

1 Покажите, что число слов длины n и сложности строго меньше n заключено между 2^{n-c} и $2^n - 2^{n-c}$ (при некотором c и всех n).

2 Пусть $f(n)$ обозначает максимальное время работы оптимального декомпрессора на тех входах длины не более n , на которых он останавливается. Докажите, что для любой вычислимой всюду определенной функции $g(n)$ для всех достаточно больших n выполнено неравенство $f(n) > g(n)$.

3 Докажите, что

$$KS(x, y) \leq KS(x) + KS(y) + \log(KS(x) + KS(y)) + O(1)$$

4 Докажите, что для любого слова x длины не больше n математическое ожидание количества общей информации в x и случайном слове длины n есть $O(\log n)$.

5 Докажите, что $(n-1)K(x_1, \dots, x_n)$ не превосходит суммы сложностей всех кортежей, получающихся из кортежа x_1, \dots, x_n вычеркиванием одного из членов (с точностью до $O(\log K(x_1, \dots, x_n))$).

6 Пусть последовательность $x_1 x_2 \dots$ случайна по Мартин-Лефу относительно равномерной меры. Оставим в этой последовательности только те биты, перед которыми стоит 1. Докажите, что полученная последовательность бесконечна и случайна по Мартин-Лефу.

7 Оцените некоторой функцией от n (с точностью до постоянного слагаемого) среднее арифметическое префиксных сложностей слов длины n .

8 Верно ли неравенство $KM(xy) \leq KM(x) + KM(y) + O(1)$?