Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Механико–математический факультет

На правах рукописи

УДК 510.643

КИКОТЬ Станислав Павлович

О модальных логиках элементарных классов шкал Крипке

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2010

Работа выполнена на кафедре математической логики и теории алгоритмов Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор В. Б. Шехтман.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Л. Л. Максимова
	кандидат физико-математических наук, доцент М. Н. Рыбаков
Ведущая организация:	Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Защита диссертации состоится 1 октября 2010 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 1 сентября 2010 года.

Учёный секретарь диссертационного
совета Д.501.001.84 при МГУ,
доктор физ.-мат. наук, профессор А. О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Модальная логика изучает модальные операторы — математические модели языковых конструкций, которые действуют как одноместные пропозициональные связки. В настоящее время модальная логика активно развивается, благодаря разнообразным применениям — в том числе в информатике, математической лингвистике и основаниях математики.

Начиная с конца 1950-х годов в модальной логике получила широкое распространение реляционная семантика Крипке[1]. Основная ее идея заключается в том, что формулы интерпретируются в реляционных структурах ("шкалах Крипке"), а формула $\Box\phi$ считается истинной в точке x, если ϕ истинна во всех точках, связанных с x по данному бинарному отношению.

Основная тема диссертации — связь между пропозициональными модальными формулами и классическими формулами первого порядка. Это — одна из традиционных тем современной модальной логики, начатая по существу еще в 1960-е гг. в работах С. Крипке и Е. Леммона. Как известно, общезначимость пропозициональной модальной формулы φ в семантике Крипке записывается в виде классической предикатной формулы второго порядка $\forall P_1 \ldots \forall P_k \varphi^*(x, P_1, ..., P_k)$ с кванторами общности по предикатным переменным. Однако оказывается, что во многих случаях эти кванторы элиминируются и общезначимость φ выражается формулой 1-го порядка. В таких случаях модальная формула ϕ называется элементарной, а соответствующая ей формула 1-го порядка — модально определимой. Соответственно, класс шкал Крипке называется элементарным, если он задается формулой первого порядка.

Теорема Салквиста, доказанная в середине 1970-х гг., дает синтаксическое описание для широкого класса элементарных модальных формул, в который попадают аксиомы многих, но далеко не всех, известных модальных логик. Изучением элементарности и связанных с ней свойств модальных формул занимается так называемая "теория соответствия", основы которой были созданы в 1970-е гг. Р. Голдблаттом, И. Ван Бентемом и др. Эта теория занимает одно из центральных положений в модальной логике; на ней основаны исследования

[1] Kripke, S. A Completeness Theorem in Modal Logic. Journal of Symbolic Logic, 24, No 1, 1959.

важнейших свойств модальных исчислений — полноты, финитной аппроксимируемости, конечной аксиоматизируемости и т. д. Нетривиальность теории соответствия подтверждается результатами Л.А. Чагровой:[2] свойство элементарности для модальных формул и свойство модальной определимости для классических формул алгоритмически неразрешимы. К основным результатам теории соответствия относится и теорема Крахта,[3,4] дающая синтаксическое описание классических формул первого порядка, соответствующих формулам Салквиста. На теории соответствия и, в частности, на теореме Крахта основаны некоторые алгоритмы поиска ответов на запросы к базам данных.[5]

Одним из трудных нерешенных вопросов в теории модальных логик остается вопрос о том, каким образом комбинировать логики с разнородными модальными операторами. Для работы с такого рода логиками в 1970е гг. было предложено интепретировать формулы в прямых произведениях реляционных структур, что послужило началом "многомерной модальной логики". Сейчас это интенсивно развивающийся раздел модальной логики; изложение основных результатов этой области содержится в книге Габбая, Куруш, Вольтера и Захарьящева.[6] Кроме того, конструкции, похожие на произведения (предикатные шкалы Крипке с постоянной областью) возникают при изучении модальных и интуиционистских логик предикатов.[7]

Основные задачи многомерной модальной логики традиционны: установить аксиоматику для заданного класса структур-произведений, исследовать разрешимость и сложность получающихся логик.

Нетрудно установить,[8] что прямое произведение элементарных классов шкал

[2]Chagrov, A. and Chagrova, L. The Truth About Algorithmic Problems in Correspondence Theory. Governatori, G., Hodkinson, I. and Venema, Y., editors Advances in Modal Logic 6. King's College Publications, 2006.

[3]Kracht, M. How completeness and correspondence theory got married. M. de Rijke (Ed.), Diamonds and Defaults. Synthese Library, Kluwer, 1993.

[4]Kracht, M. Tools and Techniques in Modal Logic. Elsevier, 1999, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 142.

[5]Zolin, E. Query answering based on modal correspondence theory. Proceedings of the 4th "Methods for modalities" Workshop (M4M-4). 2005.

[6]Gabbay, D. et al. Many-dimensional modal logics: theory and applications. Elsevier, 2003, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 148.

[7]Gabbay, D., Shehtman, V. and Skvortsov, D. Quantification in Nonclassical Logic. Elsevier, 2009, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 153.

[8]Gabbay, D. and Shehtman, V. Products of modal logics, part 1. Journal of the IGPL, 6, 1998.

Крипке элементарно. Поэтому изучение произведений тесно связано с исследованием произвольных элементарных классов шкал Крипке.

Однако модальные логики элементарных классов до сих пор были изучены недостаточно глубоко.

Только недавно[9] была получена явная бесконечная модальная аксиоматика для произвольного элементарного класса. Однако в ряде случаев эта аксиоматика неожиданно оказывается конечной. Это обычно происходит, когда задающая класс первопорядковая формула оказывается модально определимой, поэтому задача об описании модально определимых формул первого порядка и связанных с ними элементарных модальных формул важна для модальной логики.

На протяжении 30 лет теорема Салквиста оставалась единственным в своем роде общим признаком элементарности модальных формул, и про элементарные формулы за ее пределами ничего не было известно. Ее нетривиальное обобщение, недавно найденное В. Горанко и Д. Вакареловым[10,11] и, независимо, автором диссертации, является существенным продвижением в данной области. В работах Д. Вакарелова[12,13] класс элементарных модальных формул синтаксически был расширен еще сильнее, но первопорядковые аналоги новых формул оказались эквивалентны старым.

Цель работы

Целью работы является изучение модальных логик различных элементарных классов шкал Крипке, в том числе

- описание новых видов элементарных модальных формул;

[9] Hodkinson, I. Hybrid Formulas and Elementarily Generated Modal Logics. Notre Dame Journal of Formal Logic, 47, 2006, Nr. 4.

[10] Goranko, V. and Vakarelov, D. Sahlqvist Formulas Unleashed in Polyadic Modal Languages. Advances in Modal Logic 3. King's College Publications, 2000.

[11] Goranko, V. and Vakarelov, D. Elementary canonical formulae: extending Sahlqvist's theorem. Annals of Pure and Applied Logic, 141, 2006, Nr. 1–2.

[12] Vakarelov, D. Modal Definability in Languages with a Finite Number of Propositional Variables and a New Extension of the Sahlqvist's Class. Balbiani, P. et al., editors Advances in Modal Logic 4. King's College Publications, 2002.

[13] Vakarelov, D. Extended Sahlqvist Formulae and Solving Equations in Modal Algebras. 12-th International Congress of Logic Methodology and Philosophy of Science, August 7–13. Abstracts. Oviedo, Spain, 2003.

- описание новых видов модально определимых формул первого порядка;
- использование найденных формул для изучения квадратов модальных логик с выделенной диагональю.

Научная новизна

Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1) Получено новое доказательство обобщенной теоремы Салквиста, первоначально опубликованной в работах В. Горанко и Д. Вакарелова.[14,15] Это доказательство получено независимо и, в отличие от доказательства В. Горанко и Д. Вакарелова, дает явные формулы для минимальной оценки.

2) Получено явное синтаксическое описание формул первого порядка, которые являются переводами обобщенных формул Салквиста (обобщение теоремы Крахта).

3) Построен новый пример обобщенной формулы Салквиста, которая не эквивалентна никакой стандартной формуле Салквиста.

4) Получен критерий модальной определимости для экзистенциальных формул первого порядка, бескванторная часть которых представляет собой конъюнкцию атомарных.

5) Получено достаточное условие модальной определимости для некоторого класса универсально-экзистенциальных формул первого порядка, описываемых при помощи специальных графов.

6) Показано, что логики квадратов шкал Крипке с выделенной диагональю, как правило, не аксиоматизируются при помощи формул с фиксированным конечным множеством переменных.

Методы исследования

Обобщенная теорема Салквиста доказывается аналогично стандартной, с использованием метода ван Бентема подстановки минимальных оценок[16] и топо-

[14]Goranko, V. and Vakarelov, D. Sahlqvist Formulas Unleashed in Polyadic Modal Languages. Advances in Modal Logic 3. King's College Publications, 2000.

[15]Goranko, V. and Vakarelov, D. Elementary canonical formulae: extending Sahlqvist's theorem. Annals of Pure and Applied Logic, 141, 2006, Nr. 1–2.

[16]Blackburn, P., Rijke, M. de and Venema, Y. Modal Logic. Cambridge University Press, 2002.

логических свойств канонической шкалы[17,18].

Для доказательства неэквивалентности обобщенных формул Крахта стандартным формулам Крахта используются теоретико-модельные игры.

Для доказательства модальной неопределимости диаграмных формул с циклом используется инвариантность модальных формул относительно ультрарасширений.

Для доказательства модальной определимости диаграмных формул без циклов используется обобщение теоремы Крахта, полученное в главе 2.

Для доказательства конечной неаксиоматизируемости логик квадратов шкал Крипке с выделенной диагональю в главе 4 используются обобщенные формулы Салквиста, которые строятся при помощи алгоритма, изложенного в главе 3.

Теоретическая и практическая ценность

Работа имеет теоретический характер. Полученные в ней результаты могут найти применение в математической логике и информатике.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались:

- на научно-исследовательском семинаре кафедры математической логики и теории алгоритмов механико-математического факультета МГУ под руководством академика РАН С.И. Адяна, член-корр. РАН Л.Д. Беклемишева и проф. В.А. Успенского, и других семинарах кафедры (2003-2010 гг.);
- на Международной конференции «Алгебраические и топологические методы в неклассических логиках II» (Барселона, Испания, 2005);
- на Международной конференции «Приложения модальной логики в информатике» (Москва, 2005);
- на Международной конференции «Advances in Modal Logic, 2008» (Нанси, Франция, 2008);

[17] Sambin, G. and Vaccaro, V. Topology and duality in modal logic. Annals of Pure and Applied Logic, 37, 1988.

[18] Sambin, G. and Vaccaro, V. A topological proof of Sahlqvist's theorem. Journal of Symbolic Logic, 54, 1989.

- на XXXI конференции молодых ученых (МГУ, 2009);
- на Международной конференции «Advances in Modal Logic, 2010» (Москва, 2010).

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 7 работах, список которых приведен в конце автореферата [1–7].

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, приложения и библиографии (38 наименований). Общий объем диссертации составляет 123 страницы.

Краткое содержание диссертации

В **первой** главе содержатся основные сведения, определения и результаты из модальной логики. Приведем те из них, которые необходимы для точной формулировки результатов диссертации.

Фиксируем счетное множество пропозициональных переменных PV и некоторое множество индексов Ξ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Формулы языка* $\mathcal{M}l_\Xi$ (*модальные формулы*) строятся рекурсивно с помощью переменных из PV, констант «ложь» ($\bot$), «истина» ($\top$), логических связок $\wedge, \vee, \to, \neg$ и двойственных друг к другу модальностей $\Box_\xi$ и $\Diamond_\xi$ для каждого $\xi \in \Xi$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Формула называется *позитивной*, если она не содержит связок $\neg$ и $\to$ (но может содержать $\bot$). Формула называется *негативной*, если она есть отрицание позитивной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Шкалой Крипке для языка* $\mathcal{M}l_\Xi$ называется набор $F = (W, (R_\xi : \xi \in \Xi))$, где $R_\xi \subseteq W \times W$ для каждого $\xi \in \Xi$. Элементы множества W мы будем называть *точками*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Оценкой в шкале Крипке* $F = (W, (R_\xi : \xi \in \Xi))$ называется отображение $\theta : PV \to 2^W$, которое каждой пропозициональной переменной ставит в соответствие множество точек шкалы Крипке.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Моделью Крипке, построенной на шкале* F, называется пара $M = (F, \theta)$, где θ — оценка в шкале F.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. *Истинность формулы в точке модели* $M = (F, \theta)$ определяется стандартным образом:

- в точке x переменная $p \in PV$ истинна, если $x \in \theta(p)$;
- значения булевых связок вычисляются в точке по классическим таблицам истинности;
- в точке x истинна формула $\Diamond_\xi \phi$, если найдется такая точка $y \in R_\xi(x)$ в которой верна формула ϕ;

Запись $F, w, \theta \models \phi$ означает, что формула ϕ истинна в точке w модели $M = (F, \theta)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Запись $F, w \models \phi$ означает, что формула ϕ истинна в точке w любой модели M, построенной на шкале F.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Формула ϕ *общезначима* на шкале F, если она истинна во всех точках любой модели M, построенной на шкале F.

Шкалу Крипке $F = (W, (R_\xi : \xi \in \Xi))$ можно рассматривать как классическую модель для языка первого порядка $\mathcal{L}f_\Xi$, содержащего равенство, бинарные предикатные символы R_ξ для каждого $\xi \in \Xi$, предметные переменные и кванторы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Первопорядковая формула $A(x)$ языка $\mathcal{L}f_\Xi$ с одной свободной переменной x *(локально) соответствует* модальной формуле ϕ языка $\mathcal{M}l_\Xi$, если в любой шкале Крипке F для любой ее точки w

$$F, w \models \phi \iff \text{в } F \text{ (как в классической модели) верна формула } A(w).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Первопорядковая формула $A(x)$ языка $\mathcal{L}f_\Xi$ с одной свободной переменной x называется *модально определимой*, если она соответствует некоторой модальной формуле ϕ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Первопорядковая формула $A(x_1,\dots,x_n)$ языка $\mathcal{L}f$ со свободными переменными $x_1,\dots,x_n$ называется *модально определимой*, если существует такая последовательность модальных формул $\phi_1,\dots,\phi_n$, что в любой шкале Крипке F для любых ее точек $w_1,\dots,w_n$

$$\text{для любой оценки } \theta \ \text{ для некоторого } i\ (1\leq i\leq n)\ F,w_i,\theta\models\phi_i \iff$$

$$\iff \text{ в } F(\text{классически}) \text{ верна формула } A(w_1,\dots,w_n).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Модальная формула называется (локально) *элементарной*, если она соответствует некоторой формуле первого порядка языка $\mathcal{L}f_\Xi$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. *Обобщенной шкалой Крипке* для языка $\mathcal{M}l_\xi$ называется набор $F=(W,(R_\xi:\xi\in\Xi),\mathcal{A})$, где $R_\xi\subseteq W\times W$ для всех $\xi\in\Xi$, $\mathcal{A}\subseteq 2^W$, и $\mathcal{A}$ замкнуто относительно булевых операций и операции $V\to R_\xi^{-1}(V)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Пусть $F=(W,(R_\xi:\xi\in\Xi),\mathcal{A})$ — обобщенная шкала Крипке. Оценка $\theta:PV\to 2^W$ называется *допустимой* для F, если она принимает значения в $\mathcal{A}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Модальная формула *общезначима* в обобщенной шкале F, если она верна во всех точках шкалы при любой допустимой для F оценке.

Положим для $V\subseteq W$ $R_\xi^\Box(V)=\{x\mid R_\xi(x)\subseteq V\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. Обобщенная шкала Крипке $F=(W,R_\xi,\mathcal{A})$ называется

- *различимой*, если для любых различных x,y из W найдется такое $V\in\mathcal{A}$, что $x\in V$ и $y\notin V$.
- *тугой*, если
$$\bigcap\{V\in\mathcal{A}\mid R_\xi(x)\subseteq V\}\subseteq R_\xi(x);$$
- *компактной*, если любое центрированное семейство $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{A}$ имеет непустое пересечение.
- *дескриптивной*, если F различима, туга и компактна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. Модальная формула ϕ называется *d-упорной*, если для любой дескриптивной обобщенной шкалы $F=(W,(R_\xi:\xi\in\Xi),\mathcal{A})$ из общезначимости ϕ на F, следует ее общезначимость и на соответствующей обычной шкале Крипке $F'=(W,(R_\xi:\xi\in\Xi))$.

Вторая глава посвящена обобщенным формулам Салквиста и их первопорядковым аналогам — обобщенным формулам Крахта.

Будем считать, что множество переменных PV разбито на счетное множество счетных групп $p_1^0, p_2^0, p_3^0, \ldots, p_1^1, p_2^1, p_3^1, \ldots, p_1^2, p_2^2, p_3^2, \ldots$ и т. д. Верхний индекс (называемый *рангом*) означает номер группы, а нижний — номер переменной в пределах группы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. *Регулярная* $\Box$*-формула ранга* k определяется по индукции. Именно,

- любая переменная p_i^k ранга k является $\Box$-формулой ранга k,
- если POS — позитивная модальная формула, зависящая только от переменных, ранг которых меньше k и ϕ — регулярная $\Box$-формула ранга k, то $POS \to \phi$ — регулярная $\Box$-формула ранга k.
- если ϕ —регулярная $\Box$-формула ранга k, то $\Box_\xi \phi$ — тоже регулярная $\Box$-формула ранга k.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. *Обобщенной импликацией Салквиста* называется формула вида $GSA \to \bot$, где GSA построена из регулярных $\Box$-формул и негативных формул при помощи $\wedge, \vee, \Diamond_\xi$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20. *Обобщенной формулой Салквиста* называется модальная формула, построенная из обобщенных импликаций Салквиста при помощи $\wedge$, $\Box_\xi$, а также $\vee$, применяемой к формулам без общих пропозициональных переменных.

ТЕОРЕМА 21 (Обобщенная теорема Салквиста)**.** Каждая обобщенная формула Салквиста элементарна и d-упорна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22. Модальная логика Λ называется *полной*, если она совпадает с множеством формул, общезначимых на некоторой шкале Крипке.

СЛЕДСТВИЕ 23. Логика, аксиоматизируемая обобщенными формулами Салквиста, полна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24. *L-термом* называется терм в языке, алфавит которого состоит из символов $\{x_i\}, \cap, \cup, R_\xi^{-1}, R_\xi^{\Box}, R_\xi, \top, \bot$. Здесь $\bot, \top$ — константы, $\{x_i\}$

— переменные, $R_\xi^{-1}, R_\xi^\Box, R_\xi$ — одноместные функциональные символы, $\cap, \cup$ — бинарные функциональные символы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 25. Назовем L-терм s *полубезопасным*, если верно одно из следующих условий:

1) $s = \{x_i\}$;

2) $s = R_\xi(s')$, где s' полубезопасен;

3) $s = s' \cap s''$, где либо s', либо s'' полубезопасен.

L-терм t называется *безопасным*, если он полубезопасен, и в каждом его подтерме вида $R_\xi(s)$ терм s полубезопасен.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 26. *Формулы с ограниченными кванторами* имеют вид:

$$(\forall x_i \triangleright_\xi x_j)\alpha := \forall x_i(x_j R_\xi x_i \to \alpha);$$

$$(\exists x_i \triangleright_\xi x_j)\alpha := \exists x_i(x_j R_\xi x_i \wedge \alpha).$$

Рассмотрим язык первого порядка $\mathcal{P}f_\Xi$, содержащий предметные переменные x_i, логические связки $\wedge$ и $\vee$, ограниченные кванторы и атомарные формулы вида $\boxed{v \in E}$, где E — безопасный терм.

Ясно, что любую такую формулу можно перевести на классический язык первого порядка, заменив предикатный символ $\boxed{v \in E}$ на его перевод $E^\star(v)$, где

$$\{x_i\}^\star(v) := (v = x_i);$$

$$\top^\star(v) := \top;$$

$$\bot^\star(v) := \bot;$$

$$(E_1 \cap E_2)^\star(v) := E_1^\star(v) \wedge E_2^\star(v);$$

$$(E_1 \cup E_2)^\star(v) := E_1^\star(v) \vee E_2^\star(v);$$

$$(R_\xi^{-1}(E))^\star(v) := \exists y(vR_\xi y \wedge E^\star(v)[y/v]);$$

$$(R_\xi^\Box(E))^\star(v) := \forall y(vR_\xi y \to E^\star(v)[y/v]);$$

$$(R_\xi(E))^\star(v) := \exists y(yR_\xi v \wedge E^\star(v)[y/v]).$$

В последних трех случаях y должна быть некоторой новой переменной, не встречающейся в формуле $E^\star(v)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 27. Формула $A(x_0)$ в языке $\mathcal{P}f_\Xi$ называется *обобщенной формулой Крахта*, если она содержит ровно одну свободную переменную x_0 и построена из формул вида $\boxed{v \in E}$ при помощи конъюнкции, дизъюнкции и ограниченных кванторов, причем для каждой подформулы вида $\boxed{v \in E}$, входящей в $A(x_0)$, все переменные x_i, входящие в E, *квази-свободны*, то есть связаны ограниченным квантором всеобщности, который не находится под действием никакого ограниченного квантора существования.

ТЕОРЕМА 28 (Обобщенная теорема Крахта).

- Каждая обобщенная формула Салквиста соответствует некоторой обобщенной формуле Крахта.
- Каждая обобщенная формула Крахта соответствует некоторой обобщенной формуле Салквиста.

Возникает естественный вопрос: будет ли семантически класс обобщенных формул Крахта шире класса стандартных формул Крахта? Ответ на этот вопрос дает следующая

ТЕОРЕМА 29. Обобщенная формула Крахта

$$fc = \forall x_1 \rhd_1 x \forall x_2 \rhd_2 x \forall x_3 \rhd_3 x \exists y' \rhd_1 x \exists y'' \rhd_2 y' \exists y \rhd_3 y''$$

$$(\boxed{y \in R_3(R_2(x_1) \cap R_1(x_2))} \wedge \boxed{y \in R_2(R_3(x_1) \cap R_1(x_3))} \wedge$$

$$\wedge \boxed{y \in R_1(R_2(x_3) \cap R_3(x_2))}),$$

выражающее “свойство куба” трехмерного произведения шкал Крипке, не эквивалентна никакой стандартной формуле Крахта.

Третья глава посвящена формулам первого порядка с одной свободной переменной, которые можно проиллюстрировать специальным чертежом — диаграммой.

На Рис. 1 приведены простейшие примеры таких диаграмм: (условия станут более привычными, если их мысленно дополнить квантором всеобщности по x)

1) транзитивность: $\forall y \forall z(xRy \wedge yRz \to xRz)$.

2) плотность: $\forall z(xRz \to \exists y(xRy \wedge yRz))$.

3) полукоммутативность: $\forall y(xR_2R_1y \to xR_1R_2y)$.

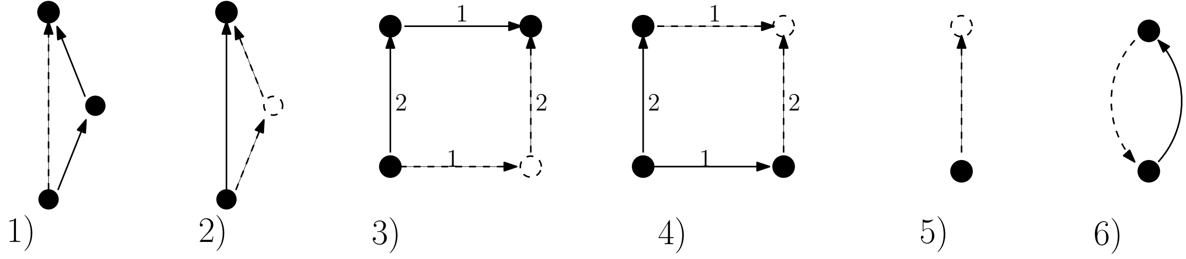

Рис. 1: Примеры диаграмм

4) свойство Черча-Россера: $\forall y \forall z(xR_1y \wedge xR_2z \to \exists v(yR_2v \wedge zR_1v))$.

5) сериальность: $\exists y\; xRy$.

6) симметричность: $\forall y(xRy \to yRx)$.

Сначала мы рассматриваем так называемые *экзистенциальные диаграммы*, которые получаются из приведенных рисунков удалением сплошных стрелок.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 30. *Экзистенциальной диаграммой* называется набор $C = (W, W_ч, W_б, \Pi_1, \ldots, \Pi_s)$, где $W = W_ч \cup W_б$, $W_ч \cap W_б = \emptyset$ и $\Pi_i \subseteq W \times W$.

Положим $W_ч = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $W_б = \{y_1, \ldots, y_m\}$. Точки множества $W_ч$ будем называть *черными*, а точки множества $W_б$ — *белыми*. Каждой точке $z \in W$ поставим в соответствие предметную переменную v_z.

Каждой экзистенциальной диаграмме C поставим в соответствие формулу K^C в языке первого порядка с s бинарными предикатами $R_1, \ldots, R_s$ и $n + m$ свободными переменными $v_{x_1}, \ldots, v_{x_n}, v_{y_1}, \ldots, v_{y_m}$

$$K^C = \left(\bigwedge_{1 \le j \le s} \bigwedge_{z_1 \Pi_j z_2} v_{z_1} R_j v_{z_2} \right),$$

и формулу E^C в том же языке первого порядка с n свободными переменными $v_{x_1}, \ldots, v_{x_n}$

$$E^C = \exists v_{y_1} \ldots \exists v_{y_m} K^C.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 31. Экзистенциальная диаграмма C называется *определимой*, если первопорядковая формула $E^C(v_{x_1}, \ldots, v_{x_n})$ модально определима.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 32. Пусть $A(v_1, \ldots, v_n)$ и $B(v_1, \ldots, v_n)$ — две формулы языка $\mathcal{L}f$ с одними и теми же свободными переменными. Мы говорим, что из формулы A *следует* формула B (обозначаем $A \models B$), если $A \to B$ классически общезначима.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 33. Экзистенциальная диаграмма C называется *минимальной*, если для любой диаграммы C', которая получается из диаграммы C удалением какой-нибудь стрелки, из формулы $E^{C'}$ не следует формула E^{C}.

Говоря неформально, минимальность диаграммы означает, что все ее ребра "существенны", то есть никакое ребро нельзя удалить без потери семантического смысла диаграммы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 34. *Направленным путем* в экзистенциальной диаграмме C, соединяющим точку x с точкой y, называется такая последовательность $\alpha_1\xi_1\alpha_2\xi_2\ldots\xi_h\alpha_{h+1}$, где для всех i от 1 до h $\alpha_i \in W$, $\xi_i \in \{1,\ldots,s\}$ и $(\alpha_i,\alpha_{i+1}) \in \Pi_{\xi_i}$, и, к тому же, $\alpha_1 = x$ и $\alpha_{h+1} = y$.

Ненаправленный путь отличается от направленного тем, что условие $(\alpha_i,\alpha_{i+1}) \in \Pi_{\xi_i}$ заменяется на $(\alpha_i,\alpha_{i+1}) \in \Pi_{\xi_i} \cup \Pi_{\xi_i}^{-1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 35. Экзистенциальная диаграмма называется *достижимой*, если для любой белой точки y найдется черная точка x, такая что существует направленный путь, соединяющий точки x и y, все точки которого, кроме x — белые.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 36. Экзистенциальная диаграмма называется *связной*, если любые две белые точки можно соединить ненаправленным путем, все точки которого белые.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 37. Пусть $C = (W, W_{\text{ч}}, W_{\text{б}}, \Pi_1, \ldots, \Pi_s)$ — экзистенциальная диаграмма. Мы говорим, что она *содержит петлю*, если для некоторых $x \in W_{\text{б}}$ и $\xi \in \{1,\ldots,s\}$ $(x,x) \in \Pi_\xi$. Мы говорим, что она *содержит кратное ребро*, если для некоторых $\xi_1,\xi_2 \in \{1,\ldots,s\}$, $\xi_1 \neq \xi_2$ $(W_{\text{б}} \times W_{\text{б}}) \cap \Pi_{\xi_1} \cap \Pi_{\xi_2} \neq \emptyset$, или же для некоторых, возможно равных, $\xi_1,\xi_2 \in \{1,\ldots,s\}$, найдутся точки $x,y \in W_{\text{б}}$, такие что $x\Pi_{\xi_1}y$ и $y\Pi_{\xi_2}x$. Мы говорим, что диаграмма *содержит внутренний цикл*, если она либо содержит петлю, либо кратное ребро, либо ненаправленный путь $\alpha_1\xi_1\alpha_2\xi_2\ldots\xi_h\alpha_{h+1} = \alpha_1$ $(h \geq 3)$, у которого все вершины — белые, и все вершины которого, кроме первой и последней, попарно различны.

ТЕОРЕМА 38. Если достижимая минимальная экзистенциальная диаграмма содержит внутренний цикл, то она модально неопределима.

ТЕОРЕМА 39. Если достижимая связная экзистенциальная диаграмма не содержит внутренних циклов, то она модально определима.

СЛЕДСТВИЕ 40 (Критерий определимости)**.** Достижимая связная минимальная диаграмма модально определима тогда и только тогда, когда она не содержит внутренних циклов.

СЛЕДСТВИЕ 41. Если достижимая экзистенциальная диаграмма C не содержит внутренних циклов, то задаваемая ей первопорядковая формула $E^C(v_{x_1}, \ldots, v_{x_n})$ представляет собой конъюнкцию определимых первопорядковых формул.

Далее рассматриваются диаграммы со сплошными стрелками.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 42. Пусть дана шкала Крипке $\hat{T} = (W, R_1, \ldots, R_s)$. Два направленных пути $x_1, \xi_1, x_2, \xi_2, \ldots x_n$ и $y_1, \mu_1, y_2, \mu_2, \ldots y_m$ мы считаем *равными*, если $m = n$, $x_i = y_i$ для всех $1 \leq i \leq n$ и $\xi_i = \mu_i$ для всех $1 \leq i \leq n-1$. Пара $T = (\hat{T}, r)$ называется *деревом с корнем* r, если

- $r \in W$,
- $R_\xi^{-1}(r) = \emptyset$ для всех $\xi \in \Xi$,
- для любой точки x, отличной от корня, существует единственный путь, соединяющий r с x.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 43. $\forall\exists$-*диаграммой* будем называть набор $D = (W, W_{ч}, W_{б}, B_1, \ldots, B_s, \Pi_1, \ldots, \Pi_s, r)$, где W — конечное множество, $W = W_{ч} \cup W_{б}$, $W_{ч} \cap W_{б} = \emptyset$, $B_1, \ldots, B_s$ — бинарные отношения на $W_{ч}$, $\Pi_1, \ldots, \Pi_s$ — бинарные отношения на W и $r \in W_{ч}$, причем структура $(W_{ч}, B_1, \ldots, B_s, r)$ представляет собой дерево с корнем r. Элементы множеств B_j и Π_j будем называть соответственно *черными* и *белыми* стрелками.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 44. *Экзистенциальной частью* $\forall\exists$-*диаграммы* $D = (W, W_{ч}, W_{б}, B_1, \ldots, B_s, \Pi_1, \ldots, \Pi_s, r)$ будем называть экзистенциальную диаграмму $C = (W, W_{ч}, W_{б}, \Pi_1, \ldots, \Pi_s)$.

Как и для экзистенциальных диаграмм, положим $W_{ч} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $W_{б} = \{y_1, \ldots, y_m\}$, причем будем считать, что $x_0 = r$, и каждой точке $z \in W$ поставим в соответствие предметную переменную v_z.

Каждой $\forall\exists$-диаграмме D поставим в соответствие первопорядковую формулу E_D с одной свободной переменной v_{x_0} в сигнатуре с бинарными предикатными символами $R_1, \ldots, R_s$:

$$E_D = \forall v_{x_1} \ldots \forall v_{x_n} \left(E_D^A \to E^C \right),$$

где

$$E_D^A = \left(\bigwedge_{i=1}^{s} \bigwedge_{x B_i y} v_x R_i v_y \right),$$

а C — экзистенциальная часть D.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 45. $\forall\exists$-диаграмма $D = (W, W_{\text{ч}}, W_{\text{в}}, B_1, \ldots, B_s, \Pi_1, \ldots, \Pi_s, r)$ называется *минимальной* (соответственно, *достижимой*, *содержащей внутренний цикл*), если ее экзистенциальная часть обладает соответствующим свойством.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 46. $\forall\exists$-диаграмма $D = (W, W_{\text{ч}}, W_{\text{в}}, B_1, \ldots, B_s, \Pi_1, \ldots, \Pi_s, r)$ называется *модально определимой*, если формула E_D модально определима.

ТЕОРЕМА 47. Если достижимая $\forall\exists$-диаграмма D не содержит внутренних циклов, то она модально определима.

В Приложении мы приводим критерий модальной определимости для некоторого класса $\forall\exists$-диаграмм.

В **четвертой главе** методы, разработанные в главах 2 и 3, применяются к модальным логикам квадратов шкал Крипке с выделенной диагональю. Основной результат главы — неаксиоматизируемость большого числа таких логик при помощи формул с конечным числом переменных.

Для работы с двумерными произведениями с выделенной диагональю используется язык ML_2^δ. Его алфавит получается из бимодального языка $\mathcal{M}l_{\{h,v\}}$ добавлением пропозициональной константы δ.

Для языка $\mathcal{M}l_\delta^2$ *шкалой Крипке* будем называть набор $F = (W, R_h, R_v, \Delta)$, где $R_\xi \subseteq W \times W \quad (\xi \in \{h, v\}), \Delta \subseteq W$; *моделью Крипке* называется пара $M = (F, \theta)$, где F — шкала Крипке, а θ — оценка в шкале F.

Определение истинности формулы в модели Крипке получается из Определения 6 добавлением пункта

- формула δ истинна в точности в точках множества Δ.

На этот язык очевидным образом переносится понятие общезначимости формулы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 48. Множество формул Σ *аксиоматизирует* логику L, если L является минимальным множеством формул, содержащим все пропозициональные тавтологии, формулы K_h, K_v, где

$$K_\xi = \Box_\xi(p \to q) \to (\Box_\xi p \to \Box_\xi q),$$

множество формул Σ, и замкнутое относительно правил вывода Modus Ponens, правила подстановки и правила обобщения:

$$\frac{A, A \to B}{B}, \qquad \frac{A}{[B/p]A}, \qquad \frac{A}{\Box_i A}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 49. Модальная логика L *аксиоматизируема формулами с конечным числом переменных*, если существует такое множество модальных формул Σ, что оно аксиоматизирует логику L, и в формулы Σ входит лишь конечное число переменных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 50. Пусть $F = (W, R)$ — 1-шкала Крипке. Через F^2_δ обозначим шкалу $(W \times W, R_h, R_v, \Delta)$, где

$$(a, b)R_h(c, d) \Longleftrightarrow aRc \text{ и } b = d;$$

$$(a, b)R_v(c, d) \Longleftrightarrow a = c \text{ и } bRd,$$

$$\Delta = \{(a, a) \mid a \in W\}.$$

Такую шкалу мы будем называть *δ-квадратом* шкалы F.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 51. Пусть $\mathcal{C}$ — класс 1-шкал Крипке. Положим

$$\mathcal{C}^2_\delta = \{F^2_\delta \mid F \in \mathcal{C}\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 52. Пусть L — полная по Крипке 1-модальная логика. *δ-квадратом* логики L (обозначается L^2_δ) называется множество всех формул, общезначимых на классе $\mathcal{C}(L)^2_\delta$, где $\mathcal{C}(L)$ — класс всех 1-шкал Крипке, на которых общезначима логика L.

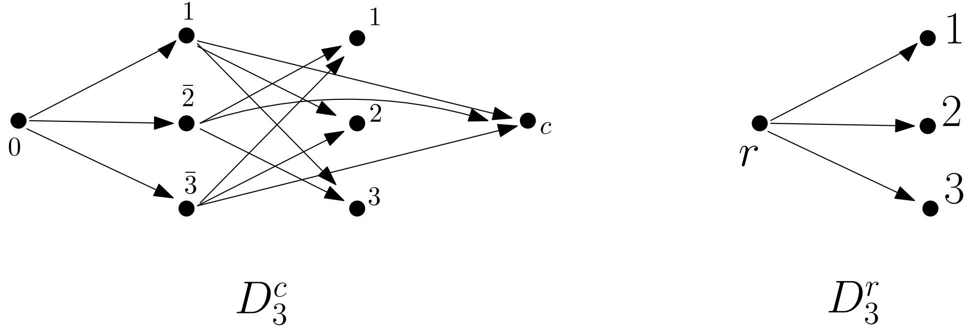

Рис. 2: Шкалы D_3^c и D_3^r.

Чтобы точно сформулировать результат о неаксиоматизируемости формулами с конечным числом переменных, рассмотрим следующие шкалы Крипке (см. Рис. 2).

Формально, $D_n^c = (W_n^c, R_n^c)$, где

$$W_n^c = \{0, \bar{1}, \dots, \bar{n}, 1, \dots, n, c\},$$

$$R_n^c = \{(0, \bar{\imath}) \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{(\bar{\imath}, j) \mid 1 \leq i \neq j \leq n\} \cup \{(\bar{\imath}, c) \mid 1 \leq i \leq n\},$$

а $D_n^r = (W_n^r, R_n^r)$, где

$$W_n^r = \{r, 1, \dots n\}, \quad R_n^r = \{(r, i) \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

ТЕОРЕМА 53. Пусть L — полная по Крипке 1-модальная логика, и $\mathcal{C}(L)$ содержит все шкалы вида D_n^c и D_n^r или все их рефлексивные замыкания, или все их транзитивные замыкания, или все их рефлексивные транзитивные замыкания. Тогда L_δ^2 не аксиоматизируема формулами с конечным числом переменных.

СЛЕДСТВИЕ 54. Дельта-квадрат любой полной по Крипке логики L, такой что $\mathbf{K} \subseteq L \subseteq \mathbf{GL}$ или $\mathbf{K} \subseteq L \subseteq \mathbf{Grz}$, не аксиоматизируем формулами с конечным числом переменных.

Благодарности

Автор благодарит своего научного руководителя, доктора физико-математических наук, профессора Валентина Борисовича Шехтмана за постановку задачи, внимание к работе и постоянную помощь. Автор благодарит всех сотрудников кафедры математической логики и теории алгоритмов за творческую атмосферу, которая способствовала научной работе.

Работы автора по теме диссертации

1. Кикоть, С. О квадратах модальных логик с выделенной диагональю. Математические заметки, 88(2), 2010, 261–274.

2. Kikot, S. An extension of Kracht's theorem to generalized Sahlqvist formulas. Journal of Applied Non-Classical Logic, 19/2, 2009, 227–251.

3. Kikot, S. Semantic characterization of Kracht's formulas. Advances in Modal Logic 8. College Publications, 2010, 218–234.

4. Кикоть, С. О модальной определимости некоторых формул первого порядка. Рукопись депонирована в ВИНИТИ 29.04.2010, №234-В2010, Указатель №6, 2010, 27 стр.

5. Kikot, S. Formulas, corresponding to diagrams. International Conference "Computer science applications of modal logic". Abstracts. Independent University of Moscow, 2005, 18–19.

6. Kikot, S. A new generalization of Sahlqvist theorem. Algebraic and Topological Methods in Non-classical Logics II, Abstracts, Universitat de Barcelona. Barcelona, 2005, 40–41.

7. Кикоть, С. Об аксиоматике модальных логик квадратов шкал Крипке с выделенной диагональю. Тезисы докладов секции "Математика и механика" Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов-2009". Москва, 2009, 33–34.