Примеры тем исследований для студентов

Первые исследования обычно проводятся по принципу «разобрать полученный кем-то результат, освоить технику, с помощью которой он получен, и попробовать получить аналогичный результат для каких-то близких понятий». Поэтому часто задачи, перечисленные ниже, даются вполне конкретные, хотя иногда за ними стоят задачи более общего характера (охватить какую-то область, что-то классифицировать, прояснить полную картину). Это лишь задачи, первые пришедшие в голову; можно присмотреть задачи и из других подразделов ДЛ или МЛ.

Модальные логики (МЛ)

1. Модальная логика с аксиомой Чёрча–Россера $\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$, как известно, полна. Расширим ее модальностью транзитивного замыкания $\boxplus$ и соответствующими тремя аксиомами. Будет ли получившаяся логика полна?

2. Градуированная логика с обратными модальностями: $\Diamond^{\geqslant n}$ и $\diamondminus^{\geqslant n}$ — получить полную аксиоматику. Начать можно с логики с операторами $\Diamond^{\geqslant n}$ и $\diamondminus$. Аналогичные вопросы над логиками **K4**, **S4** и др.

3. Аналог Теоремы Гольдблатта–Томасона для логики с операторами $\Diamond^{\geqslant n}$ и $\diamondminus^{\geqslant n}$ (или $\diamondminus$).

4. Разрешима или нет модальная логика **K4** (или **S4**) с операторами $\Diamond^{\geqslant n}$ и $\diamondminus$?

5. Известна аксиоматика минимальной модальной логики **K** с операторами $\Diamond$ и $\Diamond^{\infty}$. Последний оператор означает: формула $\Diamond^{\infty}A$ истинна в точке x, если точка x имеет бесконечно много последователей, в которых верна формула A.

   Разрешима ли эта логика?

   Получить теоремы о полноте для других логик в этом языке.

   Всегда ли добавление аксиом для $\Diamond^{\infty}$ к полной логике дает полную логику?

   Рассмотреть оператор $\Diamond^{=\omega}$, говорящий: есть ровно счетное множество последователей.

6. Инфинитарные модальные логики, соответствующие логикам **K**, **K4**, **S4**, **S5** — полные аксиоматики? Будет ли полнота получаться автоматически при добавлении к модальной логике аксиом для инфинитарных конъюнкций? Рассмотреть счетные конъюнкции, более мощные конъюнкции, конъюнкции по произвольному множеству формул.

7. Интуиционистская логика высказываний, как и модальная логика, имеет семантику Крипке. Поэтому для нее осмысленно ставить те же вопросы, что и для модального языка (для него ответы уже известны). Гипотеза состоит в том, что такие результаты будет несложно получить по аналогии с модальными результатами.

   В частности, интересны следующие вопросы:

   а) Теорема ван Бентема: *Формула первого порядка эквивалентна некоторой модальной формуле $\iff$ она инвариантна относительно бисимуляций*; и ее глобальный аналог.

   б) Критерии определимости классов моделей Крипке одной интуиционистской формулой или множеством интуиционистских формул. Для модального языка критерий звучит так: *Класс моделей Крипке задается некоторым множеством модальных формул $\iff$ он замкнут относительно глобальных бисимуляций, порожденных подмоделей, непересекающихся объединений моделей, а также сам класс и его дополнение замкнуты относительно ультра-расширений.* Для начала выяснить, есть ли для интуиционистского языка подходящее понятие ультра-расширения модели.

в) Получить аналог Теоремы Гольдблатта–Томасона для интуиционистской логики; для модальной логики теорема звучит так: *Элементарный класс шкал Крипке задается некоторым множеством модальных формул* $\iff$ *он замкнут относительно модальных морфизмов шкал, порожденных подшкал, непересекающихся объединений шкал, а его дополнение замкнуто относительно ультра-расширений шкал.*

8. Критерии определимости классов моделей или шкал в инфинитарном модальном языке.

   То есть в языке, в котором разрешаются конъюнкции по произвольному множеству формул; либо, как вариант, по счетному множеству формул, или множеству не более какой-то мощности.

9. Градуированные модальные логики — разобраться с теоремами о полноте, попытаться установить, что в имеющихся аксиоматиках «необычные» аксиомы (при ближайшем рассмотрении будет понятно, о каких аксиомах идет речь) являются неизбежными, то есть их нельзя выкинуть из аксиоматики.

10. Описать множество «иногда локально общезначимых» модальных формул: по определению, модальная формула является ИЛО, если она общезначима в некоторой точке некоторой шкалы Крипке.

    Хотя бы разрешимо ли это множество формул? Известно, что оно содержит «иногда глобально общезначимые» формулы (то есть формулы, общезначимые на некоторой шкале), причем содержит строго. Еще оно содержит все выполнимые модальные *предложения* (то есть формулы без переменных).

Дескрипционные логики (ДЛ)

1. Построить табличный алгоритм для дескрипционной логики $\mathcal{ALCQ}$ с лишь двумя транзитивными ролями R и S, между которыми имеется включение $R \sqsubseteq S$.

   Предыстория: в дескрипционной логике, допускающей не только кванторы $\exists R.C$ и $\forall R.C$, но и «счетчики»: $\geqslant nR.C$ и $\leqslant nR.C$, можно, например, выразить понятие «человек, имеющий не менее трех детей»: $\mathsf{Human} \sqcap \geqslant 3\, \mathsf{hasChild.Human}$. Кроме того, в ДЛ могут допускаться включения ролей (двуместных отношений): $\mathsf{hasSon} \sqsubseteq \mathsf{hasChild}$. Некоторые из ролей могут объявляться транзитивными: $Tr(\mathsf{hasRelative})$. Если использовать произвольные включения между ролями и счетчики по произвольным ролям R, а также разрешить произвольным ролям быть транзитивными, то логика будет неразрешимой. Для того, чтобы логика была разрешимой, обычно полностью запрещают использовать счетчики по транзитивным отношениям (а также, по отношениям, содержащим транзитивные отношения).

   Однако недавно выяснилось, что, например, если есть лишь одна транзитивная роль, то можно использовать счетчики по ней и при этом логика будет разрешимой (хотя разрешающий алгоритм будет несколько большей вычислительной сложности). Для нескольких транзитивных ролей тоже есть аналогичный результат о разрешимости (детали опустим). В частности, когда есть две транзитивные роли и включение между ними, известно, что логика разрешима.

   На практике часто для ДЛ используют табличный алгоритм. Для указанной в задаче логики такой алгоритм еще не предъявлен; предлагается его построить.

2. Логика $\mathcal{ALCQ}$ с тремя транзитивными ролями R_1, R_2, S и включениями $R_1 \sqsubseteq S \sqsupseteq R_2$ разрешима или нет?

   Известные результаты в «окрестности» этой задачи:

   а) если не требовать транзитивности отношения S, то такая логика неразрешима;

   б) если перевернуть включения: $R_1 \sqsupseteq S \sqsubseteq R_2$, то такая логика неразрешима; причем она останется неразрешимой, если не требовать транзитивности S;

   в) если все включения в одну сторону $R_1 \sqsubseteq S \sqsubseteq R_2$, то логика разрешима;

   г) если отказаться от транзитивности R_1 или R_2, то логика станет разрешимой;

д) в указанной логике проблема локальной выполнимости равносильна проблеме глобальной выполнимости, поэтому уточнять в задаче, о какой проблеме идет речь, не требуется.

3. Более общая задача (обобщает 1 и 2): логика $\mathcal{ALCQ}$ с какими наборами аксиом для ролей (аксиомы транзитивности и аксиомы включения) разрешима, а с какими — неразрешима? Можно ли это распознать алгоритмически по заданному набору аксиом?

4. Логика с одной лишь транзитивной ролью R, в которой разрешено использовать счетчики по роли R: $\geqslant nR.C$, но по обратной роли R^- использовать счетчики нельзя, а можно лишь кванторы: $\exists R^-.C$ и $\forall R^-.C$ — разрешима или нет?

   Известные результаты в «окрестности» этой задачи:

   а) если разрешить счетчики и по обратной роли, то логика неразрешима;

   б) если отказаться от транзитивности роли R, то логика разрешима;

   в) если не использовать счетчики ни по R, ни по R^-, то логика разрешима.

5. Найти полную аксиоматику логики $\mathcal{ALCIQ}$; доказать соотв. теорему о полноте.

   Для логики без $\mathcal{Q}$ либо без $\mathcal{I}$ аксиоматика известна. Начать можно с логики из задачи 4.

6. В дескрипционной логике $\mathcal{SI}$ с лишь одной ролью какова вычислительная сложность проблемы глобальной выполнимости?

   Это логика, в которой имеется лишь одна транзитивная роль R и есть кванторы по R и по R^-.

   Известные результаты в «окрестности» этой задачи:

   а) у проблемы локальной выполнимости в этой логике — сложность PSpace;

   б) если удалить транзитивность — то сложность ExpTime;

   в) если удалить обратную роль — то сложность NP.

7. Разобрать погружение ДЛ с многоместными отношениями $\mathcal{DLR}$ в логику $\mathcal{ALCIQ}$ (это погружение позволяет использовать разрешающий алгоритм второй логики для работы с первой логикой) и расширить до погружения логики $\mathcal{DLR}_{\mathsf{reg}}$ в логику $\mathcal{ALCIQ}_{\mathsf{reg}}$. Почти реферативная работа, но нужно аккуратно записать конструкцию и рассуждения.