Математическая логика и алгоритмы
Программа курса 2011

Н.К. Верещагин

1. Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов

1. Языки первого порядка и их модели. Аксиомы и правила вывода исчисления предикатов. Лемма о дедукции для исчисления предикатов и ее доказательство. (Этого на лекциях не было, но надо знать на экзамене!) Аксиомы равенства.
2. Теории, непротиворечивые и полные теории. Модель теории. Элементарная эквивалентность любых двух моделей полной теории. Теорема Линденбаума о пополнении непротиворечивой теории.
3. Экзистенциально полные теории. Теорема о существовании полного и экзистенциально полного расширения любой непротиворечивой теории.
4. Теорема о существовании модели полной и экзистенциально полной теории. Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов.

2. Элементарные теории интерпретаций: аксиоматизация и разрешимость

5. Элиминация кванторов в элементарной теории целых чисел с операцией добавления единицы. Разрешимость и аксиоматизация этой теории.
6. Элиминация кванторов в элементарной теории упорядоченного множества рациональных чисел. Разрешимость и аксиоматизация этой теории. Элементарная эквивалентность любых двух линейно упорядоченных плотных множеств без первого и последнего элементов.

7. Аксиоматизация элементарной теории упорядоченного множества целых чисел. Доказательство полноты этой аксиоматизации, а также разрешимости этой теории, при помощи элиминации кванторов для формул сигнатуры, расширенной добавлением функций $x+1, x-1$.
8. Элиминация кванторов в элементарной теории поля комплексных чисел. Разрешимость и аксиоматизация этой теории. Элементарная эквивалентность любых двух алгебраически замкнутых полей одной характеристики.
9. Элиминация кванторов в элементарной теории упорядоченного поля действительных чисел (теорема Зайденберга-Тарского). Разрешимость и аксиоматизация этой теории.

3. Арифметика Пеано (формальная арифметика)

10. Аксиомы арифметики Пеано, как теории первого порядка. Доказательство основных свойств сложения и умножения. Определение порядка и доказательство его свойств.
11. Бета-функция Гёделя $\beta(u, v, x)$ и её свойства. Выразимость возведения в степень с помощью формулы формальной арифметики. Вывод в арифметике Пеано утверждения о существовании и единственности такого y, для которого $\beta(u, v, x) = y$.
12. Принцип свёртывания: если для всех $x < n$ существует единственное y, для которого $A(x, y)$, то найдутся u, v такие, что $\beta(u, v, x)$ равно этому y для всех $x < n$ (где A — некоторая формула). Вывод принципа свёртывания в формальной арифметике. Финитные доказательства и тезис арифметичности (любая финитно доказуемая формула выводима в арифметике).
13. Первая теорема Гёделя о неполноте формальной арифметики (существует истинная недоказуемая формула). Принцип отражения (с доказательством) и доказательство первой теоремы Гёделя о неполноте (с предъявлением формулы). Финитно доказуемая формулировка первой теоремы Гёделя о неполноте (в обычной форме, не в форме Гёделя-Россера).
14. Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики Пеано (непротиворечивость арифметики, записанная естественным образом с помощью

бета-функции Гёделя, не выводима в арифметике). Доказательство второй теоремы с помощью теорем Бернайса и Принципа отражения (которые здесь доказывать не надо). Финитно доказуемая формулировка второй теоремы о неполноте.

4. Аксиоматическая теория множеств Цермело–Френкеля ZF

15. Наивная теория множеств Кантора и её противоречивость. Аксиомы теории множеств Цермело–Френкеля. Доказательство существования объединения, пересечения и разности множеств.
16. Определение упорядоченной пары по Куратовскому и вывод основного свойства пары. Отношения и функции. Доказательство существования декартова произведения двух множеств и области определения и множества значений функции. Доказательство существования функции, определённой на данном множестве данной формулой.
17. Определение ординалов. Лемма о минимальном ординале. Лемма о сравнимости любых двух ординалов. Свойства порядка на ординалах. Существование ординала, большего всех ординалов из данного множества.
18. Последователи и предельные ординалы. Определение натурального числа. Вывод аксиом Пеано. Доказательство существования множества натуральных чисел.
19. Трансфинитная индукция. Определения по трансфинитной индукции (трансфинитная рекурсия). Построение изоморфизма между данным вполне упорядоченным множеством и некоторым ординалом.
20. Аксиома выбора. Теорема Цермело и ее доказательство в ZFC. Лемма Цорна и её доказательство в ZFC.
21. Кардиналы и определение мощности множества (в ZFC). Определение конечных множеств, как равномощных натуральным числам. Теорема Кантора–Бернштейна и лемма о сравнении двух множеств (мощность A не больше мощности B тогда и только тогда, когда A равномощно подмножеству B). Теорема Кантора о мощности множества всех подмножеств. Кардинал, следующий за данным. Гипотеза континуума.
22. Любой кардинал, не являющийся натуральным числом, пределен. Бесконечность всех таких кардиналов. Неравномощность любых различных

натуральных чисел.
23. Сложение, умножение и возведение в степень на кардиналах. Согласованность этих операций с обычными арифметическими операциями на натуральных числах.
24. Сумма и произведение кардиналов равно максимальному из них, если хотя бы один из кардиналов бесконечен.
25. Операции на ординалах (сумма, произведение и возведение в степень). Примеры несогласованности операций на ординалах и кардиналах.
26. Борелевские множества. Доказательство континуальности семейства борелевских множеств.
27. Первая теорема Гёделя о неполноте для ZF: если ZF непротивоеречива, то ZF неполна (доказательство с помощью формулы Гёделя–Россера). Вторая теорема о неполноте для ZF: если ZF непротивеоречива, то её непротиворечивость невыводима в ZF.

Литература

[1] Н. Верещагин, А. Шень. Математическая логика и теория алгоритмов. Начала теории множеств. Москва: изд-во МЦНМО, 1999.

[2] Н. Верещагин, А. Шень. Математическая логика и теория алгоритмов. Исчисления и языки. Москва: изд-во МЦНМО, 2000.

[3] Дж. Шёнфилд. Математическая логика. М. Наука, 1975.