \dots, H'_n$. $\square$

2.3. Афинная семантика с копированиями (branching recurrence)

Возникает естественное желание изменить семантику ресурсов так, чтобы теорема 5 стала верной для сематики Бласса с копированиями. Для этого изменим определение операций $!, ?$. Раньше мы до начала игры заменяли каждое вхождение формулы вида $!\,A$ на формулу $A \otimes A \otimes \dots$, а каждое вхождение формулы вида $?\,A$ на $A \invamp A \invamp \dots$. Теперь не будем делать такой замены, а вместо этого в ходе игры разрешим заказчику и исполнителю модифицировать исходную формулу. А именно, заказчик на своем ходу может заменить любое вхождение формулы вида $!\,A$ на $!\,A \otimes !\,A$ (то есть, скопировать его), а исполнитель — заменить любое вхождение формулы вида $?\,A$ на $?\,A \invamp ?\,A$. Первое вхождение формулы $?\,A$ в формулу $?\,A \invamp ?\,A$

отождествляется с исходной формулой $?\,A$, а второе считается новым и называется сыном $?\,A$. При этом надо договориться, что происходит, если к моменту копирования внутри формулы $!\,A$ (или $?\,A$) были сделаны некоторые ходы (любым из игроков). Все выборы, сделанные внутри $!\,A$ (или $?\,A$), считаются сделанными и в ее сыне. Вообще, теперь нам удобно считать, что при выборе формула $B \oplus C$ просто заменяется на выбранную формулу (и тоже самое при выборах заказчика). Тогда выборы копируются автоматически. Отношение симметрии между коробочками после каждого копирования изменяется следующим образом. Пусть до копирования коробочка t внутри $!\,A$ (или $?\,A$) была симметрична коробочке s. После копирования исполнитель может сделать вхождение s симметричным либо исходному вхождению t, либо его сыну (точнее, тому вхождению, которое находится внутри сына скопированной формулы). Оставшаяся не использованной копия t может быть сделана симметричной в будущем только некоторой копии s.

Точнее следует сказать так. После каждого хода исполнителя у на множестве коробочек заданы два отношения: отношение сильной симметрии и отношение слабой симметрии (все сильно симметричные вхождения являются слабо симметричными). Одно и то же вхождение переменной может быть слабо симметрично нескольким вхождениям, но сильно симметрично — только одному. В начале игры любое положительное вхождение слабо симметрично любому отрицательному вхождению той же переменной. Затем отношение слабой симметрии меняется после копирований и перекладываний монеток следующим образом. При копировании коробочки t, слабо симметричной коробочке s, оба вхождения t и t' считаются слабо симметричными s, при этом t перестает быть (сильно) симметричной s, если это было так до копирования.

Кроме того, исполнитель может на своем ходу выбрать любое множество пар слабо симметричных коробочек (s, t), образующих паросочетание и объявить каждую пару сильно симметричными. При этом s, t перестают быть слабо симметричными любым другим вхождениям.

Как нетрудно видеть, эти правила гарантирует следующее свойство “транзитивности” слабой симметрии: если s слабо симметрично t, то s и t вхождения одной и той же переменной, причем одно из них положительное, а другое отрицательное; если s слабо симметрично t, а t слабо симметрично r, причем r слабо симметрично u, то s слабо симметрично u.

В ходе игры текущая формула меняется и в конце игры возникает конечная или бесконечная формула конечной глубины. Полезно отметить, что при этих правилах коробочки, сильно симметричные после данного хода исполнителя, могут перестать быть таковыми после следующего его хода. Предельное отношение симметрии между вхождениями переменных в эту формулу определяется так: в пределе коробочка t симметрична коробочке s, если она была сильно симметрична ей в бесконечное число моментов игры. Нетрудно понять, что в пределе для каждой коробочки может быть не более одной симметричной коробочки: если s в некоторый момент была сильно симметричной t, а потом стала сильно симметричной вхождению r, то r является потомком t (сыном или сыном сына и т.д.) и в будущем s может быть симметричной только некоторому потомку r, то есть не может быть симметричной t.

Выигрышность получившейся в конце игры формулы определяется, как и раньше, а знаки $!, ?$ при определении выигрыша игнорируются.

Чтобы отличить новую семантику от старой, будем называть ее семантикой с копированиями (branching recurrence), а старую семантику - семантикой с увеличениями (parallel recurrence). Теорема 1 и ее доказательство переносятся без изменений новую семантику:

Теорема 6. *Для семантики с копированиями: множество аффинно истинных секвентов* *содержит все аксиомы аффинной логики и замкнуто относительно применения всех правил вывода аффинной логики, а также относительно правила подстановки.*

Вот пример формулы, которая аффинно истинна по новому определению, но не аффинно истинна по старому:
$$?(x^{\perp}\&y^{\perp})\parr(!\,x \oplus !\,y).$$

Афинная истинность в новой семантике: ждем пока заказчик сделает первый ход в игре $x^{\perp}\&y^{\perp}$. Как только это произойдет, делаем аналогичный выбор в игре $!\,x \oplus !\,y$. После этого игра превращается в игру $?\,x^{\perp}\parr !\,x$ или $?\,y^{\perp}\parr !\,y$ (в зависимости от выбора заказчика). Каждая из этих формул выводится в аффинной логике, а потому аффинно истинна.

Афинная ложность в старой семантике: заказчик делает, скажем выбор $x^{\perp}$ в каждом из вхождений $x^{\perp}\&y^{\perp}$ (по одному выбору на каждый ход) до тех пор, пока исполнитель не сделает выбора в игре $!\,x \oplus !\,y$. Если исполнитель выбрал $!\,y$, то он очевидно, проиграет, поскольку заказчик может объявить все монеты вида y фальшивыми. Если исполнитель выбрал $!\,x$, то заказчик перестает выбирать $x^{\perp}$ в формулах вида $x^{\perp}\&y^{\perp}$, вместо этого выбирает в них $y^{\perp}$. В конце игры он обявляет все выбранные им монетки настоящими, а остальные фальшивыми.

Нетрудно убедиться, что теорема 1 сохраняется для семантики с копированиями. Однако для этой семантики можно упростить перевод дизъюнкци, положив
$$A \vee B = A \oplus B.$$

Будем называть модифицированный таким образом перевод упрощенным переводом Жирара.

Лемма 2. Множество формул, упрощенный перевод которых аффинно истин в семантике с копированиями, является суперинтуиционистской логикой.

Доказательство. Нетрудно убедиться, что переводы всех аксиом, кроме аксиомы
$$(x \to z) \to ((y \to z) \to (x \vee y \to z)),$$
выводимы в линейной логике. Перевод этой аксиомы есть
$$B = ?(!\,x \otimes z^{\perp})\parr ?(!\,y \otimes z^{\perp})\parr ?(x^{\perp}\&y^{\perp})\parr z.$$

Формула B уже не является выводимой даже в аффинной логике, поскольку она не является аффинно истинной в семантике с увеличениями. Докажем, что она является аффинно истинной в семантике с копированиями. Действительно, как мы видели, в семантике с копированиями истинна формула
$$A = ?(x^{\perp}\&y^{\perp})\parr(!\,x \oplus !\,y).$$
Нетрудно убедиться, что секвент $\vdash A^{\perp}\parr B$ выводим в аффинной логике, а следовательно, также аффинно истин. Секвент $\vdash B$ получается из секвентов $\vdash A^{\perp}\parr B$ и $\vdash A$ по правилу сечения, и по теореме 1 также аффинно истин. □

Теорема 3 и ее доказательство переносятся без изменений:

Теорема 7. *Если упрощенный перевод Жирара формулы A, не содержащей $\perp$, является аффинно истинным в семантике с копированиями, то формула A выводима в ИИВ.*

Теорема 5 переносится без изменений (изменения понадобятся в доказательстве) на семантику Бласса с копированиями (то есть, на исходную семантику Бласса из [1]).

Теорема 8. *Для семантики Бласса (с копированиями) следующие три утверждения равносильны:*
(1) Формула A аффинно истинна в семантике с копированиями.
(2) Существует стратегия S, выигрывающая в любой игре $A(G_1, \dots, G_n)$, где $G_1, \dots, G_n$ — нормальные игры.
(3) Для любых нормальных игр $G_1, \dots, G_n$ существует стратегия S выигрывающая игру $A(G_1, \dots, G_n)$. (Это и есть определение истинности формулы A из статьи [1].)

Доказательство. Докажем, что (1) влечет (2). Допустим, что исполнитель имеет выигрышную стратегию S в игре $[A]$. Играя в $A(G_1, \dots, G_n)$ в роли пропонента, будем мысленно параллельно играть партию в игру $[A]$, применяя в ней стратегию S. Выборы и копирования пропонента из настоящей партии $A(G_1, \dots, G_n)$ будем дублировать в мысленной партии, как ходы заказчика. А выборы и копирования, сделанные стратегией S в мысленной партии, будем дублировать в настоящей партии.

Кроме этого, мы поддерживаем истинность следующего утверждения о синхронизации симметричных друг другу партий в игры $G_1, \dots, G_n$ (после каждого нашего хода в настоящей партии). Пусть вхождения s и t переменной x_i симметричны, и им соответствуют партии U, V в игру G_i в реальной партии. Тогда (а) если s сильно симметрично t, то позиции в партиях U, V совпадают, и (б) если s слабо симметрично t, то в одной из партий U, V наш ход и в этой партии мы можем сделать несколько ходов подряд так, что позиция в ней станет равна позиции в другой из партий U, V.

Ясно, что (а) и (б) сохраняются при копированиях. Утверждение (б) сохраняется при любых ходах противника в играх G_i. Утверждение (а) может быть нарушено ходом противника в одной из сильно симметричных партий. Но его легко восстановить, скопировав ходы противника в симметричной партии.

Наконец, пусть стратегия S объявила два вхождения s и t симметричными. Тогда мы в реальной партии находим позиции в игру G_i, соответствующие s и t. В силу инварианта в одной из них наш ход и с помощью некоторой последовательности наших ходов из этой позиции можно перейти в позицию, равную позиции в другой из них. Эти ходы мы и делаем, чтобы сохранить инвариант.

Докажем, что с помощью описанной стратегии мы выиграем игру $A(G_1, \dots, G_n)$. Мысленная партия выиграна, как бы мы ни определили, какие из монет настоящие. Сделаем это следующим образом: если в пределе коробочка заказчика s не симметрична никакой коробочке исполнителя, то объявим ее истинной. Пусть в пределе коробочка заказчика заказчика s симметрична коробочке исполнителя t. Рассмотрим партии U, V в игру G_i, соответствующие этим вхождениям. По инварианту, начиная с некоторого момента игры мы бесконечное число раз добивались совпадения позиций в партиях U, V. Значит в конце игры последовательность ходов, сделанных в них совпадает.

Если заказчик выиграл партию в игру U, то объявим монетку в коробочке s истинной, а иначе ложной. В силу совпадения позиций, мы выиграем партию V тогда и только тогда, когда монетка в коробочке t настоящая. Поэтому исход настоящей партии не хуже для нас, чем исход мысленной партии. Поскольку мысленную партию в игру $[A]$ мы выиграли, то выиграли и настоящую партию в игру $A(G_1, \dots, G_n)$.

Докажем импликацию (отрицание (1) влечет отрицание (2)). Она доказывается в общем так же, как для семантики с увеличениями, но в доказательстве необходимы некоторые изменения.

Нам дано, что в игре $[A]$ у исполнителя нет выигрышной стратегии. Опять предположим, что игра $[A]$ детерминирована, а значит выигрышная стратегия есть у заказчика.

Фиксируем стратегию S пропонента в игре вида $A(G_1, \ldots, G_n)$. Нам нужно определить выигрышный критерий в нормальных играх $G_1, \ldots, G_n$ так, чтобы стратегия S проигрывала игру $A(G_1, \ldots, G_n)$.

Запустим стратегию S и будем играть за оппонента следующим образом. Как и раньше, мы играем настоящую партию параллельно с мысленной партией в $[A]$, дублируя копирования и выборы.

Из-за копирования позиций могут возникать новые партии в игры $G_1, \ldots, G_n$, поэтому мы не можем изначально перенумеровать все партии в эти игры. Вместо этого мы нумеруем их on-line, присваивая номера партиям по мере их возникновения. Как только в нашу очередь можно будет сделать ход в данной партии игру G_i, мы в качестве хода указываем номер этой партии. Первый такой ход после возникновения партии или последнего ее копирования (или вообще первый наш ход в ней, если партия существовала с самого начала и не была до сих пор скопирована) мы будем называть *ключевым* ходом в данный момент. Партию в которой такой ход уже сделан, будем называть *начатой*. Если партии U и V в игру G_i обе начаты, играются нами в разных ролях и позиции в них согласованы (одна получается из другой несколькими ходами), то будем называть их *подобными*. Определим также слабо подобные партии: партии U и V в игру G_i слабо подобны, если после того, как в них сделать ключевые ходы, они станут подобными (в частности, подобные партии слабо подобны).

На очередном нашем ходу в реальной партии мы делаем следующее (в указанном порядке). (а) Перекладываем монетки в мысленной партии по следующему правилу: положительное и отрицательное вхождения s и t переменной x_i объявляются симметричными, если соответствующие партии $[s], [t]$ в игру G_i подобны. (б) Дублируем в мысленной партии все копирования и выборы, сделанные пропонентом на последнем ходу в настоящей партии. (в) Применяем выигрышную стратегию заказчика в мысленной партии. (г) Дублируем в настоящей партии все копирования и выборы, сделанные ей. (д) В каждой из партий в игры G_i, в которой наш ход, указываем в качестве очередного хода натуральное число, равное номеру этой партии (первый такой ход после последнего копирования будет ключевым).

Нам надо доказать, что правила игры позволяют сделать перекладывания монеток в пункте (а), то пары вхождений s и t, удовлетворяющие условиям этого пункта, слабо симметричны и образуют паросочетание. Последнее очевидно, поскольку каждая партия может быть подобной только одной партии. Для первого нам достаточно доказать истинность следующего инварианта перед выполнением пункта (а): если позиции в партиях $[s]$ и $[t]$ в игру G_i слабо подобны, то s и t слабо симметричны.

В начале игры это утверждение очевидно. В ходе игры оно могло бы нарушиться только, когда появляется новая пара слабо подобных партий, удовлетворяющая посылке этого утверждения, или какая-нибудь пара вхождений перестает быть слабо симметричной. Первое могло бы произойти при копировании, однако не происходит, потому что копирование не нарушает слабой симметрии. Второе могло бы произойти после выполнения пункта (а): если s объявляется сильно симметричным t, то s перестает быть слабо эквивалентным всем вхождениям, кроме t. Пусть r вхождение, отличное от t. Почему мы уверены, что s и r не являются слабо подобными? Потому, что очередной ключевой ход в r не равен ключевому входу в t, а значит не равен и соответствующему ходу в s (который по предположению уже сделан и равен ключевому ходу в t).

Если в конце игры позиции в двух разных партиях в игру G_i оказались совпавшими, то все ключевые ходы в них одинаковы, а значит в пределе соотвествующие вхождения x_i симметричны. Дальше можно рассуждать точно так же, как в доказательстве теоремы 5.

Эквивалентность (2) и (3) доказывается точно так же, как и раньше. □

2.4. Вычислимые варианты семантик Бласса и теория алгоритмов

В определении семантики Бласса требуется, чтобы для любых нормальных игр $G_1, \ldots, G_n$ существовала стратегия S, выигрывающая игру $A(G_1, \ldots, G_n)$. Однако не требуется, чтобы существовал алгоритм, выигрывающий игру $A(G_1, \ldots, G_n)$ (то есть, не требуется существования вычислимой выигрышной стратегии). В 2003–2006 годах Джапаридзе предложил ограничиться только вычислимыми стратегиями (более подробно о семантике Джапаридзе, который ввел другие существенные изменения, мы расскажем в следующем разделе). Будем называть игры, в которых пропонент имеет вычислимую выигрышную стратегию, разрешимыми.

Вполне вероятно, что требование вычислимости выигрышной стратегии не уменьшает множество истинных формул. Объясним, почему мы так думаем. На новую семантику легко переносится теоремы 5 и 8 и их доказательства:

Теорема 9. *Для семантики Бласса (с копированиями) следующие три утверждения равносильны:*
(1) Существует вычислимая выигрышная стратегия исполнителя в игре $[A]$ *(в семантике с копированиями).*
(2) Существует вычислимая стратегия, выигрывающая в любой игре вида $A(G_1, \ldots, G_n)$, *где* $G_1, \ldots, G_n$ *— нормальные игры.*
(3) Для любых нормальных игр $G_1, \ldots, G_n$ *игра* $A(G_1, \ldots, G_n)$ *разрешима.*

То же самое верно и для семантики с увеличениями.

Маловероятно, что существует формула A, для которой в игре $[A]$ исполнитель имеет выигрышную стратегию, но не имеет вычислимой выигрышной стратегии. Поэтому мы и считаем, что требование вычислимости не сужает класса истинных формул.

Однако для фиксированной игры требование вычислимости выигрышной стратегии может оказаться существенным. Многие алгоритмические проблемы классической теории алгоритмов естественным образом формулируются в терминах разрешимости некоторых игр. Приведем соответствующие примеры.

1. *Проблемой вычисления частичной функции* $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ называется игра, первым в которой ходит оппонент и выбирает произвольное $n \in \mathbb{N}$. После этого ходит только пропонент. На каждом ходу он либо говорит 'пас', либо выдает натуральное число m. Если $f(n)$ не определено, то пропонент выигрывает, если он пасует все время. Если $f(n)$ определено, то пропонент выигрывает, если первый его ход, не являющийся пасом, равен $f(n)$. Эта игра разрешима тогда и только тогда, когда частичная функция f вычислима. Эту игру будем обозначать через $Com\, f$.

2. *Проблемой перечисления множества* $M \subset \mathbb{N}$ называется игра, в которой время ходит пропонент и на каждом ходу говорит "пас" или указывает натуральное число. Пропонент

выигрывает, если множество указанных им натуральных чисел совпадает с M. Эту игру будем обозначать через EnM. Она разрешима, если и только если множество M перечислимо.

3. *Проблемой разрешения множества* $M \subset \mathbb{N}$ называется игра $Dec\, M = Com\, \chi_M$ (проблема вычисления характеристической функции M).

4. Пусть A, B непересекающиеся подмножества множества натуральных чисел. *Проблемой отделения A и B* называется игра, в которой первым ходом оппонент выбирает натуральное число n, а вторым ходом пропонент должен указать число $m \in \{0, 1\}$ (последующие ходы не имеют значения). При этом пропонент выигрывает, если $n \in A \Rightarrow m = 0$ и $n \in B \Rightarrow m = 1$. Если n не принадлежит ни A, ни B, то пропонент выигрывает, какое бы $m \in \{0, 1\}$ он ни указал. Эту игру будем обозначать через $Sep(A, B)$, ее разрешимость означает отделимость множеств A, B.

С помощью импликации $A \to B = ?\, A^{\perp} \wp B$ можно единообразным способом определить сводимость алгоритмических проблем друг к другу: игра A сводится к игре B, если игра $A \to B$ разрешима. [1] Нетрудно проверить, что игра $Dec\, S \to Dec\, T$ разрешима тогда и только тогда, когда T сводится по Тьюрингу к S. Аналогичное верно для игры $EnS \to EnT$: она разрешима тогда и только тогда, когда T сводится по перечислимости к S. Пользуясь этим, можно формулировать равномерные варианты многих классических теорем. Например, равномерный вариант теоремы Поста выглядит так:

> Для *любого* множества натуральных чисел M игра $EnM \wedge En(\mathbb{N} \setminus M) \to Dec\, M$ разрешима. То есть, проблема разрешения M всегда сводится к конъюнкции проблем перечисления M и его дополнения.

Единое определение разных видов сводимости, можно дать и с помощью массовых проблем по Медведеву. То же самое относится и к равномерным вариантам классических теорем теории алгоритмов. Поэтому операции Бласса с операциями Медведева.

Приведем определения Медведева, пользуясь игровым языком. Пусть M произвольное множество всюду определенных функций из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$. Рассмотрим игру, в которой все время ходит пропонент и выигрывает, если перечислит график некоторой функции, принадлежащей M. Игры такого вида называются *массовыми проблемами.*

Игры, возникающие в теории алгоритмов, по-существу являются массовыми проблемами. Говоря точнее, обозначим через $\mathcal{S}C$ множество всех выигрышных стратегий для пропонента в игре C. При подходящем кодировании множества всех позиций и возможных ходов натуральными числами, множество $\mathcal{S}C$ превращается в массовую проблему, состоящую в перечислении графика некоторой стратегии из $\mathcal{S}C$. Эту массовую проблему мы будем также обозначать через $\mathcal{S}C$. Нетрудно убедиться, что каждая из игр A вида 1–5, определенных выше, эквивалентна игре $\mathcal{S}A$. (Игры A и B называются эквивалентными, если обе игры $A \to B$ и $B \to A$ разрешимы.)

Дизъюнкция и конъюнкция массовых проблем $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ определяется соответственно, как $\mathcal{S}(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B})$ и $\mathcal{S}(\mathcal{A} \& \mathcal{B})$. Импликацию массовых проблем $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ можно определить любым из двух эквивалентных способов

$$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} = \mathcal{S}(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) = \mathcal{S}(\mathcal{A}^{\perp} \wp \mathcal{B}).$$

Полезно отметить, что игры $\mathcal{S}(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B})$ и $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ эквивалентны. То же самое верно и для игр $\mathcal{S}(\mathcal{A} \& \mathcal{B})$ и $\mathcal{A} \& \mathcal{B}$. Однако, игра $\mathcal{S}(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ не эквивалентна игре $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$. В чем разница между

[1] Все утверждения этого и следующего разделов справедливы для обоих вариантов семантики Бласса.

ними? Чтобы выиграть в первой игре, пропонент должен демонстрировать свою выигрывающую стратегию в игре $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ "целиком", давая оппоненту много информации. Прибегая к метафоре, можно сказать, что он должен опубликовать пособие, обучающие выигрывать в эту игру. Оппонент вообще не делает ходов в этой игре; он выиграл автоматически, если демонстрируемая пропонентом стратегия невыигрышна. В игре $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ оппонент делает ходы, и чтобы выиграть, он должен "уметь" играть. Если оппонент не умеет играть, то может проиграть и при этом не получить никакой информации от пропонента.

Следует заметить, что, несмотря на различие игр $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ и $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$, каждая из них разрешима тогда и только тогда, когда разрешима другая. Поэтому различие между ними может проявиться только, когда эти операции итерируются. Например, могут найтись массовые проблемы $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ такие, что массовая проблема $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{C}$ разрешима, а игра $(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to \mathcal{C}$ неразрешима. (Противоположное невозможно, поскольку игра $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ всегда проще игры $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ с точки зрения пропонента.) Пример такого сорта несложно придумать. Более того, он возникает при попытке дать равномерную формулировку следующей известной теоремы.

Теорема 10 (Альберт Мучник [8])**.** *Для любых двух перечислимых непересекающихся множеств R, S и любого множества T, если проблема перечисления множества T сводится (по Тьюрингу) к проблеме отделения множеств R, S, то множество T перечислимо.*

Равномерный ее вариант для массовых проблем гласит:

Теорема 11 (Альберта Мучника, равномерный вариант)**.** *Для любых перечислимых непересекающихся множеств R, S и любого множества T, массовая проблема $(Sep(R, S) \Rightarrow EnT) \Rightarrow EnT$ разрешима. Более того, существует вычислимая стратегия, выигрывающая любую игру вида $EnR \wedge EnS \wedge (\mathcal{S}ep(R, S) \Rightarrow EnT) \Rightarrow EnT$, где R, S непересекающиеся множества.*

А для игр аналогичное утверждение ложно:

Теорема 12 (Андрей Мучник)**.** *Существуют перечислимые непересекающиеся множества R, S и множество T такие, что игра*

$$(Sep(R, S) \to EnT) \to EnT = ?(!\,Sep(R, S) \otimes EnT^{\perp}) \parr EnT$$

неразрешима.

Доказательство. Мы приведем доказательство для семантики Бласса с копированиями. Для семантики с увеличениями доказательство еще проще. Пусть R, S любые перечислимые неотделимые множества, а T любое неперечислимое множество. В каждой из партий в игру $!\,Sep(R, S) \otimes EnT^{\perp}$ оппонент изготавливает счетное число начальных позиций в игру $Sep(R, S)$. В каждой из них он указывает свое натуральное число n. Поскольку R и S неотделимы, хотя бы одну из этих копий вычислимая стратегия пропонента проиграет. Значит пропонент проиграет все партии в игру $!\,Sep(R, S) \otimes EnT^{\perp}$. А поскольку T неперечислимо, пропонент проиграет также игру EnT. □

Это пример показывает, что импликация Медведева $\Rightarrow$ бывает более удобной, чем импликация Бласса $\to$. С другой стороны, с помощью импликации Бласса более естественно определяется полиномиальная сводимость по Тьюрингу (для всех видов алгоритмических проблем): игра A полиномиально сводится к игре B, если игра $A \to B$ полиномиально разрешима (то есть, пропонент имеет в ней выигрышную стратегию, вычислимую за полиномиальное от битовой длины позиции время). Например, множество R сводится по Тьюрингу за полиномиальное время к множеству S, если игра $Dec\,S \to Dec\,R$ полиномиально разрешима. Точно так же определяется сводимость за полиномиальное время проблем разрешения к проблемам отделения, проблем отделения друг к другу и т.д. (Заметим в скобках, что выигрышные стратегии, построенные в доказательстве теоремы корректности, полиномиальны по времени. Поэтому любая выводимая в ИИВ формула при подстановке любых игр превращается в полиномиально разрешимую игру.) Для массовых проблем сводимость за полиномиальное время требует введения новой модели — машин Тьюринга с оракулом. Конечно, можно было бы с самого начала определять массовую проблему $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ с помощью непрерывных операторов, переводящих оракул в оракул. Но тогда определение импликации для массовых проблем стало бы более сложным.

3. Сравнение с семантикой Джапаридзе

Семантику Джапаридзе [2, 3] проще всего получить из семантики Бласса с копированиями, сделав следующие изменения.

Во-первых, потребуем существование вычислимой выигрышной стратегии в играх $A(G_1, \dots, G_n)$ (возможные ходы, а значит и позиции, должны быть конструктивными объектами).

Во-вторых, в подставляемых играх $G_1, \dots, G_n$ не все ходы могут быть разрешены в любой позиции; в правилах игр $G_1, \dots, G_n$ должно быть указано, какие ходы разрешены в данной позиции. При этом не требуется, чтобы существовал алгоритм проверки разрешенности хода. В играх $A \invamp B$, $A \& B$, $?\,A$, $!\,A$ игроки могут делать только разрешенные ходы в каждой из играемых партий. Это ограничивает возможности вычислимых стратегий, поскольку они могут не знать, какие ходы разрешены.

Наконец, Джапаридзе следующим образом изменяет определение игры $?\,A$. А именно, в каждый момент игры позиция является не кортежем позиций в игру A, как у Бласса, а корневым деревом. Все вершины этого дерева, кроме корня, помечены ходами в игру A. Каждой вершине сопоставлена позиция в игре A, состоящая из ходов, ведущих в эту вершину. Изначально это дерево состоит из одного корня. На своем ходу пропонент может выбрать любую вершину этого дерева и вырастить из нее нового сына, помеченного любым разрешенным в позиции, соответствующей этой вершине, ходом. Оппонент же может делать ходы только в листьях этого дерева. После счетного числа ходов возникает конечное или бесконечное дерево, все вершины которого, кроме корня, помечены ходами. Пропонент объявляется выигравшим, если хотя бы одному листу в этом дереве соответствует позиция, в которой ходит оппонент, или если имеется бесконечная ветвь, последовательность ходов вдоль которой является выигрышным протоколом для пропонента в игру A.

Аналогичным образом изменяется и определение игры $!\,A$.

Замечание. Допустим, что все возможные ходы в игру A разрешены. Тогда в игре $?\,A$ у пропонента есть вычислимая стратегия, заключающаяся в переборе всех вообще возможных последовательностей ходов. Эта стратегия всегда выигрывает игру $?\,A$, за исключением случая, когда в игре A у оппонента есть выигрышная стратегия, а значит выиграть $?\,A$ невозможно. (Для игр общего вида это уже не так, поскольку наличие запрещенных ходов препятствует перебору всех последовательностей ходов.) Поэтому игра A эквивалентна по Джапаридзе игре $\mathcal{S}A$ (то есть, обе игры $A \to \mathcal{S}A$, $\mathcal{S}A \to A$ разрешимы при интепретации импликации по Джапаридзе). Для таких игр логика Джапаридзе в сигнатуре $\vee, \wedge, \to, \bot$ совпадает с логикой массовых проблем Медведева.

Авторам неизвестно, совпадает ли множество формул, истинных в семантике Джапаридзе, с множество формул, истинных в вычислимой (или обычной) семантике Бласса с копированиями. В работе [2] доказано, что аффинная логика корректна относительно семантики Джапаридзе, а в работе [3], по всей видимости, доказано, что позитивный фрагмент ИИВ полон при (обычном и упрощенном) переводе Жирара относительно семантики Джапаридзе.

Литература

[1] Andreas Blass. A game semantics for linear logic. Annals of Pure and Applied Logic 56 (1992) 183–220.

[2] Giorgi Japaridze. Intutionistic computability logic I. 2004. Preprint available at arXiv.org/abs/cs.LO/0411008.

[3] Giorgi Japaridze. The intutionistic fragment of computability logic at the propositional level. 2006. Preprint available at arXiv.org/abs/cs.LO/0602011.

[4] Giorgi Japaridze. The logic of tasks. Annals of Pure and Applied Logic 117 (2002) 263–295.

[5] Giorgi Japaridze. Introduction to Cirquent Calculus and Abstract Resource Semantics. Journal of Logic and Computation 2006 16(4):489-532

[6] Giorgi Japaridze, Письмо Н.В. от 04.11.2005.

[7] Chernov A. V., Skvortsov D. P., Skvortsova E. Z., Vereshchagin N. K. Variants of Realizability for Propositional Formulas and the Logic of the Weak Law of Excluded Middle. *Proceedings of Computer Science Logic'02*, Lecture Notes in Computer Science, 2002, v. 2471, pp. 74–88.

[8] А.А. Мучник. Об отделимости рекурсивно перечислимых множеств. *Доклады АН СССР*, т. 109, вып. 1, 1956, с. 29–32.

[9] Ю. Т. Медведев. Финитные задачи. *Доклады АН СССР*, т. 142, вып. 5, 1962, с. 1015–1018.

[10] G. F. Rose. Propositional calculus and realizability. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 75, N. 1, 1953, p. 1–19.