Введение в математическую логику и теорию алгоритмов

Семинар № 3: Логика высказываний

Синтаксис. Будут использоваться символы: $p_0, p_1, \ldots$ — *переменные по высказываниям* (или *пропозициональные переменные*), связки *отрицание* $\neg$ (не), *конъюнкция* $\wedge$ (и), *дизъюнкция* $\vee$ (или), *импликация* $\to$ (если...то...), *эквивалентность* $\leftrightarrow$ (тогда и только тогда). Иногда вводят *логические константы* $\bot$ (ложь) и $\top$ (истина).

Формулы строятся по индукции: $\bot$, $\top$, p_i — формулы; если A — формула, то $\neg A$ — формула; если A и B — формулы, то $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$, $(A \leftrightarrow B)$ — тоже формулы. Вместо $\wedge$ иногда пишут &.

Множество переменных обозн. $\mathbb{P} = \{p_0, p_1, \ldots\}$; множество формул Fm.

Семантика. *Оценкой* переменных называется произвольная функция $v\colon \mathbb{P} \to \{0,1\}$. Она распространяется на все формулы (то есть продолжается до функции $\mathsf{Fm} \to \{0,1\}$) индуктивно (согласно таблицам истинности — см. лекции или учебник). В случае, если $v(A) = 1$, мы будем говорить, что формула A *истинна* при оценке v.

Для всякой формулы A можно построить *истинностную таблицу*, показывающую значение формулы, то есть $v(A)$, при каждой оценке v входящих в нее переменных. Таким образом, всякой *формулой* A (от переменных $p_1, \ldots, p_n$) представляется некоторая *булева функция* f от n аргументов, то есть функция $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$.

Понятия, относящиеся к одной формуле: формула A называется

- *общезначимой*,[1] если она истинна при каждой оценке: $\forall v \;\; v(A) = 1$;
- *выполнимой*, если она истинна при некоторой оценке: $\exists v \;\; v(A) = 1$;

- *противоречивой*,[2] если она ложна при каждой оценке: $\forall v \;\; v(A) = 0$;
- *опровержимой*, если она ложна при некоторой оценке: $\exists v \;\; v(A) = 0$.

Утверждение: *A тавтология $\Leftrightarrow$ $\neg A$ невыполнима.*

Сформулируйте аналогичную связь между понятиями «противоречивая» и «опровержимая» формула.

Важнейшее понятие, связывающее две формулы: формулы A и B называются *равносильными* (или *эквивалентными*), если при каждой оценке значения этих формул совпадают: $\forall v \; v(A) = v(B)$. Записывают это так: $A \equiv B$. Это бинарное отношение на множестве Fm, более того, отношение эквивалентности (рефлексивное, симметричное, транзитивное). Эквивалентное определение: формулы A и B эквивалентны, если их истинностные таблицы совпадают (таблицы нужно строить над *объединением* списков переменных, входящих в A и в B).

Утверждение: $A \equiv B \iff$ формула $A \leftrightarrow B$ является тавтологией.

---

[1] Или *тавтологией*, или *тождественно истинной.*

[2] Или *тождественно ложной, или невыполнимой.*

Основные равносильности:

- связки $\wedge$ и $\vee$ ассоциативны, коммутативны, дистибутивны друг относительно друга, идемпотентны: $A \wedge A \equiv A$, $A \vee A \equiv A$;
- связки $\to$ и $\leftrightarrow$ — «лишние»: $(A \to B) \equiv (\neg A \vee B)$, $(A \leftrightarrow B) \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$;
- законы де Моргана: $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$, $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$;
- $A \wedge \neg A \equiv \bot$, $A \vee \neg A \equiv \top$, $\neg\neg A \equiv A$;
- $\top \wedge A \equiv A$, $\top \vee A \equiv \top$, $\bot \wedge A \equiv \bot$, $\bot \vee A \equiv A$;
- законы поглощения: $A \wedge (A \vee B) \equiv A$, $A \vee (A \wedge B) \equiv A$.

Упражнение. С помощью осн. равносильностей преобразуйте $\neg\top$ в $\bot$.

Если формула A преобразована в формулу B с помощью цепочки основных равносильностей, то $A \equiv B$. Мы скоро увидим, что верно и обратное — тем самым вышеприведенный список равносильностей является полным:

Теорема. *Если $A \equiv B$, то можно преобразовать формулу A в формулу B с помощью основных равносильностей.*

Формула находится в *ДНФ* (*дизъюнктивной нормальной форме*), если она имеет вид: дизъюнкция нескольких конъюнкций переменных или отрицаний переменных:

$$(\ldots \& \ldots \& \ldots) \vee (\ldots \& \ldots \& \ldots) \vee \ldots$$

Совершенная ДНФ (или СДНФ) над списком переменных $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $n \geqslant 1$ — это ДНФ, в каждой «скобке» (т.е. в каждом дизъюнкте) которой встречается каждая переменная из списка $\vec{p}$, причем ровно по одному разу.

Теорема. (а) *Каждая формула эквивалентна некоторой ДНФ.*
(б) *Каждая* ***выполнимая***[3] *формула равносильна некоторой СДНФ (над любым списком переменных, содержащим все переменные этой формулы). Более того, эта СДНФ единственна с точностью до перестановки скобок и перестановки конъюнктов внутри каждой скобки.*

Мы докажем эту теорему конструктивно, предъявив *алгоритм* построения СДНФ по произвольной формуле.

[3]А каждая невыполнимая формула A равносильна формуле $\bot$, которую в некоторых книгах называют СДНФ формулы A.

Два основных способа построения СДНФ по данной формуле:

1) по формуле построить **таблицу истинности**, а по ней — СДНФ: каждой строке, в которой значение формулы равно 1, сопоставить конъюнкцию из переменных или отрицаний переменных, причём для каждой переменной p_i значению 1 сопоставить p_i, а значению 0 сопоставить $\neg p_i$; полученные конъюнкции соединить знаками $\vee$ (дизъюнкциями); очевидно, что если в таблице для данной формулы не было ни одного значения 1, то данный алгоритм неприменим (и, согласно теореме, и не должен был быть применим);

2) с помощью **основных равносильностей** (см. выше) можно преобразовать формулу в СДНФ либо в $\bot$.

Задача: а) опишите этот алгоритм приведения к СДНФ; б) если применить данный алгоритм к противоречивой формуле, то укажите шаг, на котором алгоритм обнаружит, что не сможет привести формулу к СДНФ — в этом случае алгоритм должен приводить формулу к формуле $\bot$.

КНФ и СКНФ определяются аналогично («двойственным» образом).

Сформулируйте про КНФ и СКНФ аналогичную теорему и опишите два способа построения СКНФ.

Произвольное множество формул $\Gamma \subseteq \mathsf{Fm}$ называется *выполнимым*, если существует оценка v, при которой все формулы из Γ истинны.

Пример. $\Gamma = \{\, (p \vee \neg q), \quad (p \,\&\, r), \quad (q \,\&\, \neg s)\,\}$ — выполнимо?
А если первую формулу заменить на $(\neg p \vee \neg q)$?

Вопрос: *Бывает ли так* (то есть существует ли такое $\Gamma \subseteq \mathsf{Fm}$), *что:*
– каждое его конечное подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ *выполнимо,*
– всё множество формул Γ *не выполнимо.*

Рассмотрите такие случаи:

1) Может ли множество Γ быть *конечным* множеством формул?

2) Пусть все формулы множества Γ зависят лишь от одной переменной p; может ли тогда существовать требуемое Γ?

3) Пусть все формулы множества Γ зависят лишь от переменных $p_1, \ldots, p_n$. Можно ли в этом случае предъявить требуемое Γ?

Следовательно, Γ непременно должно содержать формулы, в которые (в сококупности, конечно же) входит бесконечное число переменных.
Итак, сможете ли вы построить требуемое множество формул Γ?

Задачи

1. Является ли данная формула общезначимой, выполнимой, противоречивой, опровержимой?

   а) $p \to (q \to p)$; **б)** $p \wedge \neg p$; **в)** $p \vee \neg p$; **г)** $(p \to q) \to p$.

2. Проверить на эквивалентность следующие пары формул:

   а) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$; **б)** $p \vee (p \wedge q) \equiv p$.

3. С помощью основных равносильностей привести к ДНФ и КНФ:

   а) $((p \to q) \to r) \to s$; **б)** $(p \vee q) \to (r \vee s)$; **в)** $p \wedge ((q \vee r) \to s)$.

   Привести к СДНФ: **г)** $p \vee (\neg q \wedge r)$; **д)** $\neg(p \vee \neg(q \to r))$.

Домашнее задание

4. Построить формулу A от переменных p, q, r, истинную в точности тогда, когда:
   а) истинно большинство из переменных p, q, r;
   б) истинно ровно две из переменных p, q, r.

5. Является ли данная формула общезначимой, противоречивой, выполнимой, опровержимой?

   а) $((p \to q) \to p) \to p$; **в)** $(p \to q) \vee (q \to p)$;
   б) $((p \to q) \to q) \to q$; **г)** $(p \to q) \vee (q \to r)$.

6. Проверить на равносильность следующие пары формул:

   а) $p \to (q \to r) \ \equiv\ q \to (p \to r)$
   б) $p \to (q \to r) \ \equiv\ (p \wedge q) \to r$

   в) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \ \equiv\ p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$
   г) $(p \to q) \wedge (\neg p \to r) \ \equiv\ (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$

7. Определите, какую связку ($\wedge$ или $\vee$) надо поставить вместо $\bigcirc$, чтобы получились равносильные формулы:

   а) $(p \to q) \wedge (p \to r) \ \equiv\ p \to (q \bigcirc r)$
   б) $(p \to q) \vee (p \to r) \ \equiv\ p \to (q \bigcirc r)$

   в) $(q \to p) \wedge (r \to p) \ \equiv\ (q \bigcirc r) \to p$
   г) $(q \to p) \vee (r \to p) \ \equiv\ (q \bigcirc r) \to p$

8. Сформулируйте алгоритм приведения формул: а) к ДНФ;
   б) к СДНФ или $\perp$ (укажите этап алгоритма, на котором выясняется, выполнима ли данная формула).

9. Пусть формула $A(p_1, \ldots, p_n)$ построена из перепеременных $p_1, \ldots, p_n$ лишь с помощью связок $\neg, \wedge, \vee$. Поменяем в ней всюду $\wedge$ на $\vee$ и $\vee$ на $\wedge$; получившуюся формулу обозначим через A^*.

   а) Докажите, что $A^*(p_1, \ldots, p_n) \equiv \neg A(\neg p_1, \ldots, \neg p_n)$.

   (Проведите доказательство индукцией по построению формулы A.)

   б) Получите **принцип двойственности**: если $A \equiv B$, то $A^* \equiv B^*$.