На правах рукописи

УДК 510.64

ФЕДОРИШИН БОГДАН РОМАНОВИЧ

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРАВИЛ ВЫВОДА В НЕСТАНДАРТНЫХ ЛОГИКАХ

01.01.06 — математическая логика,

алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Красноярск-2002

Диссертация выполнена в Красноярском государственном университете

Научный руководитель — доктор физико-математических наук, профессор РЫБАКОВ В.В.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, с.н.с. МАРДАЕВ С.И.
кандидат физико-математических наук РИМАЦКИЙ В.В.

Ведущая организация — Иркутский государственный университет, г. Иркутск

Защита состоится 27 декабря 2002 года в 10 часов на заседании диссертационного совета Д 212.099.02 в Красноярском государственном университете по адресу 660041, г. Красноярск, пр. Свободный 79.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Красноярского государственного университета.

Автореферат разослан 22 ноября 2002 года.

Учёный секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук,
доцент Голованов М.И.

22.122

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Разработка теории для допустимых правил вывода восходит к исследованиям Новикова, который рассматривал наряду с понятием производного правила(допустимого правила) понятие сильно производного правила вывода. Новиков [7] в своей работе затронул дедуктивные аспекты производных правил вывода в интуиционистской логике. Общепринятое понятие допустимого правила появилось в работе Лоренцена [21], который высоко оценил значимость введенного понятия. Наблюдение Лоренцена заключалось в том, что допустимым правилом для логики λ, является правило вывода относительно которого логика λ замкнута. По сути допустимость правил позволяет нам получать более эффективный вывод формул в данном языке. Таким образом введение допустимого правила позволило смотреть на дедуктивные свойства логических систем с новой точки зрения. Крипке [19, 20] подробно разработал реляционную семантику для модальной и интуиционистской логики, что позволило применять теоретико-модельную технику в исследованиях допустимых правил вывода. В свою очередь Григолия [2] исследовал связь свободных алгебр счетного ранга из многообразий некоторых нестандартных логик, например интуиционистской, и соответствующих им реляционных канонических моделей.

Изучения свойств интуиционистской логики относительно характеристических формул стали проводиться в работах Янкова [13, 17]. Характеристические формулы выражают свойство конечных подпрямо неразложимых псевдобулевых алгебр не являться подалгеброй гомоморфных образов любой псевдобулевой алгебры. Позднее в работе Циткина [12] появилось понятие квазихарактеристического правила вывода, причем введенное понятие усилило подход Янкова, поскольку выражает свойство порождающей данное правило подпрямо неразложимой алгебры не являться подалгеброй алгебры из $Var(H)$. Исследования Янкова и Циткина были продолжены Рыбаковым в [23], где было получено описание для конечных подпрямо неразложимых модальных $K4$-алгебр. В связи с которым было введено понятие жесткого фрейма [24]. Таким образом исследование квазихарактеристических правил перешло на новый качественный уровень, поскольку понятно, что реляционный инструментарий более гибкий чем операционный, так как фрейм имеет наглядное представление и позволяет нам изменять его форму в непосредственной геометрической связи. Цель появления понятия жесткого фрейма выявляется в характеризации самодопустимого правила вывода. А именно в [24] был получен следующий критерий: правило порождающее конечную подпрямо неразложимую $K4$-алгебру является самодопустимым тогда и только тогда, когда фрейм порождающий алгебру не является жестким. Так же в [25] приводится описание всех типов жестких фреймов глубины не более 2, причем существует всего три типа жестких фрейма глубины не более 2.

Финитная аппроксимируемость относительно допустимости правил вывода возникает как естественное обобщение понятия финитной аппроксимируемости. Финитная аппроксимируемость имеет место в большинстве индивидуальных нормальных модальных и суперинтуиционистских логик, но если изучать данное свойство с точки зрения допустимости, то свойство нарушается к примеру в логиках $K4$, $S4$, GL, Grz. Такие примеры были получены в [26], главный результат данного исследования состоит в том, что все нормальные модальные логики над $K4$ ширины минимум 3 со свойством ко-покрытия не имеют свойства финитной аппроксимируемости по допустимости. Логики со свойством финитной аппроксимруемости по допустимости расширяют логику $S4$ имеют ширину менее 2, а также фрейм специального вида не принадлежит множеству $SF(\lambda)$, где $SF(\lambda)$ обозначает совокупность подфреймов фреймов адекватных λ. В качестве примера из известных нормальных модальных логик можно привести логику $S4.3$. В указанных работах серьезное место занимает Теорема Файна [15] о полноте модальных логик конечной ширины над $K4$.

Первоначальные результаты о наследовании допустимости правил получены в [22], где установлено достаточное условие для отсутствия наследования допустимых правил интуиционистской логики H. В [27] установлен критерий наследования допустимости правил вывода для финитно аппроксимирумых расширений логики $S4$. Весомую роль в этом критерии играет свойство ко-покрытия, которое в зависимости от типа логики позволяет получать новые адекватные фреймы. Также в упомянутой работе получен критерий наследования допустимости для табличных расширений логики $S4$.

Первые результаты о базисах для допустимых правил были получены Цитккиным [12] для квазихарактеристических правил в логике H, базис для допустимых квазихарактеристических правил логики H состоит из одного обобщенного правила Минца [6], тем самым было получено решение проблемы 42 [16] в частном случае. Базисы для допустимых правил вывода в нестандартных логиках стали активно изучаться после решения Рыбаковым открытых вопросов [16]: проблема о распознаваемости допустимых правил в интуиционистской логике Гейтинга H(проблема 40)[16], вопрос Кузнецова(проблема 42,[16]) о существовании конечного базиса для допустимых правил интуиционистской логики.

Поворотным стал момент о несуществовании конечных базисов для таких логик как H, $S4$, Grz, GL [10, 23], то есть в таких логиках нельзя получить конечное описание для допустимых правил вывода. Бабенышевым [1] было установлено, что $S4.2$ и $S4.2Grz$ не имеют конечного базиса для допустимых правил вывода.

Алгебраический эквивалент этих результатов означает, что свободная алгебра из многообразия соответствующего логике не имеет конечного базиса квазитождеств. В отличие от указанных логик $S4.3$ обладает конечным базисом для допустимых правил [9] и более того любое расширение $S4.3$ обладает конечным базисом, такой базис состоит из единственного правила, очевидно предтабличная суперинтуиционистская логика LC также обладает конечным базисом. Римацким в [8] исследована конечная базируемость модальных логик ширины 2. Описание явного базиса для допустимых правил было получено в [18], где был предложен явный базис для интуиционистской логики, немного позднее в работе [28] с использованием техники правил вывода в редуцированной форме было получено описание явного базиса для допустимых правил в модальной логике $S4$.

Цель работы.

1. Получить с точностью до изоморфизма описание класса жестких Grz-фреймов глубины 3.
2. Исследовать свойство финитной аппроксимируемости по допустимости правил вывода в суперинтуиционистских логиках.
3. Исследовать свойство наследования допустимости $K4$ для логик расширяющих $K4$.
4. Построить явный базис допустимых правил вывода логики GL.

Методика исследования. В исследовании применяются общие методы теоретико-модельной, реляционной и алгебраической семантик для пропозициональных модальных и суперинтуиционистских логик.

Научная новизна. Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми и снабжены подробными доказательствами. Результаты совместных работ получены в нераздельном соавторстве.

Основные результаты В диссертации получены следующие основные результаты

1. Доказано, что класс жестких Grz-фреймов глубины 3 состоит из семи специальных типов.

2. Найдены достаточные условия для свойства финитной аппроксимируемости по допустимости и его отсутствия в суперинтуиционистских логиках.

3. Найден критерий наследования допустимости $K4$ в расширениях логики $K4$.

4. Построен явный базис допустимых правил вывода логики GL.

Теоретическая и практическая ценность. Все полученные результаты носят теоретический характер и могут быть использованы в дальнейших исследованиях нестандартных логик, а также в таких областях как универсальная алгебра, теория моделей, теория графов и computer science.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на

- международных научных студенческих конференциях "Студент и научно-технический прогресс" (Новосибирск, 1999, 2000, 2001),

- международной конференции посвященной 60-летию со дня рождения Ю.Л.Ершова (Новосибирск, 2000),

- международной конференции "Дифференциальные уравнения и симметрия" (Красноярск, 2000),

- международной конференции посвященной 70-летию со дня рождения В.П.Шункова и 65-летию В.М.Бусаркина(Красноярск, 2002).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 12 работ [29]–[40] Основные результаты диссертации опубликованы в [32], [33], [35]–[37], [39], [40].

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав и заключения. Библиографический список использованной литературы включает 128 наименований. Объём работы 96 страниц машинописного текста.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность выбранной в диссертационной работе темы, формулируются научная проблема и её различные аспекты, даётся краткий обзор результатов по данной теме, описывается современное состояние вопроса, формулируется цель исследования, определяется предмет исследования, уточняется содержание поставленных задач, описываются основные методы исследования и даётся обзор всех разделов диссертации.

Первая глава содержит необходимые общие сведения о модальных и суперинтуиционистских логиках, а также основные факты реляционной семантики Крипке и алгебраической семантики для этих логик.

В первых разделах каждой из следующих глав содержатся все необходимые предварительные сведения, касающиеся конкретных тем исследований.

В заключении излагаются основные результаты решения поставленных задач, подводятся итоги проведённых исследований, отмечается их научная новизна, теоретическая значимость и практическая ценность, указываются возможные области применения, обсуждаются возникающие новые нерешённые проблемы и перспективы их разрешения.

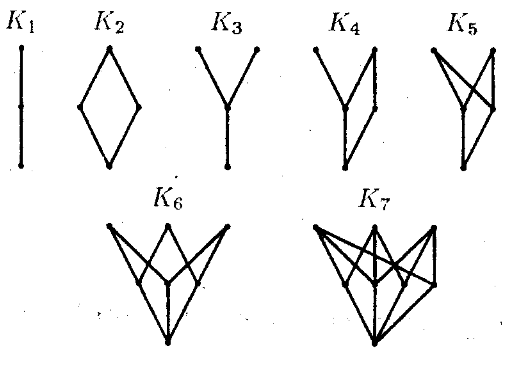
Во второй главе исследуется строение, а также описания класса жестких фреймов глубины 3 адекватных Grz.

В разделе 2.1 приведены исследования Циткина [12] о квазихарактеристических правилах вывода, определения самодопустимого правила вывода и жесткого фрейма, критерий Рыбакова, Терзилера, Генцера [24] самодопустимости квазихарактеристического правила вывода.

Раздел 2.2 посвящен исследованию строения жесткого фрейма.

В разделе 2.3 доказываются структурные факты о жестком Grz-фрейме глубины трех, затем (**Теорема 2.3**) о том, что любой жесткий Grz-фрейм глубины 3 имеет не более трех максимальных элементов. Далее доказывается основная теорема главы.

Теорема 2.4 *Все жесткие фреймы в классе корневых Grz-фреймов глубины 3 исчерпываются списком K_i, где $i = 1, ..., 7$.*



В главе 3 исследуется финитная аппроксимируемость по допустимости в логиках расширяющих интуиционистскую логику H.

В разделе 3.1 приводятся результаты Рыбакова, Кияткина, Онера [26] о финитной аппроксимируемости по допустимости правил вывода в нормальных модальных логиках над $K4$.

В разделе 3.2 приводится построение последовательности правил вывода R, затем при условиях финитной аппроксимируемости и свойства ко-покрытия, а также наложения ограничения на ширину суперинтуиционистской логики λ показывается (**Лемма 3.3**), что любое правило из последовательности R является допустимым для λ. Затем вводится в рассмотрение интуиционистский фрейм F ширины более 2, в котором определяется специальное семейство подмножеств A_k^l и доказывается вспомогательный результат (**Лемма 3.4**) о том, что на любом элементе b из F посылка правила $r \in R$ опровергается тогда и только тогда, когда $b \in A_k^l$. Далее доказывается (**Лемма 3.5**), что в R существует правило, которое опровергается на конечном интуиционистском фрейме. Затем используя накопленные результаты доказывается основной результат раздела 3.2.

Теорема 3.3 *Любая суперинтуиционистская логика λ ширины более двух со свойством ко-покрытия не обладает финитной аппроксимируемостью по допустимости.*

В разделе 3.3 изучаются три типа фреймов M_1, M_2, M_3 с помощью которых доказывается **Лемма 3.6** о том что M_k, где $k \in \{1, 2, 3\}$ является адекватным фреймом для λ — суперинтуиционистской логики ширины не более 2, если и только, если M_2 принадлежат $SF(\lambda)$. После чего доказывается основной результат исследования в разделе 3.3.

Теорема 3.5 *Пусть суперинтуиционистская логика λ имеет ширину не более двух и $M_2 \notin SF(\lambda)$, тогда* *(a)логика λ финитно аппроксимируема;*

(b)логика λ финитно аппроксимируема по допустимости правил вывода.

Глава 4 посвящена исследованию наследования допустимости правил вывода $K4$ в логиках расширяющих $K4$.

В разделе 4.1 вводится определение наследования допустимых правил вывода логики λ_1 в логике λ_2, расширяющей λ_1, а также приводятся критерии Рыбакова, Генцера и Онера [27] для наследования допустимых правил вывода $S4$ в логиках расширяющих $S4$, а также наследовании допустимых правил вывода $S4$ в табличных логиках расширяющих $S4$.

В разделе 4.2 вводятся определения ко-последователя над $K4$ и свойства ко-покрытия над $K4$. Затем доказывается достаточное условие наследования допустимых правил $K4$ (**Лемма 4.1**), далее необходимое условие (**Лемма 4.2**). Из которых вытекает основной результат раздела 4.2.

Теорема 4.3 *Финитно аппроксимируемая модальная логика λ, $K4 \subseteq \lambda$ наследует все допустимые правила вывода $K4$ тогда и только тогда, когда λ имеет свойство ко-накрытия над $K4$.*

В разделе 4.3 изучается применение критерия наследования допустимых правил $K4$ доказывается **Лемма 4.5** о том, что любая табличная логика над $K4$ не имеет свойства ко-покрытия над $K4$ из чего вытекает (**Следствие 4.1**) о несохранении допустимых правил вывода $K4$ в табличных логиках расширяющих $K4$. Далее приводятся примеры индивидуальных логик ненаследующих допустимые правила вывода в логике $K4$.

В главе 5 строится базис для допустимых правил вывода в логике Геделя-Леба. В разделе 5.1 приводятся результат Иемхофф [18] о построении базиса для допустимых правил в H, а также исследование Рыбакова

[28] базиса для $S4$. В разделе 5.2 вводится определение последовательности правил $r_{h,l}$, где $h \geq 1$ и $l \geq 1$,

$$A_h := \bigwedge_{1 \leq i \leq h} \Diamond p_i,$$

$$A_{h,l} := \Box_0 \big(\bigwedge_{1 \leq i \leq h} (p_i \to \bigwedge_{1 \leq j \leq l} \neg \Diamond_0 q_j) \big),$$

$$B_l := \bigwedge_{1 \leq i \leq l} \neg \Diamond q_i.$$

$$r_{h,l} := \frac{\Box_0 (A_{h,l} \wedge \neg (A_h \wedge B_l)) \vee \Box_0 z}{\Box_0 \neg A_h \vee \Box_0 z}.$$

Затем устанавливается (**Лемма 5.2**) допустимость правил из $r_{h,l}$ для GL, далее доказываются факты (**Лемма 5.3** и **Лемма 5.4**) о том, что если допустимое правило опровергается на алгебре A из $Var(GL)$, то для некоторых n, m, $n \geq 1$ и $m \geq 1$ при $n + m \leq k + 1 + 2^{2(k+1)}$ правило $r_{n,m}$ опровергается на A. Из которых вытекает.

Теорема 5.5 *Последовательность $r_{h,l}$, где $h \geq 1$, $l \geq 1$ образует базис для допустимых правил вывода логики GL.*

Литература

[1] Бабенышев С.В. Базисы допустимых правил вывода модальных логик S4.2 и S4.2Grz// Алгебра и логика — 1993 — Т. 32 — № 2 — С. 117-130.

[2] Григолия Р.Ш. Свободные алгебры неклассических логик — Т.:Мецниереба, 1987.

[3] Кузнецов А.В., Герчиу В.Я. О суперинтуиционистской логике и конечной аппроксимируемости// Доклады Академии Наук СССР — 1970 — Т.195 — № 5 — Р.1029-1032.

[4] Мальцев А.И. Алгебраические системы — М.: Наука, 1970 — 392 с.

[5] Максимова Л.Л., Рыбаков В.В. О решётке нормальных модальных логик// Алгебра и логика. — 1974 — Т. 13 — № 2 — С. 105-122.

[6] Минц Г.Е. Допустимые и производные правила// Записки научного семинара ЛОМИ АН СССР. — 1968 — № 8 — С. 189-191.

[7] Новиков П.С. Конструктивная математическая логика с точки зрения классической. — М.: Наука, 1977.

[8] Римацкий В.В. О конечной базируемости по допустимости модальных логик ширины 2// Алгебра и логика. — 1999 — Т. 38 — № 4 — С.436-455.

[9] Рыбаков В.В. Допустимые правила логик, содержащих S4.3// Сибирский математический журнал. — 1984 — Т. 25 — № 5. — С. 141-145

[10] Рыбаков В.В. Базисы допустимых правил логик $S4$ и Int// Алгебра и логика. — 1985 — Т. 24 — С. 55-68.

[11] Хомич В.И. О свойствах суперинтуиционистстких пропозициональных исчислений// Сибирский математический журнал — 1990 — Т. 31 — № 6 — С. 158-175.

[12] Циткин А.И. О допустимых правилах интуиционистской логики высказываний// Математический сборник. — 1977 — Т. 102 — № 2 — С. 314-323.

[13] Янков В.А. Коньюнктивно неразложимые формулы в пропозизиональных исчислениях// Известия Академии наук СССР. Сер.мат — 1969 — Т.33 — № 1. — С. 18-38.

[14] Chagrov A., Zakharyaschev M. Modal logics. — Oxford: Oxford University Press, — 1997 — 605 p.

[15] Fine K. Logics containing $K4$. Part I// The Journal of Symbolic Logic. — 1974. — V. 39. — P. 229–237.

[16] Friedman H. One hundred and two problems in mathematical logic// The Journal of Symbolic Logic. — 1975 — V. 40 — № 3 — P. 113–129.

[17] Jankov V.A. The Relationship between Deducibility in the Intuitionistic Propositional Calculus and the Finite Implicational Structures// Soviet Mathematics Doclady — 1963 — V.31 — № 2 — P.1203–1204.

[18] Iemhoff R. On the admissible rules of Intuitionistic Propositional Logic// Journal of Symbolic logic. — 2001 — V.66 — P. 291–312.

[19] Kripke S. Semantic analysis of modal logic// Zeitschrift für mathematische Logic und Grundlagen der Mathematik. — 1963 — V.9 — P. 67–96.

[20] Kripke S. Semantic analysis of intuitionistic logic// Formal systems and recursive functions. — 1965 — P. 92–130.

[21] Lorenzen P. Einfürung in Operativ Logik und Mathematik. — Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag — 1955 — 412 p.

[22] Rybakov V.V. Intermediate Logics Preserving Admissible Inference Rules of Heyting Calculus// Mathematical Logic Quarterly. — 1993 — V.39 — P. 403–415.

[23] Rybakov V.V. Admissibility of logical inference rules. — Amsterdam, New-York: Elsevier Publishers — 1997 — 617 p.

[24] Rybakov V.V, Terziler M, Gencer C. Self-admissible quasi-characterizing inference rules// Bulletin Section Logic. — 1998 — V. 27 — № 4 — P. 164–171.

[25] Rybakov V.V, Oner T. The structure of rigid frames of restricted depth// Bulletin Section Logic. — 1998 — V. 27 — № 4 — P. 172–181.

[26] Rybakov V.V, Kiatkin V.R, Oner T. On Finite model property for admissible rules// Mathematical logic quarterly. — 1999 — V. 45 — № 4 — P. 505–520.

[27] Rybakov V.V., Gencer G., Oner T. Description of Modal Logics Inheriting Admissible Rules for *S4*// Logic Journal of IGPL.— 1999 — V. 7 — № 5 — P. 635–663.

[28] Rybakov V.V. Construction of an explicit basis for rules admissible in modal system S4// Mathematical logic quarterly — 2001 — V. 47 — № 4 — P. 441–446.

Работы автора по теме диссертации

[29] Федоришин Б.Р. Описание жестких фреймов глубины 3 адекватных S4+Grz// Материалы XXXVII международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс". с. 144-145. 1999.

[30] Федоришин Б.Р Описание жестких фреймов глубины 3// Материалы XXXVIII международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс". с. 13-14. 2000.

[31] Иванов В.С, Федоришин Б.Р. Финитная аппроксимируемость по допустимости правил вывода в суперинтуиционистских логиках// Ма-

териалы международной конференции "Логика и приложения" — Новосибирск, 2000 — с.53.

[32] Иванов В.С, Федоришин Б.Р. Критерий отсутствия финитной аппроксимируемости суперинтуиционистских логик по допустимости// Абелевы группы и модули. — Томск — 2000 — Вып. 15 — с. 24-29.

[33] Rybakov V.V, Fedorishin B. Faces of monotonicity and wisdom formulas problem// Bulletin of the Section of Logic — V. 29 — № 4 — 2000 — P.181–192.

[34] Федоришин Б.Р. О строении жесткого фрейма// Материалы XXXIX международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс". с. 13-14. 2001.

[35] Иванов В.С, Федоришин Б.Р. Критерий финитной аппроксимируемости суперинтуиционистских логик по допустимости// Материалы XXXIV научной студенческой конференции. — Красноярск, 2001 — с. 70–77.

[36] Федоришин Б.Р. Описание класса жестких Grz-фреймов глубины 3. Красноярск, Красн. университет, 2001, Деп. в ВИНИТИ 28.11.01 N 2429-2001.

[37] Федоришин Б.Р. Достаточное условие наследования допустимых правил логики $K4$// Материалы II всесибирского конгресса посвященному Софьи Ковалевской — Красноярск, 2002 — с. 149–153.

[38] Федоришин Б.Р. О неполноте многообразия модальных $S4$-алгебр относительно класса алгебр с условиями конечности// Материалы меж-

дународной конференции "Алгебра и ее приложения". — Красноярск, 2002 — с. 122.

[39] Федоришин Б.Р. Явный базис для допустимых правил вывода логики Геделя-Леба GL. Красноярск, Красн. университет, 2002, Деп. в ВИНИТИ 28.10.02 N 1850–2002.

[40] Руцкий А.Н., Федоришин Б.Р. Критерий наследования допустимых правил вывода модальной логики $K4$. Красноярск, Красн. университет, 2002, Деп. в ВИНИТИ 11.11.2002 N 1938–2002.

[41] Руцкий А.Н., Федоришин Б.Р. Критерий наследования допустимых правил вывода $K4$// Сиб. мат. журнал — 2002 — № 6 (в печати).

[42] Ivanov V.S., Fedorishin B.R. Finite model property w.r.t. admissibility for superintuitionistic logics// Sib. Adv. in Mathematics (принята к печати).

Подписано в печать 20.11.02
Формат 60 × 86/16
Бумага типографская.
Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1
Уч.-изд. л. 1,1
Тираж 100 экз. Заказ № 464
Цена договорная.

Редакционно-издательский центр
Красноярского государственного университета.
660041, Красноярск, пр. Свободный, 79.