Введение в математическую логику и теорию алгоритмов

Семинар № 2: Порядки. Арифметика порядков.

Мы будем рассматривать структуры вида[1] (A, R), где A — непустое множество, R — двуместное (= *бинарное*) отношение на A, то есть $R \subseteq A \times A$. Часто R будем обозначать символом $<$ или $\leqslant$.

Определение 1. *(Нестрого) частично упорядоченное множество* — это структура $(A, \leqslant)$, удовлетворяющая условиям:
(1) (*рефлексивность*) $\forall x\, (x \leqslant x)$,
(2) (*транзитивность*) $\forall x, y, z\, (x \leqslant y \;\&\; y \leqslant z \;\Rightarrow x \leqslant z)$,
(3) (*антисимметричность*) $\forall x, y\, (x \leqslant y \;\&\; y \leqslant x \;\Rightarrow x = y)$.

Определение 2. *(Строго) частично упорядоченное множество* — это структура $(A, <)$, удовлетворяющая условиям:
(1') (*иррефлексивность*) $\forall x\, \neg(x < x)$,
(2') (*транзитивность*) $\forall x, y, z\, (x < y \;\&\; y < z \;\Rightarrow x < z)$.

Задача 1. Докажите: **а)** если структура $(A, \leqslant)$ удовлетворяет (1,2,3), то положив $(x < y) \leftrightharpoons (x \leqslant y) \,\&\, (x \neq y)$, мы получим структуру $(A, <)$, удовлетворяющую (1',2'); **б)** наоборот, если структура $(A, <)$ удовлетворяет (1',2'), то задав $(x \leqslant y) \leftrightharpoons (x < y) \vee (x = y)$, мы получим структуру $(A, \leqslant)$, удовлетворяющую (1,2,3).

Поэтому с какими порядками работать — нестрогими или строгими — лишь дело удобства. Все дальнейшие определения и утверждения, данные в терминах одного, можно переформулировать в терминах другого.

Определение 3. Частично упорядоченное множество $(A, \leqslant)$ называется ***линейно*** упорядоченным (а отношение $\leqslant$ — *линейным порядком* на A), если выполнено условие:
(4) (*линейность*) $\forall x, y\, (x \leqslant y \;\vee\; y \leqslant x)$.

В терминах строгого порядка линейность формулируется так:
(4') $\forall x, y, (x < y \vee x = y \vee y < x)$.

Примеры. Линейные порядки: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ с отношением $\leqslant$.
Частичный порядок $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$. Нарисуйте диаграмму ч.у.м. $(\mathcal{P}(\{1,2,3\}), \subseteq)$.

Определение 4. Две структуры $(A, \leqslant_1)$ и $(B, \leqslant_2)$ называются *изоморфными*, и пишем: $(A, \leqslant_1) \cong (B, \leqslant_2)$, если существует биекция $h\colon A \to B$, такая что для любых $a, a' \in A$ имеем: $a \leqslant_1 a' \Leftrightarrow h(a) \leqslant_2 h(a')$. f — *изоморфизм.*

Упражнение: Докажите, что для линейных порядков достаточно импликации $\Rightarrow$ в определении изоморфизма.

Задача 2. а) Докажите: $(\mathcal{P}(\{1,2,3\}), \subseteq) \cong (\{0,1\}^3, \preccurlyeq)$, где
$(x_1, x_2, x_3) \preccurlyeq (y_1, y_2, y_3) \leftrightharpoons \forall i \leqslant 3\ (x_i \leqslant y_i)$.
б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$, где M — конечное множество.
в) Пусть M — бесконечное множество. Докажите: $(\mathcal{P}(M), \subseteq) \cong ((M{\to}2), \preccurlyeq)$, где $(M{\to}2)$ — множество всех функций $f\colon M \to \{0,1\}$, а частичный порядок задан так: $f \preccurlyeq g \leftrightharpoons \forall x\, [f(x) \leqslant g(x)]$.

[1] Заметим, что более точно говорить, что это *упорядоченная пара* $\langle A, R \rangle$.

Наименьший и минимальный элемент

Пусть $(A, \leqslant)$ — частично упор. множество. Элемент $a \in A$ называется
– ***минимальным***, если меньше него нет элементов: $\neg\exists b\ b < a$.
– ***наименьшим***, если все элементы больше или равны его: $\forall b\ a \leqslant b$.
Аналогично можно дать определение элемента, минимального и наименьшего в некотором подмножестве $X \subseteq A$.

Задача 3. а) Приведите пример ч.у.м. $(A, \leqslant)$, в котором минимальные элементы есть, а наименьшего нет. **б)** Докажите, что если a — наименьший элемент, то он — единственный минимальный.

Задача 4. Докажите, что если порядок линеен, то понятия минимального и наименьшего элемента совпадают.

Арифметика порядков

Определение 5. Пусть[2] $A \cap B = \varnothing$. ***Суммой*** линейно упорядоченных множеств $(A, \leqslant_1)$ и $(B, \leqslant_2)$ наз. структура $(A, \leqslant_1) + (B, \leqslant_2) := (A \cup B, \leqslant)$, где порядок $\leqslant$ задан так (к множеству A *справа* «приставили» B):

$$x \leqslant y \quad \leftrightharpoons \quad \big[(x, y \in A \text{ и } x \leqslant_1 y) \text{ или } (x, y \in B \text{ и } x \leqslant_2 y) \text{ или } (x \in A \text{ и } y \in B) \big].$$

Задача 5. а) Сумма линейных порядков — линейный порядок.
б) $+$ ассоциативен: $[(A, \leqslant_1) + (B, \leqslant_2)] + (C, \leqslant_3) \cong (A, \leqslant_1) + [(B, \leqslant_2) + (C, \leqslant_3)]$.
в) $+$ не коммутативен (с точностью до изоморфизм); приведите пример.
г) Для конечных линейных порядков сумма – коммутативна (докажите).
д) $\mathbb{N} + \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$? $\mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$? $\mathbb{Q} + \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$? $\mathbb{R} + \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$? (порядок всюду $\leqslant$).

Определение 6. ***Произведением*** линейно упорядоченных множеств $(A, \leqslant_1)$ и $(B, \leqslant_2)$ называется структура $(A, \leqslant_1) \times (B, \leqslant_2) := (A \times B, \leqslant)$, где порядок $\leqslant$ на декартовом произведении $A \times B$ задан так («B раз по A»):

$$\langle a, b \rangle \leqslant \langle a', b' \rangle \quad \leftrightharpoons \quad \big[(b <_2 b') \text{ или } (b = b' \text{ и } a \leqslant_1 a') \big].$$

Задача 6. а) Произведение линейных порядков — линейный порядок.
б) $\times$ ассоциативно: $[(A, \leqslant_1) \times (B, \leqslant_2)] \times (C, \leqslant_3) \cong (A, \leqslant_1) \times [(B, \leqslant_2) \times (C, \leqslant_3)]$.
в) $\times$ не коммутативно (с точностью до изоморфизма); приведите пример.
г) Для конечных линейных порядков произведение коммутативно.

Линейно упор. множество натуральных чисел обозначается $\omega = (\mathbb{N}, \leqslant)$.

Задача 7. Изоморфны ли произведения $2 \times \omega$ и $\omega \times 2$? Здесь 2 — двухэлементный линейный порядок.

Вполне упорядоченные множества

Определение 7. Линейно упорядоченное множество $(A, \leqslant)$ наз. ***вполне упорядоченным*** (well-ordered), если:
(5) в любом непустом подмножестве $X \subseteq A$ имеется наименьший элемент: $\forall X \subseteq A\ (X \neq \varnothing \Longrightarrow \exists a \in X\ \forall b \in X\ a \leqslant b)$.

Примеры: ω, $\omega + 1$, $\omega + 2$, и так далее, $\omega + \omega$, $\omega + \omega + \omega$ и так далее.
(*) Подумайте, как устроено $\omega \times \omega$, т.е. ω^2? ω^3? Как определить ω^ω?

Задача 8. а) Сумма вполне упорядоченных множеств вполне упорядочена.
б) Произведение вполне упорядоченных множеств вполне упорядочено.

[2] Если же множества A и B пересекаются, то сначала создаем их непересекающиеся «копии», и складываем уже их. В конечном итоге нас будет интересовать результат — сумма порядков — лишь с точностью до изоморфизма.

Домашнее задание

Решите написанные выше задачи, которые не разбирались на занятии.

Задача 9. Докажите, что всякое частично упорядоченное множество $(A, \leqslant)$ вкладывается в $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$.

Задача 10. Докажите, что всякий счетный линейный порядок $(A, \leqslant_1)$ вкладывается в рациональные числа $(\mathbb{Q}, \leqslant)$. То есть существует инъективная функция $h\colon A \to \mathbb{Q}$, такая что $a \leqslant_1 a' \Leftrightarrow h(a) \leqslant_2 h(a')$.

Задача 11. Линейный порядок $(A, <)$ называется ***плотным***, если между любыми элементами есть элемент:

$$\forall x, z\, (x < z \;\Rightarrow\; \exists y\, (x < y \;\&\; y < z)).$$

Докажите, что всякий счетный плотный линейный порядок без наименьшего и наибольшего элемента изоморфен $(\mathbb{Q}, <)$.

Задача 12. Для любого линейно упорядоченного множества $(A, \leqslant)$ следующие условия эквивалентны:
(5) в любом непустом подмножестве $X \subseteq A$ имеется наименьший элемент;
(5') для всякого $X \subseteq A$, если из $\forall b < a\, (b \in X)$ всегда следует $a \in X$, то непременно $X = A$;
(5'') не существует бесконечных строго убывающих последовательностей $a_0 > a_1 > a_2 > \ldots$ элементов из A.

Примечание: для последнего пункта потребуется *аксиома выбора*.